第 12 卷第 4 期 2014 年 12 月
1672-6553/2014/12(4)/304-5

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 12 No. 4
Dec. 2014

# 三种耦合 RLC 电路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数

丁光涛†

（安徽师范大学物理与电子信息学院，芜湖 241000）

**摘要** 利用 Lagrange 力学逆问题理论和方法，构造电感、电容和电阻三种耦合 RLC 电路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数.

**关键词** RLC 电路， Lagrange 函数， Hamilton 函数， 逆问题

DOI： 10.6052/1672-6553-2014-002

## 引言

分析力学的发展使力学理论和方法可以推广应用于其它学科领域，例如，Lagrange 方程就成功地应用于电路系统和机电耦合系统，但是由于传统的 Lagrange 力学基本上局限于处理保守系统，故长期以来电路的 Lagrange 函数也只处理电感和电容线路，当涉及电阻等耗散因素时就引入耗散函数[1-5]，这种处理方法使 Lagrange 方程的某些优势失去，也给系统的 Hamilton 化增加困难. 然而，电路系统的 Hamilton 化日益成为重要的课题，这是因为微电子学的发展使电子器件的尺度越来越小，电子电路的集成度越来越高，器件和电路的量子效应日益明显，因此介观电路的量子化问题研究提上了重要日程，而按照系统量化子的正常程序，应当先导出系统的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数. 讨论介观电路的量子效应已得到了很多成果，但是相关的研究主要讨论的是单回路电路的量子化问题，对耦合电路量子化问题的讨论则少见于文献[6-9]，因此，应当研究如何构造出耦合 RLC 电路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数问题. 分析力学中变分法逆问题研究的进展使得很多耗散系统可以纳入 Lagrange 系统，即能够构造出这些耗散系统的 Lagrange 函数，并且能够进一步构造 Hamilton 函数[10-15]，这些耗散系统就包括通常的 RLC 电路. 本文利用变分法逆问题的理论和方法，给出一种构造出 RLC 单回路电路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的具体方法和程序，然后在此基础上，分别导出以电感，电容和电阻三种方式耦合的两个全同 RLC 回路系统的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数.

## 1 单回路 RLC 电路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数

由电感 L 电容 C 和电阻 R 组成电路(图 1)，电荷在其中运动，取电容上电量 q 为变量，系统的运动微分方程为

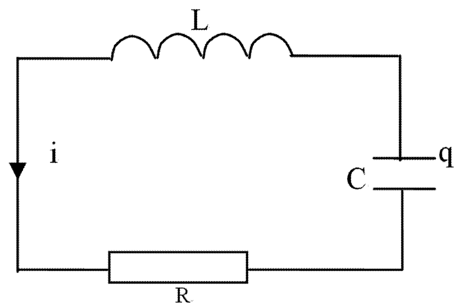


图 1 RLC 回路
Fig. 1 RLC circuit

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=0 \tag{1}$$

引入如下参数

$$\frac{R}{L}=2\beta \tag{2}$$

$$\frac{1}{LC}=\omega^2 \tag{3}$$

方程(1)改写成为

$$\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega^2 q=0 \tag{4}$$

下面只讨论 $\omega^2$ 大于 $\beta^2$ 这一种情况.

根据变分法逆问题理论，方程(1)或(4)不是

2013-03-26 收到第 1 稿，2013-08-15 收到修改稿.

† 通讯作者 E-mail：dgt695@sina.com

自伴随的,不能直接表示成 Lagrange 方程形式[10],我们利用变量变换可以将方程(4)变换成自伴随的,再求得 Lagrange 函数[15]. 作变量变换

$$x = qe^{2\beta t}, \tag{5}$$

则方程(4)变换成自伴随形式的方程

$$(\ddot{x} - 2\beta\dot{x} + \omega^2 x)e^{-2\beta t} = 0 \tag{6}$$

根据 Engels 第一方法[10,11],直接计算得到方程(6)的 Lagrange 函数

$$\bar{L} = \frac{1}{2}e^{-2\beta t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \tag{7}$$

本文用$\bar{L}$,$\bar{L}^*$等表示 Lagrange 函数以区别于电感.

