第 13 卷第 1 期 2015 年 2 月
1672-6553/2015/13(1)/068-4
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 13 No. 1
Feb. 2015

阻尼运动的动力学逆问题和变分法逆问题*

丁光涛†
（安徽师范大学物理与电子信息学院，芜湖　241000）

摘要　以阻尼运动为例，研究动力学逆问题和变分法逆问题的特征，以及两者之间的关联. 首先，从该运动的运动规律导出几种对应的运动微分方程，即得到几种不同的作用于质点上的力，并讨论了这几种情况之间的联系和区别；其次，从其中两种运动微分方程出发，直接构造出相应的 Lagrange 函数和函数族；最后，指出了两种逆问题相组合产生的新结果.

关键词　经典力学，　动力学逆问题，　变分法逆问题，　阻尼运动

DOI：　10.6052/1672-6553-2013-080

引言

根据给定的系统运动性质，确定系统的受力情况，是动力学一类基本问题，这类问题及其各种变形问题称为动力学逆问题；在质点力学中，已知质点的运动规律求作用其上的力，是已知作用在质点上的力求其运动规律问题的逆问题[1-3]. 变分法逆问题研究给定的运动微分方程能否从变分原理中导出，即能否构造出对应的 Lagrange 函数，将给定的方程表示成 Lagrange 方程形式[4-9]. 显然，上述两类逆问题可以组合起来，根据给定的运动性质来构造 Lagrange 函数. 本文以质点阻尼运动为例，探讨上述两类逆问题的“灰色”特征，即解的不唯一性，以及两类问题的组合导致的新情况，对一个特定的运动存在多种不同的 Lagrange 函数，但是，在一般情况下这些函数可能不全部是等效的.

1　阻尼运动的动力学逆问题

1.1　从运动规律导出作用在质点几种力的函数表达

设质点质量为 m，运动规律为

$$x=\frac{v_0}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}) \tag{1}$$

这个规律与线性阻尼运动规律一致，本文中的阻尼运动就是指按此规律的质点运动. 下面导出作用在质点上的力的函数表达式. 将式(1)对时间一次和二次导数，分别得到

$$\dot{x}=v_0e^{-\lambda t} \tag{2}$$

$$\ddot{x}=-\lambda v_0e^{-\lambda t} \tag{3}$$

利用牛顿运动定律，直接得到结果为

$$F_1=m\ddot{x}=-m\lambda v_0e^{-\lambda t} \tag{4}$$

即质点受到有关大小随时间按指数规律衰减的阻力作用，其运动微分方程是

$$m\ddot{x}+m\lambda v_0e^{-\lambda t}=0 \tag{5}$$

必须指出，导出的力的函数表达式不是唯一的，结合式(2)得到

$$F_2=-m\lambda\dot{x} \tag{6}$$

即质点受到大小与速度成正比、方向与速度相反的阻尼力作用，其运动微分方程是

$$m\ddot{x}+m\lambda\dot{x}=0 \tag{7}$$

这是通常所说的阻尼运动微分方程. 力还可以表示成坐标 x 的函数，结合式(1)，得到

$$F_3=-m\lambda(v_0-\lambda x) \tag{8}$$

质点运动微分方程是

$$m\ddot{x}+m\lambda(v_0-\lambda x)=0 \tag{9}$$

利用是(2)和(8)，还能够得到

$$F_4=-m\lambda(\dot{x}e^{\lambda t}-\lambda x) \tag{10}$$

质点运动微分方程是

$$m\ddot{x}+m\lambda\dot{x}e^{\lambda t}-m\lambda^2x=0 \tag{11}$$

1.2　从阻尼运动说明动力学逆问题的特点

有些文献中认为质点动力学逆问题比正问题

2012-10-28 收到第 1 稿，2013-06-20 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11472063)
† 通讯作者 E-mail：dgt695@sina.com

简单,在数学上是微分问题,从运动规律导出作用在质点上的(合)力随时间变化的函数关系即可.但是,从物理方面来看,问题并非如此,实际的作用力是与时间、位置和速度相关的,要求的是力随这些因素变化的函数关系,即得到力的变化规律(力律).但是,如果只是已知某个特定的运动规律,信息是不充分的,得到的解不是唯一的.上述导出的四种不同的作用力 F 的函数形式和运动微分方程,反映了逆问题的"灰色"特性,四种解存在共同点,都可以导出给定的运动规律,但是,在力律上是有区别的.对此给出进一步说明如下:

1)四种运动微分方程存在共同的特解,即可以导出相同的运动规律式(1).值得注意的是,这四个相同的特解都对应着同一种初始条件:

$$t=0,x=0,\dot{x}=v_0 \tag{12}$$

2)四种不同的作用力 F 的函数表达式中,式(4)的 F_1 和式(8)的 F_3 存在相同点,即表达式中都包含着初始条件 v_0;而式(6)的 F_2 和 式(10)的 F_4 也存在相同点,即表达式中都不包含初始条件 v_0.这两种情况是有原则区别的,动力学逆问题的一般解应当是与初始条件无关的.

