

# Van der Pol 型自激单摆的张弛振荡特性\*

郑远广<sup>†</sup> 鲍丽娟

(南昌航空大学数学与信息科学学院, 南昌 330063)

**摘要** 含 van der Pol 型自激项的单摆系统是典型的自激机械系统, 本文研究了该系统的张弛振荡特性. 首先通过引入新的时间尺度和变量, 把原系统表示成标准的快慢系统. 然后基于几何奇异摄动理论, 求得系统的慢变流形及其结构, 从而证明了张弛振荡解的存在性, 并进一步求得了张弛振荡解及其周期的近似表达式. 理论结果表明, 发生张弛振荡时, 单摆快速通过其平衡位置, 而在远离平衡位置的一段区域上停留较长时间, 且存在两个分界点把快速运动和慢速运动分隔开. 数值算例证明了理论分析的正确性.

**关键词** 自激单摆, 张弛振荡, 奇异摄动, 慢变流形, 快慢系统

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-100

## 引言

自激振动是典型的非线性现象, 广泛地存在于自然界和工程系统中<sup>[1,2]</sup>. 在自激振动系统中, 其自身的阻尼不断消耗系统的能量, 要维持周期性振动, 系统需要从外界获得周期性的能量补充. 然而外界提供的只是恒定的能源, 系统必须通过自身特有的激发和反馈机制把这种恒定的能源转化成系统周期性的能量补充, 从而维持其周期性振动. 与自由振动和受迫振动相比, 自激振动系统有如下显著特点: 自激振动系统是耗散系统, 振动过程中存在能量的消耗和补充; 外界提供的能源是恒定的, 外界对系统补充的能量是受系统自身特有的激发和反馈机制控制, 因此系统是自治的; 自激振动的周期和振幅仅与系统自身的参数有关, 与初始条件无关.

自激振动常常对工程系统产生不利影响. 在机械加工过程中, 由于车刀与切屑之间的滑动摩擦力与其相对速度存在非线性关系, 这导致切削过程中会发生自激振动, 降低加工质量和效率<sup>[3]</sup>. 结冰输电线的横截面是非圆形的不规则形状, 在风力的作用下会产生与风速成非线性关系的阻力和升力, 在一定条件下会导致输电线产生自激振动, 称为输电线舞动, 这严重影响输电线的使用寿命<sup>[4]</sup>. 与此相

类似, 高层建筑和大型桥梁, 在风力作用下也会发生自激振动, 这可能会导致灾难性的后果. 在输水管道中, 由于水流与管道之间的非线性耦合作用, 也可以导致自激振动的发生, 从而影响流速和发出噪声<sup>[5]</sup>. 另一方面, 自激振动也存在有利的一面, 比如, 射流在煤矿开采、石油钻井、以及岩石切割等方面具有广泛应用, 可以利用流体自激振动原理来提高射流的速度, 从而提高其工作效率<sup>[6]</sup>.

在工程实践中, 为了消除有害的自激振动和利用有益的自激振动, 就必须研究自激振动现象的产生机制. van der Pol 光电系统是自激振动系统的原形, 其中的自激振动现象得到了广泛的研究<sup>[7,8]</sup>. 含 van der Pol 型自激项的单摆系统是典型的含自激励的机械系统, 对其自激振动现象进行研究有助于了解实际机械系统中自激振动的产生机制. 该 van der Pol 型自激单摆系统的平衡点是不稳定的, 当摆幅较小时, 系统从外界吸收能量增加摆幅, 而当摆幅较大时, 系统消耗能量抑制摆幅, 从而系统发生稳定的周期运动. 文献[9]的研究表明自激单摆系统存在丰富的动力学现象, 受到外界激励时, 可以发生混沌运动. 文献[10]考察了高频横向和纵向激励对自激单摆系统振动的影响, 发现横向的高频激励能有效抑制系统的自激振动, 然而在纵向激励下, 自激振动一直存在. 文献[11,12]讨论了

2013-04-29 收到第1稿, 2013-05-10 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11102078, 61104220), 江西省教育厅资助项目(GJJ1169)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: zyg20060601202@nuaa.edu.cn

时滞与高频激励联合作用对自激单摆系统振动的影响,发现加入时滞有利于抑制系统的自激振动.当阻尼值较大时,该自激单摆系统发生张弛振荡(relaxation oscillation),其中快速运动过程和慢速运动过程交替出现.张弛振荡现象首先是在 van der Pol 电路系统中发现的<sup>[7]</sup>,其后,人们发现张弛振荡现象广泛地存在于生态系统<sup>[13]</sup>、生理系统<sup>[14]</sup>、化学系统<sup>[15]</sup>等现实系统中.文献[13]运用几何方法研究了捕食与被捕食系统中的张弛振荡现象,得到系统发生张弛振荡的充分条件.文献[14]利用张弛振荡特性解释了心脏的电活动规律.文献[15]基于数值方法分析了化学系统中的振动现象,发现当参数变化时,系统由周期振动变为张弛振荡.