利用变换(5),还原为原始变量 $q$,得到

$$\bar{L}' = \frac{1}{2}e^{2\beta t}(\dot{q}^2 + 4\beta q\dot{q} + 4\beta^2 q^2 - \omega^2 q^2)$$

再利用 Lagrange 函数的规范变换化简上述函数,得到

$$\bar{L}^* = \bar{L}' + \frac{d}{dt}(-2\beta e^{2\beta t}q^2) = \frac{1}{2}e^{2\beta t}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \tag{8}$$

这是方程(4)的 Lagrange 函数. 考虑到实际的 RLC 电路的物理意义,上述函数应当用电路的物理参数写成

$$\bar{L} = \frac{1}{2}(L\dot{q}^2 - \frac{1}{C}q^2)\exp(\frac{Rt}{L}) \tag{9}$$

进一步利用 Legendre 变换得到对应的 Hamilton 函数. 定义广义动量

$$p = L\dot{q}\exp(\frac{Rt}{L}) \tag{10}$$

则 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p^2}{2L}\exp(-\frac{Rt}{L}) + \frac{q^2}{2C}\exp(\frac{Rt}{L}) \tag{11}$$

式(9)$L$ 和式(11)$H$ 就是单回路 RLC 电路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数.

## 2　三种耦合电路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数

研究两个全同回路的耦合系统的分析力学化问题,设回路的耦合方式有三种:电感耦合(图 2),电容耦合(图 3)和电阻耦合(图 4).

1) 电感耦合电路(图 2). 两个 RLC 回路通过互感 M 耦合,设两个电容上的电量分别为 $q_1$ 和 $q_2$,则电路的微分方程为别为 $q_1$ 和 $q_2$,则电路的微分方程为

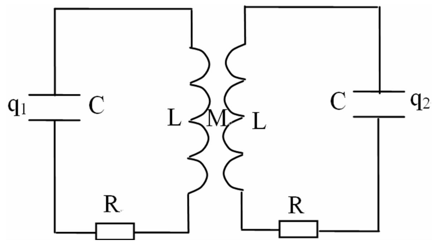


图 2　电感耦合 RL 回路

Fig. 2　Inductively coupled RLC circuit

$$L\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_2 + R\dot{q}_1 + \frac{1}{C}q_1 = 0,$$

$$L\ddot{q}_2 + M\ddot{q}_1 + R\dot{q}_2 + \frac{1}{C}q_2 = 0. \tag{12}$$

为了解除耦合,引入新变量

$$Q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(q_1 + q_2)$$

$$Q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(q_1 - q_2) \tag{13}$$

方程(12)变换为

$$\ddot{Q}_1 + 2\beta_1\dot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = 0,$$

$$\ddot{Q}_2 + 2\beta_2\dot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = 0 \tag{14}$$

式中

$$\beta_1 = R/2(L+M), \beta_2 = R/2(L-M);$$

$$\omega_1^2 = 1/C(L+M), \omega_2^2 = 1/C(L-M). \tag{15}$$

显然,方程组(14)中两个方程与方程(4)形式完全相同,通过类似于上述单回路的方法步骤,可以得到方程(14)的 Lagrange 函数为

$$\bar{L}_l = \frac{1}{2}e^{2\beta_1 t}(\dot{Q}_1^2 - \omega_1^2 Q_1^2) + \frac{1}{2}e^{2\beta_2 t}(\dot{Q}_2^2 - \omega_2^2 Q_2^2) \tag{16}$$

将变换式(13)代人上式,得到变量 $q_1$ 和 $q_2$ 表示的 Lagrange 函数为

$$L_l^* = \frac{1}{2}e^{2\beta_1 t}[(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - \omega_1^2(q_1 + q_2)^2] + \frac{1}{4}e^{2\beta_2 t}[(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 - \omega_1^2(q_1 - q_2)^2] \tag{17}$$

用电路物理参数表示,得到电感耦合电路的 Lagrange 函数为

$$\bar{L}_l = \frac{1}{4}[(L+M)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - \frac{1}{C}(q_1 + q_2)^2]e^{\frac{Rt}{L+M}} + \frac{1}{4}[(L-M)(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 - \frac{1}{C}(q_1 - q_2)^2]e^{\frac{Rt}{L-M}} \tag{18}$$

