

分数阶复杂网络的混合投影同步研究*

杨丽新[†] 江俊

(西安交通大学强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

摘要 主要针对一类节点为分数阶混沌系统的复杂网络混合投影同步进行研究. 基于分数阶系统的稳定性理论和非线性反馈控制方法, 通过设计有效的控制器, 实现了不同节点的复杂网络的混合投影同步, 并给出了实现投影同步的充分条件, 不仅从理论上分析了该控制器可以使复杂网络系统实现投影同步, 而且大量的数值模拟证明所设计控制器的正确性和有效性.

关键词 分数阶复杂网络, 混合投影同步, 分数阶混沌系统, 反馈控制

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-095

引言

自从复杂网络的小世界特性和无标度特性被发现以来^[1-2], 复杂网络就吸引了大量自然科学和工程应用领域方面的科研人员关注^[3-4]. 其主要原因是复杂网络已经广泛应用于实际生活中, 例如经济系统、因特网、生物神经网络以及大型机器人系统等. 复杂网络的应用, 不仅简化了系统的控制方法, 而且节省了大量的能源和经费, 作为复杂网络的一个重要动态特性, 同步已经得到了广泛的研究, 并且存在着大量的复杂网络同步结果. 过去十几年, 许多关于混沌同步的控制方法已被提出, 文献[5]研究了复杂网络的带有耦合延迟的全局同步, 接着, 文献[6]基于牵引控制, 讨论了一类较为一般的复杂网络系统的同步问题, 提出了一种简化近似公式来估计牵制结点数和未知的耦合强度等.

然而, 研究复杂网络的同步成果, 考虑的节点大多数为整数阶导数, 近几年来, 分数阶微积分的应用领域越来越广泛, 分数阶模型更加准确地刻画实际系统的物理现象, 2010年, 房建安等研究了加权网络的牵引控制问题^[7], 给出了分数阶动力学网络的控制性能与分数阶次, 以及耦合强度的关系, 随后, 很多学者研究了复杂网络的同步问题^[8]. 然而, 分数阶复杂网络的同步控制问题还处于起步和探索阶段, 有许多问题值得去研究.

本文基于分数阶系统的稳定性理论, 主要讨论分数阶混沌动力学网络的混合投影同步控制问题, 给出了一类具有不同节点的分数阶混沌动力学模型, 为使得该类网络达到混合投影同步, 设计了非线性控制器, 并得到了实现同步的充分条件, 数值仿真结果进一步验证了所提方法的有效性.

1 准备知识和问题描述

目前为止, 已经有多种分数阶微分的定义, 常用的是 Riemann - Liouville 和 Caputo 定义, 由于后者更适合描述分数阶微分方程的初值问题, 因此, 本文采用 Caputo 定义, 简单描述如下

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-n+1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数.

考虑一般的分数阶线性微分方程^[9]

$$D_*^q X = f(X), \quad D_*^q X = AX \quad (2)$$

其中 $X \in R^n, A \in R^{n \times n}, 0 < q \leq 1$.

对于线性分数阶系统(2), 若 $|\arg(\lambda_i(A))| > q\pi/2$ 成立, 则分数阶系统(2)渐近稳定.

我们考虑含有 N 个节点的分数阶动力学网络如下:

$$D_*^q x_i(t) = F_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma x_j(t),$$

2013-05-24 收到第1稿, 2014-07-03 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11172223)

[†] 通讯作者 E-mail: y09311@163.com

$$i = 1, \dots, N \quad (3)$$

其中 $q \in (0, 1]$; $x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in R^n$ 分别表示第 i 个节点动力学系统的阶数和状态变量, $F_i: R^n \rightarrow R^n$ 是非线性连续函数, 用来描述第 i 个节点的动力学行为, Γ 是内部耦合矩阵, $C = (c_{ij})_{N \times N} \in R^{N \times N}$ 是外部耦合矩阵, 表示网络的拓扑结构和耦合强度, 矩阵元素 c_{ij} 定义如下: 如果节点 i 和节点 j 之间有边连接且 ($i \neq j$), 则 $c_{ij} > 0$, 否则, $c_{ij} = 0$ ($i \neq j$), 矩阵 C 的对角元素定义如下:

$$c_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

假设复杂网络的孤立节点的解满足下式:

$$D_*^q s(t) = G(s(t)) \quad (4)$$

其中 $G: R^n \rightarrow R^n$ 是非线性光滑函数. $s(t)$ 可以是一个稳定点, 或者周期解, 也可以是混沌轨迹.