张弛振荡的存在性及其特性通常与系统的结构和参数有关,然而至今为止,对 van der Pol 型自激单摆的张弛振荡特性的研究工作还很少.基于这一事实,本文将考察含大阻尼的 van der Pol 型自激单摆的张弛振荡的存在性及其特性.在下一节首先介绍 van der Pol 型自激单摆的系统模型.接着在第三节讨论张弛振荡的存在性及其特性.在第四节进行数值算例分析.最后在第五节对全文进行总结.

## 1 系统模型

van der Pol 型自激单摆系统模型为

$$\frac{d^2 y(s)}{ds^2} - \alpha(1 - ky^2(s)) \frac{dy(s)}{ds} + h \sin y(s) = 0 \quad (1)$$

其中  $y \in (-\pi, \pi)$  变量表示单摆离开垂直位置的摆角,  $k$  和  $h$  是取值  $O(1)$  的系统参数,  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  为较大的阻尼系数,且  $0 < \varepsilon \ll 1$  为小参数.引入新的时间变量  $t = \frac{1}{\alpha}s$  和变量  $\frac{dx(t)}{dt} = -h \sin y(t)$ , 方程(1)变为

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{y}(t) = y(t) - \frac{k}{3}y^3(t) + x(t) \\ \dot{x}(t) = -h \sin y(t) \end{cases} \quad (2)$$

这里一点表示对时间  $t$  的导数.由于  $0 < \varepsilon \ll 1$  为小参数,  $y(t)$  变化速度比较快,称为快变量,而  $x(t)$  称为慢变量,方程(2)为典型的快-慢系统.若再引入时间变量  $\tilde{t} = \frac{1}{\varepsilon}t$ ,则方程(2)变为

$$\begin{cases} \dot{y}(\tilde{t}) = y(\tilde{t}) - \frac{k}{3}y^3(\tilde{t}) + x(\tilde{t}) \\ \dot{x}(\tilde{t}) = -\varepsilon h \sin y(\tilde{t}) \end{cases} \quad (3)$$

这里一点表示对时间  $\tilde{t}$  的导数.在方程(3)令  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,则得到仅关于快变量的快子系统

$$\dot{y}(\tilde{t}) = y(\tilde{t}) - \frac{k}{3}y^3(\tilde{t}) + x \quad (4)$$

其中变量  $x$  看成系统中的参数.

几何奇异摄动理论是分析快-慢系统动力学行为的有效工具<sup>[16,17]</sup>.该理论体系主要包括 Tikhonov 和 Fenichel 关于慢变流形和不变流形的存在性及其性质的系列定理<sup>[18-20]</sup>.Tikhonov 定理指出稳定的慢变流形对解轨线具有吸引性,而不稳定的慢变流形对解轨线具有排斥性.Fenichel 系列定理主要讨论了不变流形的存在性及其性质,指出慢变流形是不变流形的近似,并进一步描绘了在慢变流形附近的解轨线结构.几何奇异摄动理论表明快-慢系统的动力学行为与系统的慢变流形的结构紧密相关.因此,为求得系统的动力学行为,关键的步骤是要确定慢变流形的结构,包括其形状、稳定性、分岔点的类型和分布.

