第 12 卷第 4 期 2014 年 12 月
1672-6553/2014/12(4)/295-9
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 12 No. 4
Dec. 2014

时变系数下耦合 KdV 和 Burgers 方程组的孤波解*

高翔　化存才†　胡东坡
(云南师范大学数学学院,昆明　650092)

摘要　在双曲函数展开法和 Jacobi 椭圆函数展开法的基础上,应用它们的扩展形式来讨论三类时变系数下耦合 KdV 和 Burgers 方程组,获得了在不同情形下的一些孤波解,其中包括类孤立子解,类冲击波解和类三角函数周期型解.

关键词　双曲正切函数展开法,　Jacobi 椭圆函数展开法,　时变系数下耦合 KdV - Burgers 方程组,　孤波解

DOI:　10.6052/1672-6553-2014-003

引言

在所有的非线性现象中,对孤立子的研究是非线性科学的重要内容之一. 自孤立子被发现以来,人们对孤立子的研究就一直未间断过. 随着对孤立子研究的不断深入和一些理论与方法的产生,它已经广泛地运用到物理学中的许多领域中,因此对孤波的研究就具有重要的意义和价值. 在孤立子理论中,孤子方程的求解一直受到物理学家和数学家的关注. 随之产生了许多著名的非线性发展方程的求解方法,如 Bäcklund 变换[1],逆散射法[3],Hirota 双线性方法[4],齐次平衡法[6],双曲函数展开法[8],Jacobi 椭圆函数展开法[6]等.

目前,从国内外对 KdV 方程和 Burgers 方程的研究现状来看,一些文献都是针对单个 KdV 方程和单个 Burgers 方程求精确解进行研究. 如文献[7]应用行波法,齐次平衡法和 Jacobi 椭圆函数展开法求解 KdV 方程,不仅获得了该方程的准确周期解及孤波解,而且给出了若干新的精确解析解. 文献[8]将扩展的 tanh - 函数法应用于(2 +1)维的非线性偏微分方程,获得了(2 +1)维 Burgers 方程的一些新的精确解. 近十多年来,人们更多的关注变系数 KdV 与 Burgers 方程的研究,拓展了椭圆函数展开法,获得了一些结果,如文献[9 - 11].

本文将研究时变系数下线性项对称耦合 KdV 和 Burgers 方程组,非线性项对称耦合 KdV 和 Bur - gers 方程组,非线性项非对称耦合 KdV 和 Burgers 方程组,在 Jacobi 椭圆函数展开法和双曲正切函数展开法的基础上,运用扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法和扩展的双曲函数展开法,分别求出了一些孤波解,包括类孤立波解、类冲击波解和类三角函数周期解.

1　方法介绍

考虑(1 +1)维含时间扰动的非线性发展方程

$$P(x,t,u,u_t,u_x,u_{xx},\cdots) \tag{1}$$

其中 P 是关于未知函数 u 及其各阶导数的适当函数. 我们利用双曲正切函数展开法寻找如下形式的解[12]:

$$u = u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i(t) T^i(\xi) \tag{2a}$$

其中 $T(\xi) = \tanh(\xi)$. $a_i(t)$ $(i = 0,1,\cdots,m)$,$\xi = x - X(t)$,$X(t)$ 均为待定的随时间变化的函数. 双曲正切函数 $T(\xi)$ 满足方程:

$$T' = 1 - T^2,$$

其中 $' = \dfrac{d}{d\xi}$,按照下面的步骤来确定 u:

步骤 1:通过平衡方程(1)中最高阶导数项和非线性的阶数,可以确定 m 的值,称 m 为孤立波解的阶数;

2012-12-05 收到第 1 稿,2013-06-13 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10772158,11162020),云南省中青年学术与技术带头人计划项目(2008PY059)
† 通讯作者 E-mail:cuncai-hua@139.com

步骤 2：将阶数确定的(2a)，代入(1)，合并 T 的同次幂，并令系数为零，可以得到一个关于待定函数 $a_i(t)(i=0,1,\cdots,m)$，ξ 的超定的非线性微分代数方程组；

步骤 3：利用吴文俊代数消元法，并借助数学软件 Maple 求解该代数方程组，确定待定函数 $a_i(t)(i=0,1,\cdots,m)$，ξ 的非平凡值. 返回原来的变量最终可以得出方程(1)的孤立波解：

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{m}a_i(t)\tanh^i[x-X(t)]$$

根据不同的需要，我们除了求双曲正切函数形式的解之外，在双曲正切函数展开法和 Jacobi 椭圆函数展开法的基础上，运用扩展的双曲函数展开法和扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法，还可以求如下两种形式的解：利用扩展的双曲函数展开法寻找如下形式的解：

$$u=u(\xi)=\sum_{i=0}^{n}b_i(t)\mathrm{sech}^i(\xi)+\sum_{i=0}^{n}c_i(t)\tanh(\xi)\mathrm{sech}^{i-1}(\xi) \tag{2b}$$