定义 1 对于给定的分数阶复杂网络(3), 若存在一个非零矩阵 Λ , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - \Lambda s(t)\| = 0, i = 1, 2, \dots, N$ 成立, 即复杂网络实现了混合投影同步, 其中, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 称为标度矩阵, λ_i 表示标度因子.

假设 1 假设存在正的常值 L , 满足不等式 $\|f(y) - f(x)\| \leq L \|y - x\|$, 其中 x 和 y 是时变向量.

2 主要结果

我们考虑如下受控的分数阶复杂网络

$$D_*^q x_i(t) = F_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma x_j(t) + u_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

其中, $u_i(t) \in R^n$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 是待设计的非线性控制器.

为了设计控制器的方便, 我们可把目标节点和分数阶网络系统重新写成如下形式

$$D_*^q s(t) = Bs(t) + g(s(t)) \quad (6)$$

$$D_*^q x_i(t) = A_i x_i(t) + f_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma x_j(t) + u_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

式中, $A_i, B \in R^{n \times n}$, $g(s(t))$ 和 $f_i(x_i(t))$ 分别是参考轨迹和第 i 个节点动力学系统的非线性部分.

定义误差向量

$$e_i(t) = x_i(t) - \Lambda s(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

我们可以得到具体的误差动力学系统如下:

$$D_*^q e_i(t) = A_i e_i(t) + f_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma e_j(t) - \Lambda g(s(t)) + (A_i - B) \Lambda s(t) + u_i(t) \quad (9)$$

我们的目标是设计合适的控制器 $u_i(t)$, 使得误差系统在原点稳定. 为此, 我们设计如下的控制器, 以定理形式给出.

定理 1 对于给定的标度矩阵 Λ 和初值条件 $x_i(0), s(0)$, 若设计如下的控制器

$$u_i(t) = -f_i(x_i(t)) - (A_i - B) \Lambda s(t) + \Lambda g(s(t)) - k_i e_i(t), i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

式中, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 是标度矩阵, k_i 是正的反馈增益, 则分数阶网络(7)可以实现混合投影同步.

证明: 根据误差向量的定义

$$e_i(t) = x_i(t) - \Lambda s(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

把控制器(10)式代入(9)式, 得到下式:

$$D_*^q e_i(t) = D_*^q x_i(t) - \Lambda D_*^q s(t) = A_i x_i(t) + f_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma x_j(t) - f_i(x_i(t)) - (A_i - B) \Lambda s(t) + \Lambda g(s(t)) - k_i e_i(t) - \Lambda (Bs(t) + g(s(t))) = A_i e_i(t) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma e_j(t) - k_i e_i(t) \quad i = 1, \dots, N$$

定义变量 $e = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T) \in R^{nN}$, 则得到紧凑格式:

$$D_*^q e(t) = Qe(t) + (C \otimes \Gamma)e(t) = (Q + C \otimes \Gamma)e(t) = Pe(t)$$

式中, $Q = \text{diag}(A_i - k_i I_n) (i = 1, 2, \dots, N)$

只要我们选取合适的反馈增益 k_i , 使得矩阵 P

的任意特征值满足 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2} (i = 1, \dots, nN)$ 成立, 根据分数阶系统的稳定性定理, 则可以实现分数阶网络的混合投影同步.

3 数值仿真

我们选分数阶超混沌 Chen 系统为网络目标节点:

$$\begin{cases} D_*^q s_1 = a(s_2 - s_1) + s_4 \\ D_*^q s_2 = ds_1 - s_1 s_3 + cs_2 \\ D_*^q s_3 = s_1 s_2 - bs_3 \\ D_*^q s_4 = s_2 s_4 + rs_4 \end{cases} \quad (12)$$

当 $q = 0.98, a = 35, b = 3, c = 12, d = 7, r = 0.5$, 系统(12)呈现超混沌吸引子, 如图 1 所示.