## 2 系统的张弛振荡特性

根据几何奇异摄动理论,系统(2)的慢变流形为

$$M = \left\{ (x, y) \mid x + y - \frac{k}{3}y^3 = 0 \right\} = \left\{ (x, y) \mid x = -y + \frac{k}{3}y^3 \right\} \quad (5)$$

可见慢变流形  $M$  就是快子系统(4)的奇点集合.对于  $0 < k = O(1)$ ,慢变流形为 S-形的曲线,见图1.为确定慢变流形  $M$  的结构,求得快子系统(4)在平衡点  $y = y(x)$  (其中  $y(x)$  满足  $x + y(x) - \frac{k}{3}y(x)^3 = 0$ ) 的唯一特征根为  $\lambda = 1 - ky^2$ .因此,根据快子系统(4)的平衡点的稳定性,慢变流形  $M$  可分成如下三部分

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ (x, y) \mid x + y - \frac{k}{3}y^3 = 0, y > \sqrt{k^{-1}} \right\} \\ M_2 &= \left\{ (x, y) \mid x + y - \frac{k}{3}y^3 = 0, -\sqrt{k^{-1}}y < \sqrt{k^{-1}} \right\} \\ M_3 &= \left\{ (x, y) \mid x + y - \frac{k}{3}y^3 = 0, y < -\sqrt{k^{-1}} \right\} \end{aligned}$$

见图 1, 上下粗线为稳定的慢变流形部分  $M_1$  和  $M_3$ , 中间的虚线为不稳定的慢变流形部分  $M_2$ , 点

$$S_1 = (x = -\frac{2}{3}\sqrt{k^{-1}}, y = \sqrt{k^{-1}})$$

和

$$S_2 = (x = \frac{2}{3}\sqrt{k^{-1}}, y = -\sqrt{k^{-1}})$$

是慢变流形上的两个 Saddle-node 分岔点.

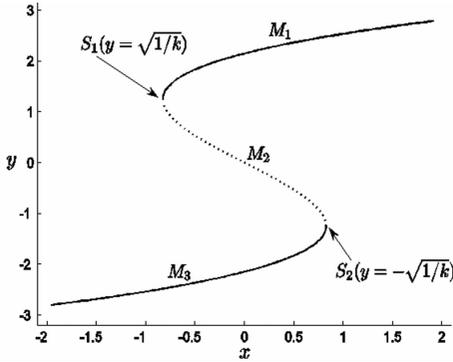


图 1 慢变流形  $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$  的结构, 其中  $M_1 \cup M_3$  和  $M_2$  分别为稳定和不安定的慢变流形部分,  $S_1$  和  $S_2$  是 Saddle-node 分岔点

Fig. 1 The structure of slow manifold  $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ , where  $M_1 \cup M_3$  and  $M_2$  are the stable and unstable slow manifold,  $S_1$  and  $S_2$  are Saddle-node bifurcation points

得到了系统慢变流形的结构后, 就可以运用几何奇异摄动理论分析系统的动力学行为. 根据几何奇异摄动理论, 稳定的慢变流形  $M_1 \cup M_3$  对解轨线具有吸引力, 当解轨线被吸引到稳定的慢变流形上时, 由于  $\dot{y}(t) \approx 0$ , 因此解轨线将沿着慢变流形缓慢地运动. 当解轨线被吸引到上半部分的慢变流形  $M_1$  上时, 由于  $y(t) \in M_1$  时有  $\dot{x} = -hsiny(t) < 0$ , 所以解轨线自右向左运动. 当解轨线到达鞍结分岔点  $S_1$  时, 解轨线离开不稳定的慢变流形  $M_2$ , 而被吸引到下半部分稳定的慢变流形  $M_3$  上, 这时有  $\dot{x}(t) > 0$ , 所以轨线自左向右运动. 当解轨线到达鞍结分岔点  $S_2$  时, 又被吸引到上半部分的慢变流形  $M_1$  上, 见图 2(a). 由此系统发生张弛振荡, 见图 2(b).

对于大阻尼系数  $\alpha$ , 有  $0 < \varepsilon = \frac{1}{\alpha^2} \ll 1$ . 从系统 (2) 的第一个方程可以看到, 当解轨线不在慢变流形上时, 有  $\dot{y}(t) = O(\frac{1}{\varepsilon} \ll 1)$ , 因此, 张弛振荡的快速运动过程将在瞬间完成. 张弛振荡的慢速运动过程经过的慢变流形部分为