记 $S=\mathrm{sech}(\xi)$，T 和 S 满足以下关系式：

$$S'=-ST,\quad T^2=1-S^2,$$

利用扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法寻找如下形式的解：

$$u=u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_i(t)F^i(\xi) \tag{2c}$$

其中 F 为 Jacobi 椭圆函数，且 F 满足下面的辅助常微分方程：

$$(F')^2=\mu F^4+\eta F^2+\lambda,\quad F''=2\mu F^3+\eta F$$

其中，$\mu,\eta,\lambda,F(\xi)$ 不同的对应取值见下表 1：

表 1 $\mu,\eta,\lambda,F(\xi)$ 的对应取值

Table 1 The corresponding values of $\mu,\eta,\lambda,F(\xi)$

$F(\xi)$	μ	η	λ
$\mathrm{sn}\xi,\mathrm{cd}\xi=\frac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{dn}\xi}$	r^2	$-(1+r^2)$	1
$\mathrm{cn}\xi$	$-r^2$	$2r^2-1$	$1-r^2$
$\mathrm{dn}\xi$	-1	$2-m^2$	m^2-1
$\mathrm{sc}\xi\ \frac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{cn}\xi}$	$1-r^2$	$2-r^2$	1
$\mathrm{sd}\xi\ \frac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{dn}\xi}$	$r^2(r^2-1)$	$2r^2-1$	1

将解形式由(2a)替换为(2b)或(2c)时，确定 u 的步骤同上.

本文考虑三类如下具有时间变系数耦合形式的方程组：

$$\begin{cases}u_t+H_1(t,u,v)=0\\ v_t+H_2(t,u,v)=0\end{cases} \tag{3}$$

并且假设这三类耦合方程组(3)分别具有如下形式的解：

$$\begin{cases}u(x,t)=u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_i(t)T^i(\xi)\\ v(x,t)=v(\xi)=\sum_{i=0}^{n}b_i(t)T^i(\xi)\end{cases} \tag{4a}$$

$$\begin{cases}u(x,t)=u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_i(t)F^i(\xi)\\ v(x,t)=v(\xi)=\sum_{i=0}^{n}b_i(t)T^i(\xi)\end{cases} \tag{4b}$$

$$\begin{cases}u(x,t)=u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_i(t)T^i(\xi)\\ v(x,t)=v(\xi)=\sum_{i=0}^{n}b_i(t)\mathrm{sech}^i(\xi)+\\ \quad\sum_{i=0}^{n}c_i(t)\tanh(\xi)\mathrm{sech}^{i-1}(\xi)\end{cases} \tag{4c}$$

其中 $\xi=x-X(t)$，$X(t)$ 为待定的随时间变化的函数，变系数待定.

通过齐次平衡法，分别平衡方程组中的非线性项和线性最高阶导数项，从而确定 m,n 的值. 因为我们得到的 m,n 都是分数，所以我们将通过数学变换，把分数转化为整数来讨论，并且通过它们之间的关系式和取极限形式获得了在不同情形下的一些孤波解.

2 方法应用

2.1 时变系数下线性项对称耦合 KdV 和 Burgers 方程组的解

考虑如下方程组：

$$\begin{cases}u_t+\alpha_1(t)uu_x+\beta_1(t)v_{xxx}=0,\\ v_t+\alpha_2(t)vv_x+\beta_2(t)u_{xx}=0.\end{cases} \tag{5}$$

其中 $\alpha_1(t)$，$\alpha_2(t)$ 为对流项系数，$\beta_1(t)$，$\beta_2(t)$ 分别为色散项与扩散项的系数.

对于方程组(5)，我们采用双曲正切函数展开法[13]求解，同时结合数学变换求得了该方程组的两组孤波解.

作行波变换：

$$u(x,t)=u(\xi),v(x,t)=v(\xi),\xi=x-X(t),$$

假设它有如下形式的解：

$$\begin{cases} u(x,t) = u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i(t) T^i(\xi) \\ v(x,t) = v(\xi) = \sum_{i=0}^{n} b_i(t) T^i(\xi) \end{cases} \tag{6}$$

其中,$X(t)$为待定的随时间变化的函数.