定义广义动量

$$p_{l1}=\frac{1}{2}(L+M)(\dot q_1+\dot q_2)e^{\frac{Rt}{L+M}}+\frac{1}{2}(L-M)(\dot q_1-\dot q_2)e^{\frac{Rt}{L+M}}$$

$$p_{l2}=\frac{1}{2}(L+M)(\dot q_1+\dot q_2)e^{\frac{Rt}{L+M}}-\frac{1}{2}(L-M)(\dot q_1-\dot q_2)e^{\frac{Rt}{L+M}} \tag{19}$$

导出对应的电感耦合电路的 Hamilton 函数为

$$H_l=\frac{1}{4}\Big[\frac{(p_{l1}+p_{l2})^2}{L+M}e^{-\frac{Rt}{L+M}}+\frac{(p_{l1}-p_{l2})^2}{L-M}e^{-\frac{Rt}{L-M}}+\frac{(q_1+q_2)^2}{C}e^{\frac{Rt}{L+M}}+\frac{(q_1-q_2)^2}{C}e^{\frac{Rt}{L-M}}\Big] \tag{20}$$

2)电容耦合电路(图3). 两个 RLC 回路通过电容 $C_0$ 耦合,设两个回路的电容上的电量分别为 $q_1$ 和 $q_2$,则电路的微分方程为

$$L\ddot q_1+R\dot q_1+\Big(\frac{1}{C}+\frac{1}{C_0}\Big)q_1+\frac{1}{C_0}q_2=0,$$

$$L\ddot q_2+R\dot q_2+\frac{1}{C_0}q_1+\Big(\frac{1}{C}+\frac{1}{C_0}\Big)q_2=0; \tag{21}$$

根据式(13)引入新变量,方程(21)变换成下列分离变量形式

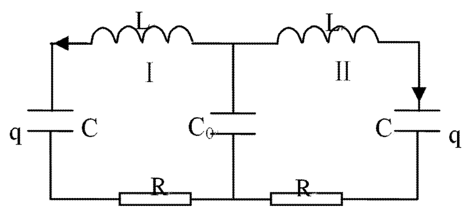


图3 电容耦合 RLC 回路

Fig. 3 Capacitive coupling RLC circuit

$$\ddot Q_1+2\beta\dot Q_1+\omega_1^2Q_1=0,$$

$$\ddot Q_2+2\beta\dot Q_2+\omega_2^2Q_2=0 \tag{22}$$

式中,

$$\beta=R/2L \tag{23}$$

$$\omega_1^2=\frac{2C+C_0}{LCC_0},$$

$$\omega_2^2=\frac{1}{LC} \tag{24}$$

再次利用类似单回路的方法,容易得到方程(22)的 Lagrange 函数为

$$\bar L_c=\frac{1}{2}e^{2\beta t}(\dot Q_1^2+\dot Q_2^2-\omega_1^2Q_2^2-\omega_2^2Q_2^2) \tag{25}$$

用变量 $q_1,q_2$ 表示,则 Lagrange 函数写成

$$\bar L_c^*=\frac{1}{2}e^{2\beta t}(\dot q_1^2+\dot q_2^2-\omega^2(q_1^2+q_2^2)-2\omega_0^2q_1q_2) \tag{26}$$

式中 $\omega^2=(C+C_0)/LCC_0,\omega_0^2=1/LC_0$.

用电路物理参数表示,电容耦合电路的 Lagrange 函数为

$$\bar L_c=\frac{1}{2}\Big[L(\dot q_1^2+\dot q_2^2)-\Big(\frac{1}{C}+\frac{1}{C_0}\Big)(q_1^2+q_2^2)-\frac{2}{C_0}q_1q_2\Big]e^{\frac{Rt}{L}} \tag{27}$$

定义广义动量

$$p_{c1}=L\dot q_1e^{\frac{Rt}{L}},$$

$$p_{c2}=L\dot q_2e^{\frac{Rt}{L}} \tag{28}$$

则电容耦合回路的 Hamilton 函数为

$$H_c=\frac{1}{2L}(p_{c1}^2+p_{c2}^2)e^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{1}{C}+\frac{1}{C_0}\Big)(q_1^2+q_2^2)+\frac{2}{C_0}q_1q_2\Big]e^{\frac{Rt}{L}} \tag{29}$$

