

分数阶随机 Duffing 系统的 Hopf 分岔*

侯璟[†] 马少娟 沈琼

(北方民族大学信息与计算科学学院, 银川 750021)

摘要 运用正交多项式逼近原理,研究了分数阶随机 Duffing 系统在零平衡点的 Hopf 分岔. 首先,运用 Laguerre 正交多项式逼近法将含有随机参数的分数阶 Duffing 系统转化为等价的确定性系统,然后通过数值计算求得其响应. 最后,利用两个引理求得等价系统发生 Hopf 分岔行为的临界值,并通过数值模拟验证了理论分析结果.

关键词 随机参数, 分数阶 Duffing 系统, Laguerre 多项式, 分岔

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-083

引言

分数阶微积分理论与非线性动力学理论相结合,推动了分数阶动力学系统的产生及发展,使分数阶动力学系统成为非线性科学领域中又一热点研究课题. 目前,分数阶动力学系统的研究已经引起越来越多研究者的兴趣,更多的研究涉及到了分数阶 Rucklidge 电路系统^[1],分数阶哈密顿系统^[2],分数阶盐岩流变本构模型^[3],分数阶系统特性识别^[4]等多个领域. Duffing 系统作为一个典型的非线性动力学系统,研究分数阶 Duffing 系统是研究其他复杂动力学系统的基础,众多学者对分数阶 Duffing 系统的动力学行为进行了全面地研究. 文献[5]研究分数微分型阻尼的分数阶值较小时, Duffing 振子将出现倍周期分岔并导致混沌;在不同外激励频率下,分数阶微分型 Duffing 振子呈现出对称形破缺、分岔、混沌等强烈的非线性现象;在一定参数范围内与经典 Duffing 振子相比较,分数微分型 Duffing 振子在较小的激励下即可进入混沌. 曹军义等^[6]讨论了分数阶阻尼的阶数在 0.1 ~ 2.0 之间 Duffing 系统依次进入不同的运动区,由混沌运动区存在的周期运动进入混沌运动的倍周期过程比较明显,结果证实阻尼的分数微分阶数对系统的动力学特性影响比较大. Matouk^[7]研究了改进的分数阶自治 Van Der Pol-Duff-

ing 系统的稳定性,并对系统的混沌及同步现象提出了一种有效的控制方法. 文献[8]将 Duffing 方程和 Van der Pol 方程耦合在一个分数阶微分方程中,利用 Riemann-liouville 分数阶倒数和 Adomian 分解法求得此方程的解析近似解. 文献[9]载极低的总分数阶 0.2 的情况下,成功地获得了改进的两个非耦合分数阶 Duffing 系统的混沌同步. 以上成果都是关于确定性系统的,随机因素在动力学系统中无处不在,关于随机分数阶动力系统的研究还是比较少的. 陈林聪和朱位秋^[10]对分数阶阻尼 Duffing 振子在谐和白噪声作用下的随机稳定性进行研究. 随机参数对分数阶动力学系统的研究还未有文献报道. 对分数阶随机 Duffing 系统的研究还是比较少的. 鉴于此,本文运用正交多项式逼近法研究了含有随机参数的分数阶 Duffing 系统,分析了随机参数对分数阶 Duffing 系统的 Hopf 分岔的影响.

1 分数阶随机 Duffing 系统的等价确定性系统

Duffing 系统的自治形式为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = bx - ay - x^3, \end{cases} \quad (1)$$

且系统(1)有三个平衡点(0,0), ($\pm\sqrt{b}$,0). 为了方便讨论,本文将选取 $a = 0.3, b = -1$,则(1)式的

2012-07-04 收到第1稿,2012-07-20 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(1102001),北方民族大学研究生创新项目(2012XYC03)和北方民族大学信息与计算科学学院研究生创新项目(2012xjyk12)资助
[†] 通讯作者 E-mail: xiaohouzi621@126.com

两个特征值为:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.15 + 0.9886859967I, \\ \lambda_2 &= -0.15 - 0.9886859967I. \end{aligned} \quad (2)$$

由分数阶稳定性定理知^[11], $p, q < \frac{2}{\pi} |\arg(\lambda_i)| =$

$\frac{2}{\pi} \arctan \frac{|\operatorname{Im}\lambda_i|}{|\operatorname{Re}\lambda_i|} = 0.9041$ 时, 系统(1)是渐近稳定的.

