

旋转圆盘上可变摆长的单摆的分岔问题分析*

赵翔[†] 李映辉

(西南交通大学力学与工程学院, 成都 610031)

摘要 讨论了旋转圆盘上可变摆长单摆模型的静态分岔问题. 本文中提出的简化模型对于分析此类工程实际问题的静态分岔现象十分方便. 简化模型中考虑了绳子弹性变形所引起的绳长的变化, 并将绳子的轴向变形视为弹簧模型. 文中采用 Lagrange 方程对系统进行动力学建模, 计算出了系统的动能以及势能. 随后采用奇异性理论方法, 计算了系统平衡点的分岔情况, 给出了它的范式. 本文做了一些数值算例, 用以说明理论的正确性.

关键词 平衡点, 分岔, 转速, Lagrange 方程, 铰接

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-085

引言

起重机是在土木工程中经常用到的一种十分重要的工程机械, 针对起重机的研究也经久未衰. 随着科学技术的进步, 起重机的类型用途也逐渐多样化, 常见的有, 桥式起重机, 悬臂式起重机等, 针对不同的起重机, 根据其承载能力, 其用途也不同. 对起重机的研究, 主要对起重机的安全性和动力学特性的研究较多. 邓伟^[1] 等对起重机电机的安全性以及事故原因做了分析; 李金平等^[2] 对起重机的桁架臂压弯构件稳定性做了分析; 郑清春等^[3] 利用 MSC 开发的软件 Working model 对吊车机构进行了动力学分析以及强度分析; 近年来, 王忠等^[4] 针对动臂式塔式起重机的平衡臂, 用 Ansys 进行了优化调整. 虽然, 已经不少人利用各种不同的模型来研究起重机, 但是, 对于其非线性动力学的研究却很少见到. 本文中的物理模型主要用于分析悬臂式起重机吊取重物旋转过程中出现的一些非线性动力学现象进行分析, 为此目的, 本文对起重机吊取重物旋转的物理模型做了一定简化处理.

一直以来, 非线性问题都是人们关注的重点, 非线性系统有很多特有的现象如: 极限环、分岔、混沌等, 这不仅使得研究的难度增大, 无法直接采

用传统的线性系统理论, 也使得研究的手段多样化. 随着实际问题中非线性问题^[5-7] 不断增多以及数学本身的发展, 求解非线性问题的方法不断涌现, 分岔理论作为研究非线性方程解的性态的数学理论是其中的重大进展之一. 特别是高维系统的分岔问题, 为了转化为较低维系统的分岔, 前人提到了很多经典的降维方法^[8-9], 比如中心流形方法, Lyapunov-Schmidt (L-S) 方法, 非线性 Galerkin 方法和本征正交分解技术 (proper orthogonal decomposition, POD) 等.

近年来, Dantas et al^[10] 应用中心流形研究了门形杆架结构的自由振动, 在平衡点附近得出了有关稳定和分岔的一些结果; 陈晓等^[11] 利用 L-S 方法对层合板在面内载荷作用下的非线性稳定性控制方程进行了约化, 并获得了 3 种典型的分岔图; Matthies^[12] 应用 Galerkin 方法对风力机有限元模型进行降维, 得到了较高精度的解.

本文中物理模型的动力学方程是一个二维系统, 针对这个系统本文中提出了一种新的降维方法, 该方法解决了经典方法由于隐函数的原因所不能解决的降维问题, 并对所得系统进行了数值验证. 随后, 推导了系统产生分岔的条件以及范式. 最后对于两个系统的分岔进行了数值对比和验证.

2013-05-27 收到第 1 稿, 2013-05-30 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11072204)和中央高校业务费(SWJTU11ZT15)资助项目

[†] 通讯作者 E-mail: zhaoxiang_swjtu@hotmail.com

1 简化模型的动力学方程

本文所研究的模型见图1,其中小球可沿杆移动,且杆AB与圆盘的连接点为铰接,即杆AB只能在一个平面内来回摆动.圆盘绕着O点转动,且O点也为铰接.已知直杆AB与圆盘的中心O点的间距为 r_0 ,直杆上弹簧的静平衡位置到A点的距离为 l ,圆盘的转速为 ω ,小球的质量为 m ,弹簧的刚度为 k .