3)电阻耦合电路(图4). 两个 RLC 回路通过电阻 $R_0$ 耦合,设两个回路的电容上的电量分别为 $q_1$ 和 $q_2$,则电路的微分方程为

$$L\ddot q_1+(R+R_0)\dot q_1+R_0\dot q_2+\frac{1}{C}q_1=0,$$

$$L\ddot q_2+R_0\dot q_1+(R+R_0)\dot q_2+\frac{1}{C}q_2=0; \tag{30}$$

根据式(13)引入新变量,方程(30)变换成下列分离变量形式

$$\ddot Q_1+2\beta'\dot Q_1+\omega^2Q_1=0,$$

$$\ddot Q_2+2\beta'\dot Q_2+\omega^2Q_2=0; \tag{31}$$

式中

$$\beta'=(R+2R_0)/2L,$$

$$\beta''=R/2L \tag{32}$$

$$\omega^2=1/LC \tag{33}$$

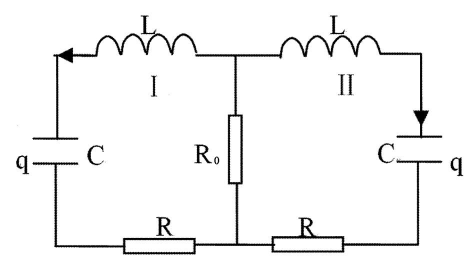


图4 电阻耦合 RLC 回路

Fig. 4 Resistance coupled RLC circuit

方程(31)对应的 Lagrange 函数为

$$\bar{L}_r = \frac{1}{2}e^{2\beta' t}(\dot{Q}_1^2 - \omega^2 Q_1^2) + \frac{1}{2}e^{2\beta'' t}(\dot{Q}_2^2 - \omega^2 Q_2^2) \tag{34}$$

用变量 $q_1, q_2$ 表示,则 Lagrange 函数写成

$$\bar{L}_r^* = \frac{1}{4}e^{2\beta' t}[(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - \omega^2(q_1 + q_2)^2] + \frac{1}{4}e^{2\beta'' t}[(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 - \omega^2(q_1 - q_2)^2] \tag{35}$$

用电路物理参数表示,电阻耦合电路的 Lagrange 函数为

$$\bar{L}_r = \frac{1}{4}[L(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - \frac{1}{C}(q_1 + q_2)^2]e^{\frac{R+2R_0}{L}t} + \frac{1}{4}[L(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 - \frac{1}{C}(q_1 - q_2)^2]e^{\frac{Rt}{L}} \tag{36}$$

定义广义动量

$$p_{r1} = \frac{1}{2}L(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)e^{\frac{R+2R_0}{L}t} + \frac{1}{2}L(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)e^{\frac{Rt}{L}}$$

$$p_{r2} = \frac{1}{2}L(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)e^{\frac{R+2R_0}{L}t} - \frac{1}{2}L(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)e^{\frac{Rt}{L}} \tag{37}$$

则电阻耦合回路的 Hamilton 函数为

$$H_r = \frac{1}{4L}[(p_{r1} + p_{r2})^2 e^{-\frac{R+2R_0}{L}t} + (p_{r1} - p_{r2})^2 e^{-\frac{Rt}{L}}] + \frac{1}{4C}[(q_1 + q_2)^2 e^{\frac{R+2R_0}{L}t} + (q_1 - q_2)^2 e^{\frac{Rt}{L}}] \tag{38}$$

## 3 结论

本文首先根据变分法逆问题理论和方法,利用变量变换和规范变换构造了单回路 RLC 电路系统的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数;然后,讨论由两个全同的 RLC 回路构成的电感、电容和电阻三种耦合系统,在解除电路微分方程中耦合项以后,再根据讨论单回路电路的方法和结果,分别构造出这三种耦合回路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数. 值得指出的是,所得的函数形式是二次型,这是分析力学中一类重要的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数形式,也是便于讨论系统量子化问题的形式. 解决了 RLC 电路系统 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的构造问题,不仅有利于用分析力学理论和方法研究经典耦合电路,而且为进一步讨论介观耦合 RLC 电路的量子力学问题打下了基础.