含有随机参数的分数阶 Duffing 系统

$$\begin{cases} \frac{d^p x}{dt^p} = y, \\ \frac{d^q y}{dt^q} = bx - ay - x^3, \end{cases} \quad (3)$$

其中 b 为确定性参数, a 为随机参数. 设 a 可表示成

$$a = \bar{a} + \delta u, \quad (4)$$

其中 $\bar{a} + \delta$ 为随机参数 a 的均值, 选取 u 为自然界中最常见的随机变量, 即在区间 $[0, +\infty]$ 上服从参数为 1 的指数分布概率密度函数的随机变量, 称 δ 为随机参数的强度. 由泛函分析中的逼近原理可知, 随机函数空间中基函数为 Laguerre 多项式, 其正交性为

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} L_n(u) L_m(u) du = \begin{cases} (n!)^2 & (n = m), \\ 0 & (n \neq m). \end{cases} \quad (5)$$

Laguerre 多项式的三项递推关系为

$$L_{n+1}(u) = (1 + 2n - u)L_n(u) - n^2 L_{n-1}(u). \quad (6)$$

根据随机函数的正交多项式原理^[12], 系统(3)的随机响应可以写成 Fourier 展开的级数逼近形式

$$\begin{cases} x(t, u) = \sum_{i=0}^M x_i(t) L_i(u), \\ y(t, u) = \sum_{i=0}^M y_i(t) L_i(u), \end{cases} \quad (7)$$

其中 $L_i(u)$ 为第 i 个 Laguerre 多项式, M 为所取多项式的最大个数.

将(4)式和(7)式代入(3)式, 得

$$\begin{cases} \frac{d^p}{dt^p} \left(\sum_{i=0}^M x_i(t) L_i(u) \right) = \sum_{i=0}^M y_i(t) L_i(u), \\ \frac{d^q}{dt^q} \left(\sum_{i=0}^M y_i(t) L_i(u) \right) = b \sum_{i=0}^M x_i(t) L_i(u) - \bar{a} \sum_{i=0}^M y_i(t) L_i(u) - \delta u \sum_{i=0}^M y_i(t) L_i(u) - \left(\sum_{i=0}^M x_i(t) L_i(u) \right)^3. \end{cases} \quad (8)$$

上式中第二个等式右端的非线性项 $\left(\sum_{i=0}^M x_i(t) L_i(u) \right)^3$ 可以三项递推关系式(6)可以化简为

$$\left(\sum_{i=0}^M x_i(t) L_i(u) \right)^3 = \sum_{i=0}^{3M} X_i(t) L_i(u), \quad (9)$$

其中 $X_i(t)$ 为定义线性组合 $L_i(u)$ 的系数, 可由 Maple 计算出来. 含有随机变量的项可以化为

$$\begin{aligned} \delta u \sum_{i=0}^M y_i(t) L_i(u) &= \delta \left(\sum_{i=0}^M y_i(t) [(2i+1)L_i(u) - i^2 L_{i-1}(u) - L_{i+1}(u)] \right) \\ &= \delta \left(\sum_{i=0}^M L_i(u) [(2i+1)y_i(t) - (i+1)^2 y_{i-1}(t) - y_{i-1}(t)] - L_{i+1}(u) y_i(t) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