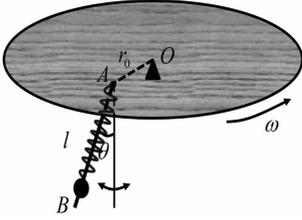


图1 物理模型

Fig. 1 Physical model

本文用Lagrange方程来得到系统的动力学方程,首先计算系统的动能和势能,即 T 和 V 如下,

$$T = \frac{1}{2}m \cdot [(r_0 + l\sin\theta)^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2] \quad (1)$$

$$V = mg(l+x)(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2 \quad (2)$$

由公式 $L = T - V$,得到Lagrange函数,将Lagrange函数代入Lagrange方程中得到系统的动力学方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} - mg\cos\theta + kx + mg = 0 \\ ml^2\ddot{\theta} - ml\omega^2 r_0 \cos\theta + mg(l+x)\sin\theta - \\ \frac{1}{2}ml^2\omega^2 \sin 2\theta = 0 \end{cases} \quad (3)$$

进一步化简得到

$$m\ddot{x} + kx = -mg(1 - \cos\theta) \quad (4a)$$

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta} - ml\omega^2 r_0 \cos\theta + mg(l+x)\sin\theta - \\ \frac{1}{2}ml^2\omega^2 \sin 2\theta = 0 \end{cases} \quad (4b)$$

总之,本小节通过Lagrange方程得到系统的动力学方程(4).在下一节中,为了便于用奇异性理论来分析系统的分岔行为,得到系统的分岔条件,本文将采用一种特殊的方法来把系统降维,从而为进一步的分析打基础.

2 动力学方程的降维处理

由于摆角 θ 是随时间变化的,故可设 $\theta = \omega_1 t$,

其中 $\omega_1 = d\theta/dt$.所以,(4a)变为

$$m\ddot{x} + kx = -mg(1 - \cos\omega_1 t) \quad (5)$$

由杜哈梅积分公式,可以求得(5)式的响应,这里设 $(\omega_0)^2 = k/m$,是弹簧的固有频率,具体来说,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t F(\tau) \sin\omega_0(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t -mg(1 - \cos\omega_1\tau) \sin\omega_0(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{g}{\omega_0} \left[\int_0^t \cos\omega_1\tau \sin\omega_0(t - \tau) d\tau - \int_0^t \sin\omega_0(t - \tau) d\tau \right] \\ &= \frac{g}{\omega_0} [I_1 - I_2] \end{aligned} \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t \cos\omega_1\tau \sin\omega_0(t - \tau) d\tau, \\ I_2 &= \int_0^t \sin\omega_0(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

进一步积分(7)可以得到,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\omega_0(\cos\omega_1 t - \cos\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_1^2}, \\ I_2 &= \frac{1 - \cos\omega_0 t}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

将(8)代入(6),又由于 $\omega_1 = d\theta/dt$,故得到方程(5)的解为

$$x(t) = \frac{g\omega_0^2 \cos\theta - g\omega_0^2 + g\dot{\theta}^2 - g\beta(t)\dot{\theta}^2}{(\omega_0^2 - \dot{\theta}^2)\omega_0^2} \quad (9)$$

这里, $\beta(t) = \cos\omega_1 t$.

将(9)代入(4b)中得到,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}\omega_0^2 - \frac{\omega^2\omega_0^2 r_0}{l} \cos\theta + \left(\frac{g^2}{2l^2} - \frac{\omega^2\omega_0^2}{2}\right) \sin 2\theta + \\ \left(\frac{g\omega_0^2}{l} - \frac{g^2}{l^2}\right) \sin\theta - F(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} F(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) &= \dot{\theta}^2 \left\{ \ddot{\theta} - \frac{\omega^2 r_0}{l} \cos\theta - \frac{\omega^2}{2} \sin 2\theta + \right. \\ &\left. \left[\frac{g}{l} - \frac{g^2}{l^2\omega_0^2} (1 - \beta) \right] \sin\theta \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

由于, $F(\theta, d\theta/dt, d^2\theta/dt^2)$ 是高阶非线性项,对系统的响应影响较小,故可以忽略.因此得到对原系统(4)的降维后的系统如下,

$$\ddot{\theta} - \frac{\omega^2 r_0}{l} \cos\theta + \left(\frac{g^2}{2l^2\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{2}\right) \sin 2\theta +$$

$$\left(\frac{g}{l} - \frac{g^2}{l^2 \omega_0^2}\right) \sin\theta = 0 \tag{12}$$

在下一节, 本文将对降维系统的合理性进行一个数值验证, 说明, 去掉(10)中的高阶非线性项对于系统的影响是比较小的.