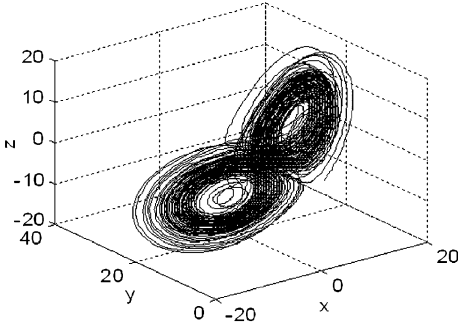


图1 分数阶超混沌 Chen 系统的吸引子

Fig.1 The attractor of Chen fractional - order hyper - chaotic system

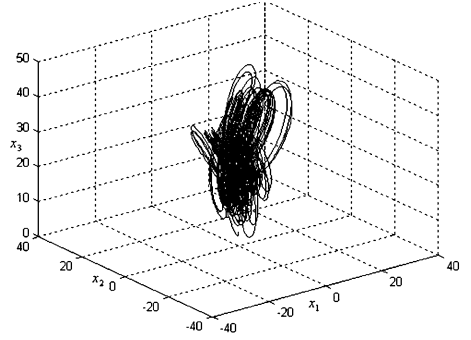


图3 分数阶超混沌 Lorenz 系统的混沌吸引子

Fig.3 The attractor of Lorenz fractional - order system

下面考虑一 10 个节点的分数阶复杂网络,前 5 个节点为一个新的超混沌分数阶系统,动力学方程为:

$$\begin{cases} D_*^q x = e(y - x) + fu \\ D_*^q y = hx - gxz + \theta u \\ D_*^q z = -dz + \beta xy \\ D_*^q u = -10y \end{cases} \quad (13)$$

参数取值为 $q = 0.98, e = 10, f = 15, h = 40, \theta = 10, d = 2.5$, 系统(13)产生超混沌吸引子,如图 2 所示.

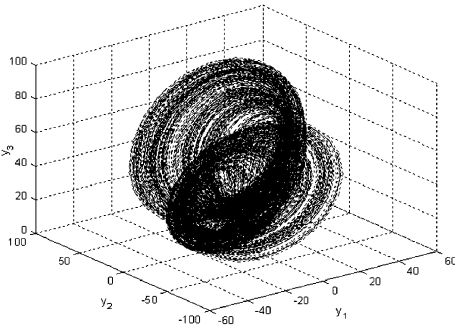


图2 分数阶超混沌新系统的吸引子

Fig.2 The attractor of the new fractional - order hyper - chaotic system

其余 5 个节点为分数阶超混沌 Lorenz 系统,如下描述

$$\begin{cases} D_*^q x_1 = a(y_1 - x_1) + u_1 \\ D_*^q y_1 = cx_1 - y_1 - x_1 z_1 \\ D_*^q z_1 = x_1 y_1 - bz_1 \\ D_*^q u_1 = -y_1 z_1 + ru_1 \end{cases} \quad (14)$$

当参数取值为 $q = 0.98, (a, b, c, r) = (10, 8/3, 28, -1)$, 系统(14)超混沌状态.

我们考虑 10 个节点的网络,则具有不同节点的分数阶动力学网络可以表示为下式:

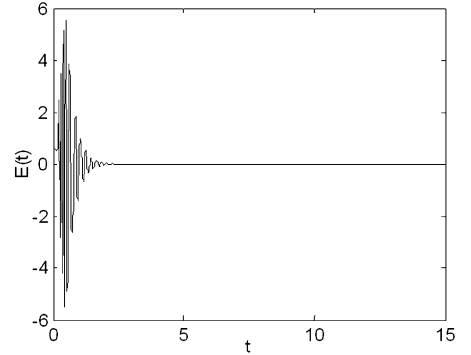


图4 同步误差随时间的变化历程, 当标度矩阵为 $\Lambda = \text{diag}(-1, 1, 1, -2)$

Fig.4 Time evolution of synchronization errors $E(t)$ with scaling matrix $\Lambda = \text{diag}(-1, 1, 1, -2)$

$$\begin{cases} D_*^q x_i(t) = F_1(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{10} c_{ij} \Gamma x_j(t) + u_i(t) \\ i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ D_*^q x_i(t) = F_1(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{10} c_{ij} \Gamma x_j(t) + u_i(t) \\ i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