现将(9)式和(10)式代入(8)式, 得

$$\begin{cases} \frac{d^p}{dt^p} \left(\sum_{i=0}^M x_i(t) L_i(u) \right) = \sum_{i=0}^M y_i(t) L_i(u), \\ \frac{d^q}{dt^q} \left(\sum_{i=0}^M y_i(t) L_i(u) \right) = b \sum_{i=0}^M x_i(t) L_i(u) - \bar{a} \sum_{i=0}^M y_i(t) L_i(u) - \delta \left(\sum_{i=0}^M L_i(u) [(2i+1)y_i(t) - (i+1)^2 y_{i+1}(t) - y_{i-1}(t)] - L_{i+1}(u) y_i(t) \right) - \sum_{i=0}^{3M} X_i(t) L_i(u). \end{cases} \quad (11)$$

在(11)式两端依次 $L_j(u) = (j=0, 1, \Lambda)$, 然后关于随机变量 u 取期望, 可以得到一个等价的确定性系统

$$\begin{cases} \frac{d^p}{dt^p} x_0 = y_0, \\ \frac{d^q}{dt^q} y_0 = bx_0 - \bar{a}y_0 - \delta[y_0(t) - y_1(t) - y_{-1}(t)] - X_0, \\ \frac{d^p}{dt^p} x_1 = y_1, \\ \frac{d^q}{dt^q} y_1 = bx_1 - \bar{a}y_1 - \delta[3y_1(t) - 4y_2(t) - y_0(t)] - X_1, \\ \vdots \\ \frac{d^p}{dt^p} x_m = y_m, \\ \frac{d^q}{dt^q} y_m = bx_m - \bar{a}y_m - \delta[(2m+1)y_m(t) - (m+1)^2 y_{m+1}(t) - y_{m-1}(t)] - X_m. \end{cases} \quad (12)$$

其中,由逼近理论知 y_{-1} 和 y_{m+1} 均为零.

当 $N \rightarrow \infty$ 时,在均方收敛的意义下方程组(12)与原分数阶随机系统(3)是等价的.但由于理论分析和数值模拟比较困难,本文选取 $M=2$,则方程组(12)可以改写为

$$\begin{cases} \frac{d^p}{dt^p}x_0 = y_0, \\ \frac{d^q}{dt^q}y_0 = bx_0 - \bar{a}y_0 - \delta[y_0 - y_1] - X_0, \\ \frac{d^p}{dt^p}x_1 = y_1, \\ \frac{d^q}{dt^q}y_1 = bx_1 - \bar{a}y_1 - \delta[3y_1 - 4y_2 - y_0] - X_1, \\ \frac{d^p}{dt^p}x_2 = y_2, \\ \frac{d^q}{dt^q}y_2 = bx_2 - \bar{a}y_2 - \delta[5y_2 - y_1] - X_2. \end{cases} \quad (13)$$

原分数阶随机 Duffing 系统的逼近随机响应可以近似地表示为

$$\begin{cases} x(t, u) = \sum_{i=0}^2 x_i(t)L_i(u), \\ y(t, u) = \sum_{i=0}^2 y_i(t)L_i(u). \end{cases} \quad (14)$$

如果随机变量 $u=0$ (即 $a = \bar{a}$) 时,得到均值参数系统,其样本响应为

$$\begin{cases} x(t, 0) = \sum_{i=0}^2 x_i(t)L_i(u) \\ = x_0(t) + x_1(t) + 2x_2(t), \\ y(t, 0) = \sum_{i=0}^2 y_i(t)L_i(u) \\ = y_0(t) + y_1(t) + 2y_2(t). \end{cases} \quad (15)$$

分数阶随机 Duffing 系统的集合平均响应为

$$\begin{cases} E[x(t, u)] = \sum_{i=0}^2 x_i(t)E[L_i(u)] = x_0(t), \\ E[y(t, u)] = \sum_{i=0}^2 y_i(t)E[L_i(u)] = y_0(t). \end{cases} \quad (16)$$

当 $\delta=0$ 时,分数阶随机 Duffing 系统退化为确定性系统

$$\begin{cases} \frac{d^p}{dt^p}x = y, \\ \frac{d^p}{dt^p}y = bx - \bar{a}y - x^3. \end{cases} \quad (17)$$