3)式(12)初始条件中,t 和 x 可以任意赋值,可以不为0,但是,不同的初值相当于计时原点和坐标原点的移动,不会带来任何动力学的影响;但是,v 不可任意赋值,因为在阻尼运动中,阻尼力的力律是大小与速度成正比,方向与速度相反,而这里的速度实质上是质点相对于媒质的速度,将质点相对于参考系的速度与相对于媒质的速度等同起来的条件是媒质相对于参考系静止,换句话说,v 的初值不能通过引入运动参考系的变换来改变的.

4)因此,下面的讨论中,将舍弃力的表达式中参数与运动初始条件赋值紧密相关的方程(5)和(9),而只讨论方程(7)和(11).后两个方程可以看作阻尼运动微分方程,质点受到阻尼力作用,方程(7)中质点只受线性阻尼力作用,方程(11)中质点受到变系数阻尼力和有势力的合力作用,从物理方面来看,这两个方程所代表的系统是不同的.

2　阻尼运动的变分法逆问题

2.1　从运动方程直接构造 Lagrange 函数的方法

构造 Lagrange 函数的方法有很多种,本文仅利用一种从运动方程直接构造 Lagrange 函数的方法[9].给定一维系统运动微分方程为

$$\ddot{x}+f(t,x,\dot{x})=0 \tag{13}$$

设其 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}u(t,x,\dot{x})\dot{x}^2+v(t,x)\dot{x}+v_0(t,x) \tag{14}$$

代入 Lagrange 方程,展开得到

$$\varphi\ddot{x}+\varphi_1\dot{x}+\varphi_2\dot{x}^2+\varphi_3\dot{x}^3+\varphi_0=0$$

式中

$$\varphi=\varphi(t,x,\dot{x})=u+2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial\dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial^2 u}{\partial\dot{x}^2}$$

$$\varphi_1=\varphi_1(t,x,\dot{x})=\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\varphi_2=\varphi_2=(t,x,\dot{x})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\dot{x}}\right),$$

$$\varphi_3=\varphi_3(t,x,\dot{x})=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\dot{x}},$$

$$\varphi_0=\varphi_0(t,x)=\frac{\partial v_1}{\partial t}-\frac{\partial v_0}{\partial x} \tag{15}$$

将方程(14)改写成如下形式

$$\ddot{x}+(\varphi_1/\varphi)\dot{x}+(\varphi_2/\varphi)\dot{x}^2+(\varphi_3/\varphi)\dot{x}^3+\varphi_0/\varphi=0$$

比较方程(13),得到

$$(\varphi_1/\varphi)\dot{x}+(\varphi_2/\varphi)\dot{x}^2+(\varphi_3/\varphi)\dot{x}^3+\varphi_0/\varphi=f(t,x,\dot{x}) \tag{16}$$

根据 $f(t,x,\dot{x})$ 的具体形式,引入辅助条件,解方程(16),得到 $u(t,x,\dot{x})$,$v_1(t,x)$ 和 $v_0(t,x)$ 从而构造出(15)式中函数 L.应当指出,对一维系统利用规范等效变换,适当选择规范变换函数,总可以使函数 v_1 或 v_0 中的一个变换为零,从而简化求解.

在具体问题中可以对函数 u 的宗量作 6 种不同的设定,导出对应的特殊解法.

1. 设 $u=u(t)$,由(15)和(16)式得

$$\varphi=u(t),\varphi_1=\frac{du}{dt},\varphi_2=\varphi_3=0$$

$$\left(\frac{du}{dt}/u\right)\dot{x}+\varphi_0/u=f(t,x,\dot{x}) \tag{17}$$

2. 设 $u=u(x)$,由(15)和(16)式得

$$\varphi=u(x),\varphi_1=\varphi_3=0,\varphi_2=\frac{1}{2}\frac{du}{dt},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}/u\right)\dot{x}^2+\varphi_0/u=f(t,x,\dot{x}) \tag{18}$$