## 参 考 文 献


1 Goldstein H, Poole C, Safko J. Classical mechanics, 3nd ed. Redwood City: Addison-Wesley, 2002

2 邱家俊. 机电分析动力学. 北京:科学出版社,1992. (Qiu J J. Analysis mechnanics of mechanico-electrical systems. Beijing: Science Press 1992 (in Chinese))

3 Liu H J, Tang Y F, Fu J L. Algebraic structure and Poissom's theory of mechanico-electrical systems. *Chinese Physics*, 2006 ,15 :1653 ~ 1661

4 Li Y C, Xia L L, Liu B, Jiao Z Y, Wang X M. Unified symmetry of mechano-electrical systems with nonholonomic constraints. *Chinese Physics B*, 2008,17:1545 ~ 1749

5 Huang W X, Wang Q J, Yin X G, Huang C P, et al. Optical resonance in a composite asymmetric plasmonic nanostructure. *Journal of Applied Physics*,2011,109:114310

6 龙超云,刘波. 轻阻尼 RLC 量子化回路的双波描述. 物理学报,2001,50(6):1011 ~ 1014 (Long C Y, Liu B. Double-wave function of RLC circuit after quantization. *Acta Physica Sinica*, 2001 50(6):1011 ~ 1014 (in Chinese))

7 汪仲清. 介观 RLC 电路在热真空态下的量子涨落. 物理学报, 2002,51(8): 1808 ~ 1810 ( Wang Z Q. Quantum flunctuation in thermal vacuum state for mesoscopic RLC circuit. *Acta Physica Sinica*, 2002,51(8): 1808 ~ 1810 (in Chinese))

8 Xu C L. Number-phase quantization of a mesoscopic RLC circuit. *Chinese Physics B*, 2012, 21: 020402

9 刘清,邹丹,嵇英华. 交流源作用下介观 RLC 电路系统量子态随时间的演化. 物理学报,2006,55(4):1596 ~ 1601( Liu Q, Zou D, Ji Y H. Time evolution of mesoscopic RLC circuit driven by an alternating current source. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(4):1596 ~ 1601 (in Chinese))

10 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅰ. New York:Spinger-Verlag, 1978

11 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅱ. New York:Spinger-Verlag, 1983

12 Cie ślińskі J L, Nikiciuk T. A direct approach to the construction of standard and nonatandard Lagrangians for dissipative-like dynamical systems with variable coefficients. *Journal of Physics A: Mathemetical and Theorems*, 2010, 43:17250

13 丁光涛. 从运动方程构造 Lagrang 函数的直接方法. 动力学与控制学报, 2010, 8(4):305 ~ 310 (Ding G T. A direct approach to the construction of Lagrangians from the motion equation . *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(4):305 ~ 310 (in Chinese))

14 丁光涛. 一维变系数耗散系统 Lagrange 函数和 Hamil-

ton 函数的新构造方法. 物理学报, 2011, 60(4): 044503 (Ding G T. A new approach to the construction of Lagrangians and Hamiltonians for one-dimensional dissipative systems with variable coefficients. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(4): 044503 (in Chinese))

15 丁光涛. 利用变量变换构造耗散系统 Lagrange 函数. 动力学与控制学报, 2012, 10(3): 199 ~ 201 (Ding G T. The construction of Lagrangians for dissipative-like systems by using the transformations of variables. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, 10(3): 199 ~ 201 (in Chinese))

# LAGRANGIANS AND HAMILTONIANS OF THREE COUPLED RLC CIRCUITS

Ding Guangtao†

(*College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

**Abstract** The Lagrangians and the Hamiltonians of inductively coupled RLC circuit, capacitive coupling RLC circuit and resistance coupled RLC circuit were constructed by using theory and methods of inverse problem of Lagrangian mechanics.

**Key words** RLC circuit, Lagrangian, Hamiltonian, inverse problem

Received 26 March 2013, revised 15 August 2013.

† Corresponding author E-mail: dgt695@sina.com