定义等价确定性系统的初始条件为 $x_0 = x_0(0), y_{00} = y(0)$. 本文中随机强度 δ 和激励幅值的取值比较小,因此等价的确定性系统(13)与确定性系统(17)有相同的初始条件,即 $x_0 = x(0), y_0 = y(0), x_i = y_i(0) = 0, (i=1, 2)$. 等价的确定性系统(13)的初始条件取为

$$\begin{aligned} x(0) &= [0.7, 0, 0]^T, y(0) = [0.7, 0, 0]^T, \\ x_0 &= 0.7, y_0 = 0.7. \end{aligned}$$

2 分数阶随机 Duffing 系统的 Hopf 分岔分析

如果动力系统是结构不稳定的,则任意小的适当扰动都会使系统的拓扑结构发生突然的质的变化,这种质的变化成为分岔^[13-14]. 按研究对象划分,分岔可分为静态分岔和动态分岔.在动态分岔中,较为重要的是由于定点稳定性突然变化而出现极限环的 Hopf 分岔.通过两个引理^[15-18]可以求出的系统发生分岔的临界值.分数阶随机 Duffing 系统与等价确定性系统都有一个零平衡点,本文仅考虑等价确定性系统在零平衡点处的 Hopf 分岔,在且系统在此平衡点的 Jacobian 矩阵如下

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -\bar{a} - \delta & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & b & -\bar{a} - 3\delta & 0 & 4\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & b & -\bar{a} - 5\delta \end{vmatrix} \quad (18)$$

该矩阵的特征方程为 $f(\lambda) = a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0$,其中 $a_i (i=0, 1, \dots, 6)$ 是特征方程的系数,可由 Maple 计算得出.根据引理,计算 Hurwitz 行列式

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 \end{vmatrix} \quad (19)$$

令 $b = -1$ 利用 Maple 软件求得 $\Delta_5 = 0$ 共有 9 个不重复的参数关系式

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{a} &= -0.415774557\delta - 0.11^{-8}I\delta, \\ \bar{a} &= -6.289945083\delta - 0.566025404^{-9}I\delta, \\ \bar{a} &= -2.294280359\delta - 0.1166025404^{-8}I\delta, \\ \bar{a} &= -1.355027459\delta, \\ \bar{a} &= -3.352859819\delta + 0.3464101616^{-9}I\delta, \\ \bar{a} &= -4.292112721\delta - 0.3464101616^{-9}I\delta, \\ \bar{a} &= -1.355027459\delta, \\ \bar{a} &= -3.352859819\delta + 0.3464101616^{-9}I\delta, \\ \bar{a} &= -4.292112721\delta - 0.3464101616^{-9}I\delta. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

将式(20)中各个关系式分别代入 $\Delta_4, \Delta_3, \Delta_5'(\bar{a})$ 和 $a_i (i=0, \Lambda, 6)$, 满足 $\Delta_4 \neq 0, \Delta_3 \neq 0, \Delta_5'(\bar{a}) \neq 0$ 和 $a_i > 0 (i=0, \Lambda, 6)$ 关系式是

$$\bar{a} = -1.355027459\delta, \quad (21)$$

因此, 当 $\bar{a}_H = -1.355027459\delta$ 时, 满足存在 Hopf 分岔性的条件.

选取 $\delta = 0.1$, 将式(21)代入系统的特征方程, 可得到系统(13)的所有特征值

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= 0.9988966463I, \\ \lambda_2 &= -0.9988966463I, \\ \lambda_{3,4} &= -0.04696264419 \pm 0.9988966463I, \\ \lambda_{5,6} &= -0.2467458822 \pm 0.9690802184I, \end{aligned} \right. \quad (22)$$

显然系统(13)除了有一对共轭纯虚根外, 其他特征值有负实部. 当系统的分岔参数为 $\bar{a}_H = -0.1355027459$ 时, 等价的确定性系统(13)在零平衡点处发生 Hopf 分岔.