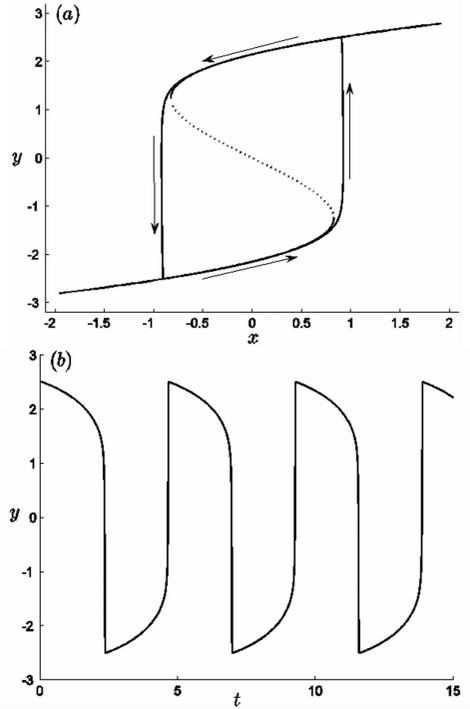


图 2 系统 (3) 的张弛振荡, (a) 解轨线, (b) 时间历程图  
Fig. 2 Relaxation oscillation of system (3), (a) Solution trajectory, (b) Time series

$$\left\{ (x, y) \mid x + y - \frac{k}{3}y^3 = 0, \sqrt{k^{-1}} < y < Y^* \right\}$$

和

$$\left\{ (x, y) \mid x + y - \frac{k}{3}y^3 = 0, -Y^* < y < -\sqrt{k^{-1}} \right\}$$

这里  $Y^* > 0$  满足方程

$$\frac{2}{3}\sqrt{k^{-1}} = -Y^* + \frac{k}{3}Y^{*3}$$

从而可以求得张弛振荡解轨线的近似表达式为

$$\begin{cases} x = -y + \frac{k}{3}y^3 & y \in (Y^*, \sqrt{k^{-1}}] \\ x = -\frac{2}{3}\sqrt{k^{-1}} & y \in (\sqrt{k^{-1}}, -Y^*] \\ x = -y + \frac{k}{3}y^3 & y \in (-Y^*, -\sqrt{k^{-1}}] \\ x = \frac{2}{3}\sqrt{k^{-1}} & y \in (-\sqrt{k^{-1}}, Y^*] \end{cases} \quad (6)$$

从解轨线的近似表达式可以看到, 解轨线的形状与慢变流形的形状相关, 仅由参数  $k$  的值决定.

由于张弛振荡的快速运动过程在瞬间完成, 所以张弛振荡的周期主要由慢速运动过程所需要的时间决定. 把  $x = -y + \frac{k}{3}y^3$  代入系统 (2) 的第二个方程得

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{h} \frac{1 - ky^2}{\sin y}$$

因此,张弛振荡的周期为

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{h} \frac{1 - ky^2}{\sin y} \quad (7)$$

由周期的近似表达式可见,其周期  $T$  与参数  $k$  和  $h$  相关,且是  $h$  的递减函数。

总结以上分析,可以得到如下结论

结论 1: 对于大阻尼  $\alpha$  和参数  $0 < k = O(1)$ , 系统发生张弛振荡运动;张弛振荡轨线的近似表达式为(6)式,其形状仅与参数  $k$  相关;张弛振荡周期的近似表达式为(7)式,其与参数  $k$  和  $h$  相关,且是  $h$  的递减函数。

依据以上理论分析结果,可以得到 van der Pol 型自激单摆的运动特性如图 3 所示。

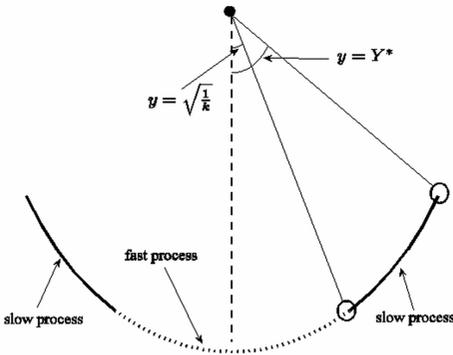


图 3 van der Pol 型自激单摆的运动特性,  $y$  表示摆角

Fig. 3 Dynamics of the pendulum with van der Pol type self-excitation, where  $y$  represents the angle of the pendulum

从图 3 可见,当摆角  $y$  在区域  $(-Y^*, -\sqrt{k^{-1}})$  和  $(\sqrt{k^{-1}}, Y^*)$  时,摆球缓慢运动;而摆球快速通过区域  $(-\sqrt{k^{-1}}, \sqrt{k^{-1}})$ ;点  $y = -\sqrt{k^{-1}}$  和  $y = \sqrt{k^{-1}}$  为快速运动和慢速运动的分界点。

### 3 算例分析

为进一步了解张弛振荡解的特性和验证理论分析的正确性,本节进行算例分析.取大阻尼值  $\alpha = 30$  和常用的参数值  $k = 0.75, h = 1$ ,则方程(2)为