为了数值仿真的简单起见,选取内部耦合矩阵为 $\Gamma = I_4$, 外部耦合矩阵任意选取为

$$C = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

定义 $e_{ij}(t) = x_{ij}(t) - \Lambda_j s_j(t) (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2,$

3,4),则网络系统状态变量均方误差:

$$E(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{ij}^2(t)/N}$$

状态变量的初始值分别选取在区间 $(-5, 5)$ 间任意选取,选取标度矩阵为对角阵,元素分别为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -2$,为了方便,我们固定阶数 $q = 0.98$,得误差随时间演化如图4所示:

4 结论

研究了分数阶复杂网络系统的混合投影同步问题,我们所讨论的分数阶复杂网络有更广泛的形式,即内部和外部耦合矩阵都不必要满足对角和可约简的条件,同时以分数阶混沌系统的稳定性理论为基础,设计合适的非线性控制器,实现了不同节点的分数阶复杂网络的混合投影同步,数值仿真进一步的说明了此方法的有效性.

参 考 文 献

- 1 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 1998, 393(6684): 440 ~ 442
- 2 Barabasi A L, Albert R. Emerging of scaling in random network. *Science*, 1992, 286: 509 ~ 512
- 3 张刚, 张伟. 复杂网络的脉冲同步. *动力学与控制学报*, 2009, 7(1): 1 ~ 4 (Zhang G, Zhang W. Impulsive syn-

chronization of complex networks. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(1): 1 ~ 4 (in Chinese)

- 4 尚磊, 郑永爱. 输出耦合的复杂网络自适应脉冲同步. *动力学与控制学报*, 2012, 10(1): 48 ~ 51 (Shang L, Zheng Y A. Adaptive impulsive synchronization of complex networks coupled with the outputs. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, 10(1): 48 ~ 51 (in Chinese)
- 5 Sun W, Chen S H, Guo W L. Adaptive global synchronization of a general complex dynamical network with non-delayed and delayed coupling. *Physics Letters A*, 2008, 372: 6340 ~ 6346
- 6 Tang Y, Wang Z, Fang J. Pinning control of fractional-order weighted complex networks. *Chaos*, 2009, 19(1): 1311 ~ 1321
- 7 Tang Y, Fang J. Synchronization of N-coupled fractional-order chaotic systems with ring connection. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010(2), 15: 401 ~ 412
- 8 Duan Z S, Chen G R, Huang L. Synchronization of weighted networks and complex synchronized regions. *Physics Letters A*, 2008, 372(21): 3741 ~ 3751
- 9 Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, In: *Computational engineering in systems and application multi-conference*. Lille: IMACS, IEEE-SMC Proceedings, 1996, 2: 963 ~ 968

HYBRID PROJECTIVE SYNCHRONIZATION OF FRACTIONAL-ORDER COMPLEX DYNAMICAL NETWORKS*

Yang Lixin[†] Jiang Jun

(State Key Laboratory for Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract This paper studied the hybrid projective synchronization (HPS) in fractional-order complex networks. By means of the stability theorem of fractional-order systems and nonlinear control idea, we proposed an appropriate nonlinear controller to achieve the synchronization for complex networks. The controller was designed to make the fractional-order complex dynamical networks with distinct nodes asymptotically synchronize onto any smooth goal dynamics. Moreover, the corresponding simulations agreed well with the theoretical results.

Key words fractional-order complex networks, hybrid projective synchronization, fractional-order hyperchaotic system, feedback control

Received 24 May 2013, revised 3 July 2014.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11172223)

[†] Corresponding author E-mail: y09311@163.com