3 数值模拟

分别选取分数阶阶数 $p = 0.88$ 和 $q = 0.85$. 当系统(17)的参数 $b = -1, \bar{a}_H = 0$ 时, 确定性分数阶 Duffing 系统在 $(0, 0)$ 点发生 Hopf 分岔, 如图 1 所示. 当参数 $\bar{a} = -0.2 < \bar{a}_H = 0$ 时, 系统的轨线收敛到 $(0, 0)$ 点, 如图 1(a) 所示; 当 $\bar{a} = 0.4 > \bar{a}_H = 0$ 时, 系统的轨线收敛到一个闭曲线上, 形成极限环, 如图 1(b) 所示. 取 $\delta = 0.1$ 时分岔参数为 $\bar{a}_H = -0.1355027459$. 当 $\bar{a} = -0.2 < \bar{a}_H$, 等价的确定性系统(13)的集合平均响应和样本响应的轨线一致收敛到 $(0, 0)$ 点, 分别如图 2(a) 和 (b) 所示, 图 2(c) 和 (d) 为系统发生 Hopf 分岔前集合平均响应和样本响应的时间历程图. 当 $\bar{a} = 0.4 > \bar{a}_H$, 等价

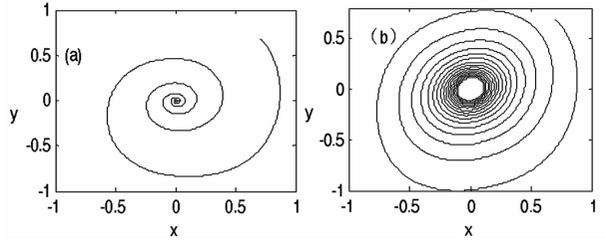


图 1 确定性分数阶 Duffing 系统的 Hopf 分岔相轨图 (a 图为分岔前, b 图为分岔后)

Fig. 1. The Hopf bifurcation phase of fractional-order uncertainty Duffing system (a is before bifurcation, b is after bifurcation)

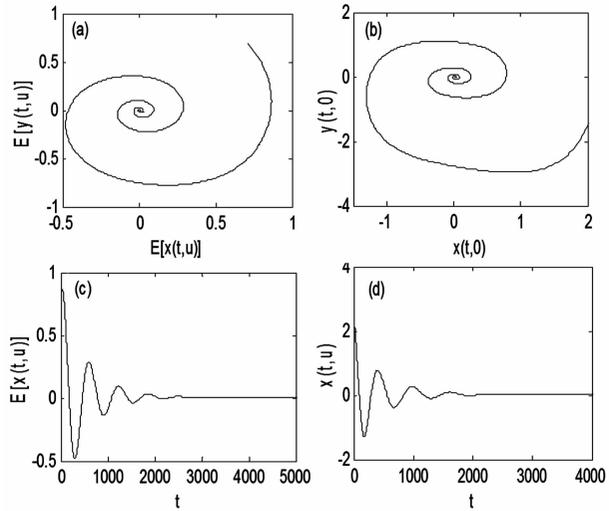


图 2 等价的确定性 Duffing 系统 Hopf 分岔前的相轨图和时间历程图

Fig. 2 Phase and time history of the certainty equivalent Duffing system as before Hopf bifurcation

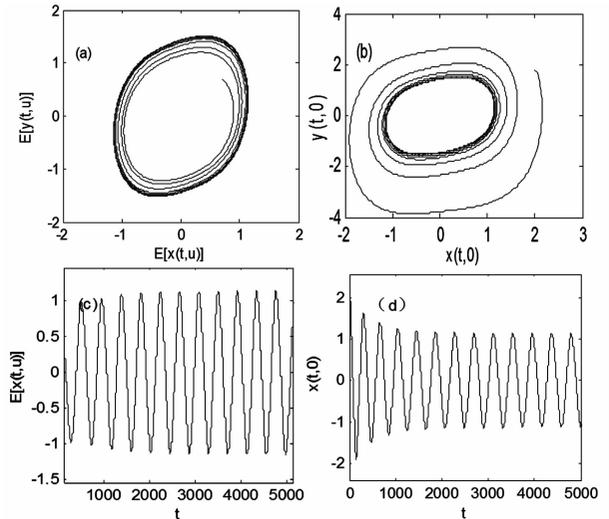


图 3 等价的确定性 Duffing 系统 Hopf 分岔后的相轨图和时间历程图

Fig. 3 Phase and time history of the certainty equivalent Duffing system as after Hopf bifurcation