3 简化后模型的数值验证

为了进一步验证本文第三部分得到的结果, 本节中将做两个数值算例, 以证明降维以及去掉高阶非线性项后得到的系统和原系统的区别不大. 本节中用到的参数如下

第一组参数:

$$l = 1.5\text{m}, m = 2\text{kg}, r_0 = 0.25\text{m},$$

$$\omega_0 = 20\text{Hz}, \omega = 3\text{r/s}$$

在该组参数下, 得到的积分解如下, 图中分别是两个系统的时间历程图和相图,

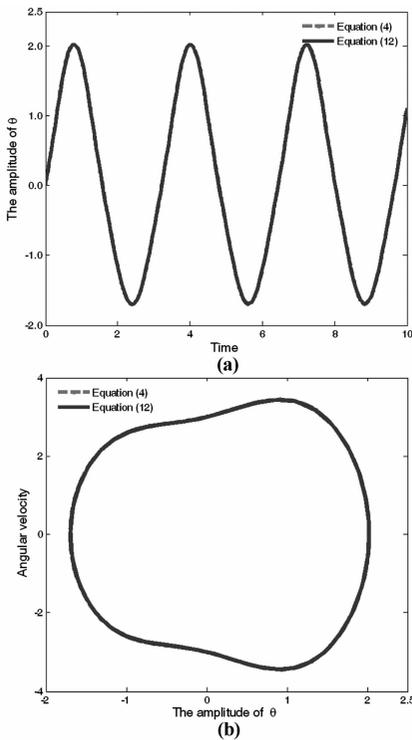


图2 第一组数据的时间历程图和相图

Fig. 2 The time history diagram and phase diagram of the first data group

第二组参数:

$$l = 1.5\text{m}, m = 2\text{kg}, r_0 = 0.25\text{m},$$

$$\omega_0 = 20\text{Hz}, \omega = 5\text{r/s}$$

在该组参数下, 得到的积分解如图3所示,

第三组参数:

$$l = 2.5\text{m}, m = 2\text{kg}, r_0 = 0.5\text{m},$$

$$\omega_0 = 10\text{Hz}, \omega = 15\text{r/s}$$

在该组参数下, 得到的积分解如图4所示,

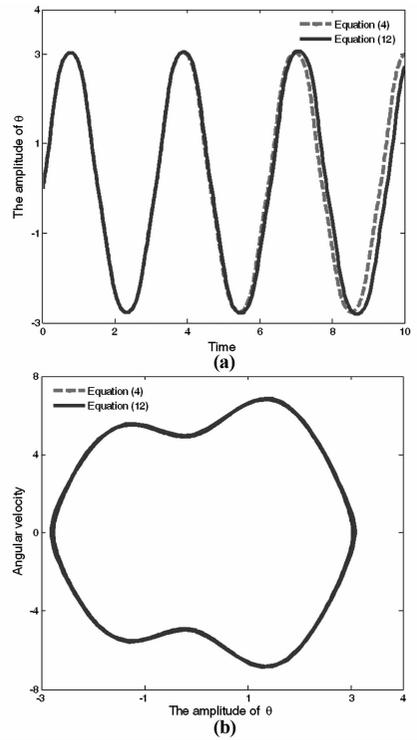


图3 第二组数据的时间历程图和相图

Fig. 3 The time history diagram and phase diagram of the second data group

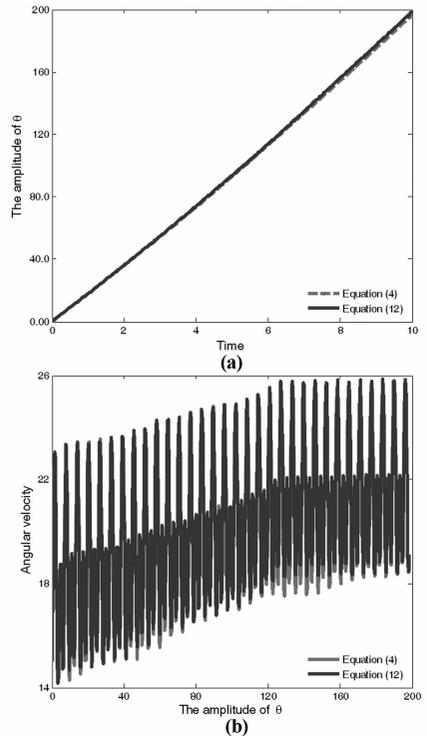


图4 第三组数据的时间历程图和相图

Fig. 4 The time history diagram and phase diagram of the third data group

经过上面几组数据的积分解验证,可知降维后的系统与原系统的解在幅值、频率和性态上基本一样,因此说明用上述方法降维后的解很大程度上保留了原系统的特性,是合理的.下一节中,本文将推导降维系统的分岔条件并求其范式.