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = 30^2 [y(t) - 0.25y^3(t) + x(t)] \\ \dot{x}(t) = -\sin y(t) \end{cases} \quad (8)$$

系统的慢变流形为

$$M = \{ (x, y) | x + y - 0.25y^3 = 0 \}$$

由于  $k = 0.75 > 0$ ,慢变流形  $M$  为 S-形曲线,根据结论 1 可知系统发生张弛振荡,这与数值结果相

符,见图 4,这里数值结果是在 MATLAB 中用刚性方程积分器 ODE23S 算得的,其中  $RelTol = 1e - 10$  和  $AbsTol = 1e - 8$ .

通过方程  $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{0.75}} = -Y^* + \frac{0.75}{3}Y^{*3}$  求得  $Y^* = 2.3094 > 0$ ,由式(6)求得张弛振荡的近似表达式为

$$\begin{cases} x = -y + 0.25y^3 & y \in (2.3094, \frac{2}{3}\sqrt{3}] \\ x = -\frac{4}{9}\sqrt{3} & y \in (\frac{2}{3}\sqrt{3}, -2.3094] \\ x = -y + 0.25y^3 & y \in (-2.3094, -\frac{2}{3}\sqrt{3}] \\ x = \frac{4}{9}\sqrt{3} & y \in (-\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2.3094] \end{cases} \quad (9)$$

此近似表达式与数值结果相吻合,见图 4(a).

由式(7)求得张弛振荡的周期为

$$T = 2 \int_{2.3094}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}} \frac{1 - 0.75y^2}{\sin y} dy = 3.1701 \quad (10)$$

理论值与数值结果相吻合,见图 4(b).

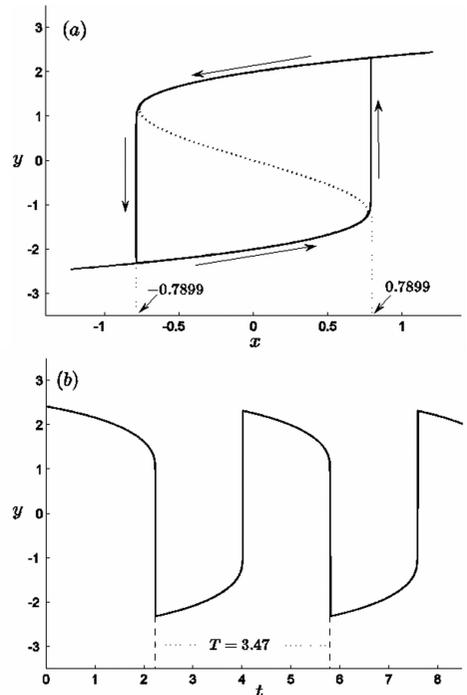


图 4 系统(8)的张弛振荡,(a)解轨线,(b)时间历程图

Fig. 4 Relaxation oscillation of system (8), (a) Solution trajectory, (b) Time series

### 4 结论

自激振动对机械系统的性能具有重要影响,研

究机械系统中的自激振动机制有助于消除有害的自激振动而利用有益的自激振动. van der Pol 型自激单摆系统是典型的含自激励的机械系统, 本文阐述了其中张弛振荡的产生机制, 并给出了张弛振荡解的近似表达式. 研究表明当系统发生张弛振荡时, 单摆快速通过平衡位置, 而在远离平衡位置的一段区域上停留较长时间. 本文的研究结果可以在一定程度上说明一般的自激机械系统中张弛振荡的产生机制, 可以为工程实践提供一定的理论指导.