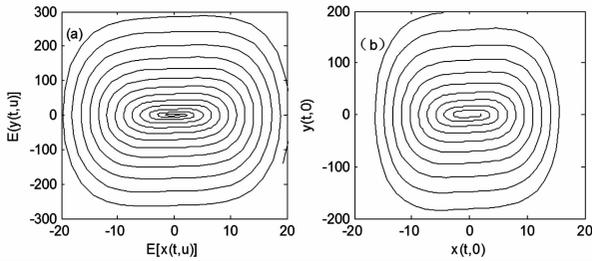


图4 改变阶数后,等价的确定性 Duffing 系统的相轨图

Fig. 4 Phase of the certainty equivalent Duffing system as changed order

的确定性系统(13)的集合平均响应和样本响应的轨线一致收敛到 $(0,0)$ 点,分别如图3(a)和(b)所示,图3(c)和(d)为系统发生 Hopf 分岔后集合平均响应和样本响应的时间历程图.从图1~3中可以看出在分岔参数变化的过程中,分数阶随机 Duffing 系统发生 Hopf 分岔.改变分数阶的阶数 $p = 1.1$ 和 $q = 1.1, \bar{a} = 0.4 > \bar{a}_H$ 时,等价的确定性系统(13)的集合平均响应和样本响应的轨线一致收敛到 $(0,0)$ 点,分别如图4(a)和(b)所示.从图中可以很明显的看出,改变系统的阶数后等价的确定性系统(13)没有产生极限环,而是收敛到 $(0,0)$ 点,也就是说没有发生 Hopf 分岔.

4 结论

对于含有随机参数的分数阶 Duffing 系统,正交多项式逼近法提供了一种有效的分析方法.把分数阶随机 Duffing 系统扩展为等价的确定性系统,对其分析动力学行为.本文主要研究了分数阶随机 Duffing 系统的 Hopf 分岔.运用 Laguerre 正交多项式逼近法将含有随机参数的分数阶 Duffing 系统转化为等价的确定性系统,然后通过数值计算求得其响应.利用两个引理计算出等价的确定性分数阶 Duffing 系统发生 Hopf 分岔行为的临界值,并使用 Matlab 软件设计程序验证理论分析结果.

参 考 文 献

- 1 陈保颖,张家军,苑占江. 数阶 Rucklidge 混沌系统的同步研究. 动力学与控制学报, 2010, 8(3): 234 ~ 238 (Chen B Y, Zhang J J, Yuan Z J. Synchronization of chaotic fractional order Rucklidge systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(3): 234 ~ 238 (in Chinese))
- 2 Zhou S, Fu H, Fu J L. Symmetry theories of hamiltonian

systems with fractional derivatives. *Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica*, 2011, 54(10): 1847 ~ 1853