4 分岔条件及范式的推导

对于系统方程(12),其平衡点所满足的方程为

$$F(\theta) = \left(\frac{g}{l} - \frac{g^2}{l^2\omega_0^2}\right)\sin\theta - \frac{\omega^2 r_0}{l}\cos\theta + \left(\frac{g^2}{2l^2\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{2}\right)\sin 2\theta = 0 \quad (13)$$

为了推导其分岔条件,需要求解 $F(\theta)$ 的各阶导数如下,

$$F_\theta = \left(\frac{g}{l} - \frac{g^2}{l^2\omega_0^2}\right)\cos\theta + \frac{\omega^2 r_0}{l}\sin\theta + \left(\frac{g^2}{l^2\omega_0^2} - \omega^2\right)\cos 2\theta, \quad (14a)$$

$$F_{\theta\theta} = -\left(\frac{g}{l} - \frac{g^2}{l^2\omega_0^2}\right)\sin\theta + \frac{\omega^2 r_0}{l}\cos\theta - 2\left(\frac{g^2}{l^2\omega_0^2} - \omega^2\right)\sin 2\theta, \quad (14b)$$

$$F_{\theta\theta\theta} = -\left(\frac{g}{l} - \frac{g^2}{l^2\omega_0^2}\right)\cos\theta - \frac{\omega^2 r_0}{l}\sin\theta - 4\left(\frac{g^2}{l^2\omega_0^2} - \omega^2\right)\cos 2\theta. \quad (14c)$$

由(13)可知,当 $\theta=0$ 以及 $r_0=0$ 时,满足平衡点方程(13),而且 $F_{\theta\theta}=0$. 在满足平衡点方程的条件下,

$$F_\theta = \frac{g}{l} - \omega^2, \quad (15a)$$

$$F_{\theta\theta\theta} = 4\omega^2 - \frac{g}{l} - \frac{3g^2}{l^2\omega_0^2}. \quad (15b)$$

由奇异性理论可知,系统产生分岔的条件为 $F_\theta=0$, 根据文献[13]进一步可知,系统产生树枝形分岔的条件为 $F_\theta=0$ 和 $F_{\theta\theta\theta}\neq 0$, 即,

$$\omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega^2 \neq \frac{g}{4l} - \frac{3g^2}{4l^2\omega_0^2}. \quad (16)$$

以下利用上述条件推导树枝形分岔的范式,首先,将 $F(\theta)$ 的表达式在 $\theta=0$ 处展开成 Taylor 级数,

$$F(\theta) = F(0) + F_\theta(0)\theta + \frac{1}{2}F_{\theta\theta}(0)\theta^2 + \frac{1}{6}F_{\theta\theta\theta}(0)\theta^3 \quad (17)$$

由于在 $\theta=0$ 和 $r_0=0$ 的条件下, $F(0) = F_{\theta\theta}(0) = 0$, 因此,

$$F(\theta) = F_\theta(0)\theta + \frac{1}{6}F_{\theta\theta\theta}(0)\theta^3 \quad (18)$$

由于转速 ω 和弹簧振动频率 ω_0 对于系统平衡点的分岔特性有影响,为讨论该分岔点附近系统平衡点的变化情况,今将 ω 和 ω_0 在极限点附近的变化情况表示为,

$$\omega = \bar{\omega} + \varepsilon, \quad \omega_0 = \bar{\omega}_0 + \varepsilon_0. \quad (19)$$

将(19)代入 $F_\theta(0)$ 和 $F_{\theta\theta\theta}(0)$ 的表达式(15)中,可得,

$$F_\theta(0) = \frac{g}{l} - (\bar{\omega} + \varepsilon)^2, \quad F_{\theta\theta\theta}(0) = 4(\bar{\omega} + \varepsilon)^2 - \frac{g}{l} - \frac{3g^2}{l^2(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_0)^2}. \quad (20)$$

将(20)代入(18)中得到,

$$F(\theta) = \left(\frac{g}{l} - \mu\right)\theta + \frac{1}{6}(4\mu - \frac{g}{l} - \alpha)\theta^3 \quad (21)$$

其中,

$$\mu = \bar{\omega}^2 - 2\bar{\omega}\varepsilon, \quad \alpha = \frac{3g^2}{l^2\bar{\omega}_0^2 + 2l^2\bar{\omega}_0\varepsilon_0} \quad (22)$$

在(20)中, μ 为分岔参数, α 为开折参数.