3. 设 $u=y(\dot{x})$,由(15)和(16)式得

$$\varphi=\varphi(\dot{x})=u+2\dot{x}\frac{du}{d\dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{d^2u}{d\dot{x}^2},$$

$$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=0,\varphi_0/\varphi=f(t,x,\dot{x}) \tag{19}$$

4. 设 $u=u(t,x)$,由(15)和(16)式得

$$\varphi=u,\varphi_1=\frac{\partial u}{\partial t},\varphi_2=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x},\varphi_3=0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}/u\right)\dot{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}/u\right)\dot{x}^2+\varphi_0/u=f(t,x,\dot{x}) \quad (20)$$

5. 设 $u=u(t,\dot{x})$,由(15)和(16)式得

$$\varphi=u+2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial^2 u}{\partial \dot{x}^2},$$

$$\varphi_1=\frac{\partial u}{\partial t},\varphi_2=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \dot{x}},\varphi_3=0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}/\varphi\right)\dot{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \dot{x}}/\varphi\right)\dot{x}^2+\varphi_0/u=f(t,x,\dot{x}) \quad (21)$$

6. 设 $u=u(x,\dot{x})$,由(15)和(16)式得

$$\varphi=u+2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial^2 u}{\partial \dot{x}^2},$$

$$\varphi_1=0,\varphi_2=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x},\varphi_3=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \dot{x}},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}/\varphi\right)\dot{x}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \dot{x}}/\varphi\right)\dot{x}^3+\varphi_0/\varphi=f(t,x,\dot{x}) \quad (22)$$

2.2 阻尼运动的 Lagrange 函数

首先,讨论线性阻尼运动,其运动微分方程为(为简化取 $m=1$)

$$\ddot{x}+\lambda\dot{x}=0 \quad (\lambda>0,\text{为常数}) \quad (23)$$

应用特殊解法 1,可得

$$u=u(t)=e^{\lambda t},\varphi_0=0,L=\frac{1}{2}e^{\lambda t}\dot{x}^2 \quad (24)$$

应用特殊解法 3,可得

$$u=\frac{2}{\dot{x}}\ln\dot{x},\varphi_0=\lambda$$

从 $\varphi_0=\lambda$,可得到不同的解,如

$v_1=0,v_0=-\lambda x$;

$v'_1=\lambda t,v'_0=0$;

$v''_1=\frac{1}{2}\lambda t,v''_0=\frac{1}{2}\lambda t$,等等.

对应地,一组规范等效的 Lagrange 函数为

$$L=\dot{x}\ln\dot{x}-\lambda x, \quad (25)$$

$$L'=\dot{x}\ln\dot{x}+\lambda t\dot{x} \quad (26)$$

$$L''=\dot{x}\ln\dot{x}+\frac{1}{2}\lambda t\dot{x}-\frac{1}{2}\lambda x. \quad (27)$$

应用特殊解法 5,设 $u=u(t,\dot{x})$,则有

$$\frac{\partial u}{\partial t}\dot{x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \dot{x}}\dot{x}^2+\varphi_0=\lambda\dot{x}\left(u+2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial^2 u}{\partial \dot{x}^2}\right) \quad (28)$$

方程(28)存在一个解族

$$u=\frac{2e^{-\lambda t}}{\dot{x}^2}F(\dot{x}e^{\lambda t}+c_0),\varphi_0=0 \quad (29)$$

其中 c_0 是常数,$F=F(\xi)=F(\dot{x}e^{\lambda t}+c_0)$ 是对其宗量 ξ 任意的光滑函数,但要求 $d^2F/d\xi^2\neq0$. 与(29)式 u 对应的是阻尼运动的一个 Lagrange 函数族[10,11]

$$\bar{L}=e^{-\lambda t}F(\dot{x}e^{\lambda t}+c_0) \quad (30)$$

当 F 取不同函数形式时,就得到一系列不同而等效的 Lagrange 函数,例如

$$L=\dot{x}^n e^{(n-1)\lambda t} \quad (n\neq0,1) \quad (31)$$

$$L=(\dot{x}e^{2\lambda t}+e^{\lambda t})^{-1} \quad (32)$$

$$L=\sqrt[n]{\dot{x}^n+e^{-n\lambda t}} \quad (33)$$

等等. 应当指出(26)式中 L' 也属于这个函数族.

应用特殊解法 6,设 $u=u(x,\dot{x})$,可以求解,(25)式中 L 就是特解之一. 应用一般解法,设 $u=u(t,x,\dot{x})$,也可求解,(27)式中 L'' 就是一个特解.