- 3 Zhou H W, Wang C P, Duan Z Q, et al. Time-based fractional derivative approach to creep constitutive model of salt rock. *Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica*, 2012, 42(3): 310 ~ 318
- 4 董鹏真,林祥云,刘杰. 正交小波包分析方法在分数阶系统特性识别中的应用. 动力学与控制学报, 2010, 8(2): 137 ~ 141 (Dong P Z, Lin X Y, Liu J. Characteristics recognition typical fractional order dynamical systems Via orthogonal wavelet analysis method. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(2): 137 ~ 141 (in Chinese))
- 5 廖少锴,张卫. 分数阶 Duffing 振子的动力学研究. 动力学与控制学报, 2008, 6(2): 122 ~ 125 (Liao S K, Zhang W. Dynamics of fractional duffing oscillator. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2): 122 ~ 125 (in Chinese))
- 6 Cao J Y, Ma C B, Xie H, et al. Nonlinear dynamics of duffing system with fractional order damping. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2010, 5(4): 041012
- 7 Matouk A E. Chaos, feedback control and synchronization of a fractional-order modified autonomous van der pol-duffing circuit. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(2): 975 ~ 986
- 8 Duan J S, Sun J, Temuer C L. Nonlinear fractional differential equation combining duffing equation and van der pol equation. *Journal of Mathematics*, 2011, 31(1): 7 ~ 10
- 9 Ge Z M, Ou C Y. Chaos synchronization of fractional order modified duffing systems with parameters excited by a chaotic signal. *Chaos Solitons Fractals*, 2008, 35(4): 705 ~ 717
- 10 Chen L C, Zhu W Q. Stochastic stability of duffing oscillator with fractional derivative damping under combined harmonic and white noise parametric excitations. *Acta Mechanica*, 2009, 207(1-2): 109 ~ 120
- 11 Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In: *Computational Engineering in Systems Applications*, 1996: 963 ~ 968
- 12 刘式适,刘式达. 特殊函数. 北京: 气象出版社, 1988 (Liu S S, Liu S D. Special functions. Beijing: China Meteorological Press, 1988 (in Chinese))
- 13 张琪冒,王洪礼,竺致文等. 分岔与混沌理论及应用. 天津: 天津大学出版社, 2005 (Zhang Q M, Wang H L, Zhu Z W, et al. The theory of bifurcation and chaos and its application. Tianjin: Tianjin University Press, 2005

- (in Chinese))
- 14 陆启韶. 分岔与奇异性. 上海:上海科技教育出版社, 1995 (Lu Q S. Bifurcation and singularity. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1995(in Chinese))
- 15 Hassard B D, Kazarinoff N D, Wa Y H. Theory and applications of hopf bifurcation. Cambridge:Cambridge University Press, 1981
- 16 Guckenheimer J, Holmes P J. Nonlinear oscillations dynamical systems and bifurcations of vector fields. New York: Springer Verlag, 1983
- 17 Shen J Q, Jing Z J. A new detecting method for conditions of existence of Hopf bifurcation. *Acta Mathematica Application Sinica*, 1995,11(1):79~93
- 18 马少娟. 一类随机 Van der Pol 系统的 Hopf 分岔研究. 物理学报, 2011, 60(1):010502. (Ma S J. Hopf bifurcation in a kind of stochastic Van der Pol system. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(1): 010502 (in Chinese))

HOPF BIFURCATION OF FRACTIONAL-ORDER STOCHASTIC DUFFING SYSTEM *

Hou Jing[†] Ma Shaojuan Shen Qiong

(School of Information and Computation Science, Beifang University of Nationalities, Yinchuan 750021, China)

Abstract According to the theory of orthogonal polynomial, the Hopf bifurcation of fractional-order stochastic Duffing system at zero balance point is studied. Firstly, converting the fractional-order stochastic Duffing system into its equivalent deterministic one by using Laguerre orthogonal polynomial approximation principle. its response is obtained in the numerical calculation. Finally, it can using two lemmas to get the critical value of Hopf bifurcation in equivalent system, and the theoretical analysis results are verified by numerical simulation.

Key words random parameter, fractional-order Duffing system, Laguerre polyomial, bifurcation

Received 4 July 2012, revised 20 July 2012.

* The project supported by National Natural Science Foundation of China (11002001), the innovative project for the postgraduate students of Beifang University of Nationalities(2012XYC033), and the innovative project for the postgraduate students of School of Information and Computation of Beifang University of Nationalities (2012xjyk12)

[†] Corresponding author E-mail: xiaohouzi621@126.com