为证实降维系统(12)的分岔条件和范式也是适用于原系统(4),在下一节中将对比两者的分岔图特性,以进一步说明(12)的可靠性.

5 两个系统分岔的数值对比

本节中将对原系统(4)以及其降维后的系统(12)的分岔情况做一个对比.为此先取参数如下,

$$l = 1.5\text{m}, \quad m = 2\text{kg},$$

$$r_0 = 0.25\text{m}, \quad \omega_0 = 20\text{Hz}$$

图5给出的就是降维系统和原系统的分岔图,由图5可见,降维系统的分岔与原系统的分岔是极为相似的,很大程度上保留了原系统的解得性态的信息,因此,可以断定,在第五节中所提出的系统出现分岔的条件和范式也是适用于原系统的.但是,由于原系统毕竟是一个二维系统,降维后所得到的系统虽然是保留了大部分关于解 θ 的信息,也丢失了另一个解的性态的信息,关于另一个解的分岔也可以通过数值积分以及庞加莱截面法得到,如图6所示.

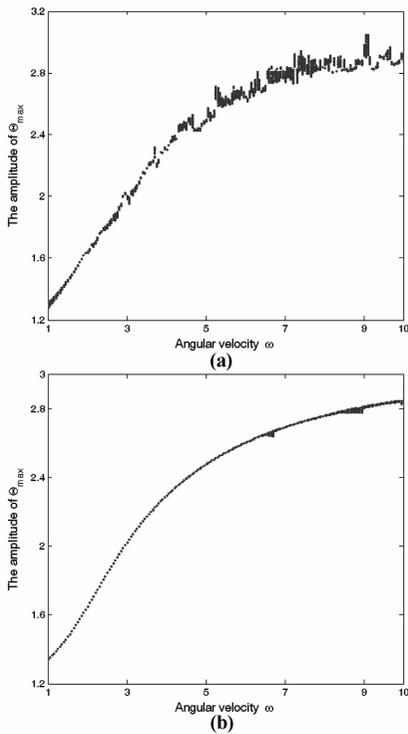


图5 (a)代表降维系统(12)的分岔图,
(b)代表原系统(4)的分岔图

Fig. 5 (a) The bifurcation of equation (12),
(b) The bifurcation of equation (4)

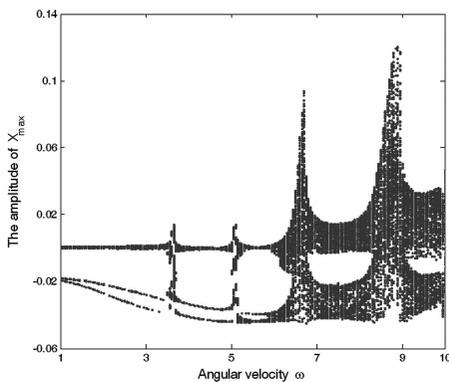


图6 原系统另一个解的分岔图

Fig. 6 Another bifurcation of equation (4)

6 结论

本文研究了简化物理模型的静态分岔问题,先用 Lagrange 方程对系统进行了动力学建模,得到了系统的动力学方程.随后,为了便于分析系统的分岔条件和推导其范式,本文对原系统进行了降维处理,这里采用的方法方便的解决也用经典 L-S 方法和中心流形方法所不能解决的问题.随后用数值积分的方法对原系统和降维后的系统进行了数值验证,进一步证实了方法的合理性.接着,本文推导

了降维系统的分岔条件和范式,并对其进行了数值验证.