## 参 考 文 献

- 1 Van der Pol B. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance (reception with reactive triode). *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Series 7*, 1927, 3: 65 ~ 80
- 2 贾启芬, 于雯, 刘习军等. 多自由度分段光滑非线性系统的近似解-中华文物龙洗的自激振动. *力学学报*, 2004, 36(3): 373 ~ 378 (Jia Q F, Yu W, Liu X J, Wang D J. Approximate analytical solution of the piecewise-smooth nonlinear systems of multi-degrees-of-freedom-The self-excited vibration of the chinese cultural relic dragon washbasin. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(3): 373 ~ 378 (in Chinese))
- 3 Stepan G, Szalai R, Mann B P, et al. Nonlinear dynamics of high-speed milling, analyses, numerics and experiments. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2005, 127(2): 179 ~ 203
- 4 蒋扇英, 徐鉴. 奇异摄动方法在输电线非线性振动问题中的应用. *力学季刊*, 2009, 30(1): 33 ~ 38 (Jiang S Y, Xu J. Singular perturbation method and its application in nonlinear systems with fast and slow variables coupling. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2009, 30(1): 33 ~ 38 (in Chinese))
- 5 Brika D, Laneville A. Vortex-induced vibrations of a long flexible circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, 250(4): 481 ~ 508
- 6 王萍辉, 马飞. 自激振动空化射流振动分析试验. *机械工程学报*, 2009, 45(10): 89 ~ 95 (Wang P H, Ma F. Vibration analysis experiment of self-resonating cavitating water jet. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, 45(10): 89 ~ 95 (in Chinese))
- 7 Van der Pol B. On "relaxation-oscillations". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Series 7*, 1926, 2: 978 ~ 992
- 8 萧寒, 尹小波. 多自由度 van der Pol 型系统振幅增大控制. *动力学与控制学报*, 2008, 6(1): 32 ~ 34 (Xiao H, Yin X B. Enlarging amplitude control of van der Pol type with multidegree of freedom system. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(1): 32 ~ 34 (in Chinese))
- 9 Ambika G, Babu Joseph K. Transition to chaos in a driven pendulum with nonlinear dissipation. *Pramana Journal of Physics*, 1988, 31(1): 1 ~ 8
- 10 Bourkha R, Belhaq M. Effect of fast harmonic excitation on a self-excited motion in Van der Pol oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 34(2): 621 ~ 627
- 11 Belhaq M, Sah S M. Horizontal fast excitation in delayed van der Pol oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, 13(8): 1706 ~ 1713
- 12 Sah S M, Belhaq M. Effect of vertical high-frequency parametric excitation on self-excited motion in a delayed van der Pol oscillator. *Chaos, Soliton & Fractals*, 2008, 37(5): 1489 ~ 1496
- 13 Liu W S, Xiao D M, Yi Y F. Relaxation oscillations in a class of predator - prey Systems. *Journal of Differential Equations*, 2003, 188(1): 306 ~ 331
- 14 Van der Pol B, Van der Mark J. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Ser. 7*, 1928, 6: 763 ~ 775
- 15 Chumakov G A, Chumakova N A. Relaxation oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards. *Chemical Engineering Journal*, 2003, 91(2-3): 151 ~ 158
- 16 Verhulst F. Singular perturbation methods for slow-fast dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 50(4): 747 ~ 753
- 17 郑远广, 王在华. 含时滞快-慢系统的若干动力学问题. *力学进展*, 2011, 41(4): 400 ~ 410 (Zheng Y G, Wang Z H. Advances in dynamics of slow-fast systems with time delay. *Advances in Mechanics*, 2011, 41(4): 400 ~ 410 (in Chinese))
- 18 Tikhonov A N. Systems of differential equations containing a small parameter multiplying the derivative. *Matematicheskii Sbornik*, 1952, 31(73): 575 ~ 586
- 19 Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 1979, 31(1): 53 ~ 98
- 20 Jones C K R T. Geometric singular perturbation theory in

dynamical systems. Berlin: Springer-verlag, 1994

## RELAXATION OSCILLATION OF PENDULUM WITH VAN DER POL TYPE SELF-EXCITATION \*

Zheng Yuanguang<sup>†</sup> Bao Lijuan

(School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

**Abstract** The pendulum system with van der Pol type self-excitation is one typical self-excited mechanic system, and this paper studied the relaxation oscillation of the pendulum system. Firstly, the new time-scale and variable were introduced, so the pendulum system was described with standard slow-fast system. And then, on the basis of the geometric singular perturbation theory, the slow manifold and its structure of the system were obtained, and the relaxation oscillation was proved. Moreover, the expression of the relaxation oscillation and its period were obtained approximately. The analytical results indicate that, when the system undergoes relaxation oscillation, the pendulum passes through equilibrium position rapidly, and stays in the regions far away from the equilibrium position for a long time, and there are two break points which separate the fast dynamics from the slow dynamics. Numerical studies validate the analytical results.

**Key words** self-excited pendulum, relaxation oscillation, singular perturbation, slow manifold, slow-fast system

---

Received 29 April 2013, revised 10 May 2013.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11102078, 61104220) and Foundation of JiangXi Educational Committee, China (GJJ1169)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: zyg20060601202@nuaa.edu.cn