其次,计算变系数阻尼运动的 Lagrange 函数,其运动微分方程为($m=1$)

$$\ddot{x}+\lambda\dot{x}e^{\lambda t}-\lambda^2x=0 \quad (34)$$

这个方程比方程(23)复杂,但是,应用特殊解法 1,仍然可以解出

$$u=\exp(-\exp\lambda t),v_1=0,$$

$$v_0=\frac{1}{2}\lambda^2ux^2=\frac{1}{2}\lambda^2x^2\exp(-\exp\lambda t) \quad (35)$$

即 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\lambda^2x^2)\exp(-\exp\lambda t) \quad (36)$$

这个 Lagrange 函数与线性阻尼运动的 Lagrange 函数没有等效关系,由它们导出的运动方程的解并不等价,仅仅在特殊的初始条件下有一个共同的特解(1).

3 结论和讨论

本文以运动规律(1)表示的阻尼运动为例,讨论动力学逆问题、变分法逆问题和两者的组合问题的特点.

(1). 这个实例清楚地表明了动力学逆问题的“灰色”特点,已知信息不充分,导致结果不确定. 即使对简单的一维运动而言,导出的几种力律也是不同的,运动微分方程不是等价的,对应著物理上

不同的系统.

(2). 变分法逆问题的解,即使对同一个运动微分方程,导出的 Lagrange 函数也可能不是唯一的. 线性阻尼运动的 Lagrange 函数和函数族说明了这个特点,但是,这些 Lagrange 函数是等效的.

(3). 两类逆问题是相关联的,它们的组合问题产生新的特点. 由于动力学逆问题可以导出不相同且不等价的运动微分方程,使得变分法逆问题从不同的微分方程出发,构造得到的 Lagrange 函数更多,这些函数中有些是等效的,它们对应着同一个方程,有些函数分别对应着不等价的方程,它们之间没有通常的等效关系.

参　考　文　献

1 梅凤翔. 动力学逆问题. 北京:国防工业出版社,2009 (Mei F X. Inverse problems of dynamics. Beijing: National Defense Industry Press, 2009 (in Chinese))

2 Rosenberg B M. Analytical dynamics of discrete systems. New York: Pleum Prss, 1977

3 梅凤翔. 分析力学(下卷). 北京:北京理工大学出版社,2013 (Mei F X. Analytical mechanics (II). Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013(in Chinese))

4 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics I. New York:Springer-Verlag,1978

5 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics II. New York:Springer-Verlag,1983

6 Lopuszanski J. The inverse variational problem in classical mechanics. Singapore: World Scientific, 1999

7 梅凤翔. 分析力学专题,北京:北京工业学院出版社,1988 (Mei F X. Special problems of analytical mechanics. Beijing: Beijing Institute Technologe Press, 1988 (in Chinese))

8 Cielinski J L, Nikiciuk T. A direct approach to the construction of standard and non - standard Lagragians for Dissipative - like dynamical systems with variable coefficients. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2000, 43: 175205

9 丁光涛. 从运动方程构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报,2010,8:305 ~ 310 (Ding G T. A direct approach to the construction of Lagrangians from the motion equations. *Journal of Dynamics and Control*, 2010,8:305 ~310 (in Chinese))

10 丁光涛. 关于一类 Lagrange 函数族的存在条件. 动力学与控制学报,2011, 9(3): 219 ~221 (Ding G T. On the existence conditions for a class of the Lagrangians families. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(3): 219 ~221(in Chinese))

11 丁光涛. 一类 Painleve 方程的 Lagrange 函数族. 物理学报, 2012,61:110202 (Ding G T. The families of Lagrangians of a Painleve equation. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61:110202 (in Chinese))

INVERSE PROBLEM OF DYNAMICS AND INVERSE PROBLEM OF VARIATIONAL CALCULUS FOR DAMPED MOTION *

Ding Guangtao†

(*College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

Abstract In this paper, a damped motion is taken as an illustrative example to study the characteristics of inverse problem of dynamics and inverse problem of variational calculus and the relation between the two. First, from a special equation of damped motion, four differential equations of motion, i. e. four different functions of force are obtained, the connections and the differences among them are discussed. Secondly, the corresponding Lagrangians and a family of Lagrangians are constructed directly from the two among the four above equations. Finally, new result of the combination of the two inverse problems is pointed.

Key words classical mechanics, inverse problem of dynamics, inverse problem of variational calculus, damped motion

Received 28 October 2012, revised 20 June 2013.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11472063)

† Corresponding author E-mail: dgt695@ sina. com