参 考 文 献

- 邓伟,张翔. 桥式起重机大车电机频繁烧毁原因分析及处理. 电机与控制应用, 2012, 39(9): 48 ~ 50 (Deng W, Zhang X. Bridge crane electrical frequently burned cause analysis and treatment. *Electric Machines & Control Application*, 2012, 39(9): 48 ~ 50 (in Chinese))
- 李金平,王建明,焦生杰等. 基于响应面法的履带起重机桁架臂压弯构件稳定性的可靠性分析. 机械科学与技术, 2012, 31(12): 1959 ~ 1962 (Li J P, Wang J M, Jiao Y F, et al. Reliability analysis of stability for compressive-bending member of crawler crane's boom based on response surface method. *Mechanical Science and Technology*, 2012, 31(12): 1959 ~ 1962 (in Chinese))
- 郑清春,朱培浩,薄同伟等. 基于 Working model 自卸汽车举升机构的动力学分析与研究. 现代制造技术与装备, 2008, 185(4): 70 ~ 71, 74 (Zheng Q C, Zhu P H, Buo T W, et al. Analysis and research to dynamics of the dump truck lifts of machine based on working model. *Modern Manufacturing Technology and Equipment*, 2008, 185(4): 70 ~ 71, 74 (in Chinese))
- 王忠,许志沛,王璋等. 动臂型塔式起重机的平衡臂结构优化研究. 机械设计与制造, 2012, 9: 151 ~ 153 (Wang Z, Xu Z P, Wang Z, et al. Structural optimization research for centralizer arm of the luffing type tower crane. *Machinery Design & Manufacture*, 2012, 9: 151 ~ 153 (in Chinese))
- 商泽进,王忠民. 形状记忆合金弹簧振子的非线性自由振动. 西安理工大学学报, 2009, 4: 441 ~ 447 (Shang Z J, Wang Z M. Nonlinear free vibration of the shape memory alloy spring oscillator. *Journal of Xi'an University of Technology*, 2009, 4: 441 ~ 447 (in Chinese))
- 丁虎,陈立群,张国策. 轴向运动梁横向非线性振动模型研究进展. 动力学与控制学报, 2013, 11(1): 20 ~ 30 (Ding H, Chen L Q, Zhang G C. Advances in nonlinear models for transverse vibration of axially moving beams. *Journal of Dynamics and Control*, 2013, 11(1): 20 ~ 30 (in Chinese))
- 罗璇,靳艳飞. 半车非线性悬架的非平稳随机振动及控制. 动力学与控制学报, 2013, 11(1): 70 ~ 76 (Luo X, Zhan Y F. Nonstationary random vibration and optimal active control of a half car nonlinear suspension. *Journal of*

- Dynamics and Control*, 2013, 11 (1): 70 ~ 76 (in Chinese))
- 8 Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and groups in bifurcation theory. Springer-Verlag, 1988
- 9 于海, 陈予恕. 高维非线性动力学系统降维方法的若干进展. *力学进展*, 2009, 2: 154 ~ 164 (Yu H, Chen Y S. Recent developments in dimension reduction methods for high-dimension dynamical systems. *Advances in Mechanics*, 2009, 2: 154 ~ 164 (in Chinese))
- 10 Dantas M J H, Balthazar J M. On the dynamics of free and excited oscillations of a simple portal frame foundation. *Mechanics Research Communications*, 2006 (33): 541 ~ 557
- 11 陈晓, 戴诗亮. 层合板分岔方 Lyapunov-Schmidt 约化分析. *应用力学学报*, 2001, 18: 20 ~ 28 (Chen X, Dai S L. The Lyapunov-Schmidt reduction analyses of laminated plates bifurcation equations. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2001, 18: 20 ~ 28 (in Chinese))
- 12 Matthies H, Meyer M. Nonlinear Galerkin methods for the model reduction of nonlinear dynamical systems. *Computers & Structures*, 2003, 81: 1277 ~ 1286
- 13 吴志强, 陈予恕, 陈芳启. 一类静态分岔问题. *非线性动力学学报*, 2000, 7: 13 ~ 18 (Wu Z Q, Chen Y S, Chen F Q. Problems on a kind of static bifurcation. *Journal of Nonlinear Dynamics*, 2000, 7: 13 ~ 18 (in Chinese))

THE BIFURCATION PROBLEM OF A KIND OF PENDULUM PHYSICAL MODEL *

Zhao Xiang[†] Li Yinghui

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract A kind of physical model was proposed for analyzing the nonlinear dynamics phenomenon of cantilever crane. In the physical model, the deformation of string was considered. So the string was considered to be a spring. The Lagrange method was used to build the system equation, and the singularity theory was taken to get the bifurcation condition and the normal form of the problem. At last, some numerical examples were done to confirm the conclusion.

Key words equilibrium point, bifurcation, rotational speed, Lagrange equation, hinge joint

Received 27 May 2013, revised 30 May 2013.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11072204) and the Central University Fees Funded projects (SWJTU11ZT15)

[†] Corresponding author E-mail: zhaoxiang_swjtu@hotmail.com