将行波变换(6)代入方程组(5)中得到如下形式的常微分方程组(ODE):

$$\begin{cases} -X'(t)u' + \alpha_1(t)uu' + \beta_1(t)v''' = 0 \\ -X'(t)v' + \alpha_2(t)vv' + \beta_2(t)u'' = 0 \end{cases} \tag{7}$$

根据齐次平衡法,分别平衡方程组(7)中两个方程的线性最高阶导数项和非线性项的阶数,有

$$\begin{cases} n+3 = 2m+1 \\ m+2 = 2n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{5}{3} \\ n = \dfrac{4}{3} \end{cases} \tag{8}$$

因 $m=\frac{5}{3}, n=\frac{4}{3}$ 都是分数,故引入数学变换:令 $u = w^{\frac{5}{3}}, v = k^{\frac{4}{3}}$,代入(5)得:

$$\frac{5}{3}w^{\frac{5}{3}}w_t + \frac{5}{3}\alpha_1(t)w^{\frac{7}{3}}w_x + \beta_1(t)\times\Big(-\frac{8}{27}k^{-\frac{5}{3}}k_x^3 + \frac{4}{3}k^{-\frac{2}{3}}k_x k_{xx} + \frac{4}{3}k^{\frac{1}{3}}k_{xxx}\Big) = 0$$

$$\frac{4}{3}k^{\frac{1}{3}}k_t + \frac{4}{3}\alpha_2(t)k^{\frac{5}{3}}k_x + \beta_2(t)\Big(\frac{10}{9}w^{-\frac{1}{3}}w_x^2 + \frac{5}{3}w^{\frac{2}{3}}w_{xx}\Big) = 0 \tag{9}$$

将(9)中第一式两边同乘 $w^{\frac{1}{3}}k^{\frac{5}{3}}$,第二式两边同乘 $w^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}}$,化简得:

$$\frac{5}{3}ww_t k^{\frac{5}{3}} + \frac{5}{3}\alpha_1(t)w^{\frac{8}{3}}w_x k^{\frac{5}{3}} + \beta_1(t)\times \Big(-\frac{8}{27}w^{\frac{1}{3}}k_x^3 + \frac{4}{3}w^{\frac{1}{3}}kk_x k_{xx} + \frac{4}{3}w^{\frac{1}{3}}k^2 k_{xx}\Big) = 0$$

$$\frac{4}{3}w^{\frac{1}{3}}k^{\frac{2}{3}}k_t + \frac{4}{3}\alpha_2(t)w^{\frac{1}{3}}k^2 k_x + \beta_2(t)\Big(\frac{10}{9}w_x^2 k^{\frac{1}{3}} + \frac{5}{3}ww_{xx}k^{\frac{1}{3}}\Big) \tag{10}$$

令:

$$\begin{cases} w(x,t) = w(\xi) = \sum_{i=0}^{p} a_i(t) T^i(\xi) \\ k(x,t) = k(\xi) = \sum_{i=0}^{p} b_i(t) T^i(\xi) \end{cases} \tag{11}$$

平衡(10)中最高阶线性项和非线性项导数的阶数得:

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{7}{3}+1\Big)p + 1 = \Big(\dfrac{1}{3}+1\Big)q + 3 \\ \Big(\dfrac{5}{3}+1\Big)q + 1 = \Big(\dfrac{2}{3}+1\Big)p + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 10p - 4q = 6 \\ 5p - 8q = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = 1 \end{cases} \tag{12}$$

将 p,q 的值代入(11)中可得:

$$\begin{cases} w = a_0(t) + a_1(t)T, \\ k = b_0(t) + b_1(t)T \end{cases} \tag{13}$$

将 w,k 代入方程组(10)化简得:

$$\begin{cases} \frac{5}{3}k^{\frac{5}{3}}[a_0(t)a'_0(t) + a_0(t)a'_1(t)T - a_0(t)a_1(t)T'X'(t) + a_1(t)a'_0(t)T + a_1(t)a'_1(t)T^2 - a_1^2(t)TT'X'(t) + \alpha_1(t)w^{\frac{8}{3}}a_1(t)T'] + \frac{3}{4}\beta_1(t)w^{\frac{1}{3}}[-\frac{2}{9}b_1^3(t)(T')^3 + b_0(t)b_1^2(t)T'T'' + b_1^3(t)TT'T'' + b_0^2(t)b_1(t)T''' + 2b_0(t)b_1^2(t)TT''' + b_1^3(t)T^2T'''] = 0 \\ \frac{4}{3}w^{\frac{1}{3}}[k^{\frac{2}{3}}(b'_0(t) + b'_1(t)T - b_1T'X'(t)) + \alpha_2(t)b_0^2(t)b_1(t)T' + 2\alpha_2(t)b_0(t)b_1^2(t)TT' + \alpha_2(t)b_1^3(t)T^2T'] + \frac{5}{3}\beta_2(t)k^{\frac{1}{3}}[\frac{2}{3}a_1^2(t)(T')^2 + a_0(t)a_1(t)T'' + a_1^2(t)TT''] = 0 \end{cases} \tag{14}$$

利用关系式 $T' = 1 - T^2$ 化简,并令 T 及 T 的各阶导数的同次幂项系数为零,可得到如下代数方程组:

$$\begin{cases} 45a_0(t)a'_0(t) - 45a_0(t)a_1(t)X'(t) + 45\alpha_1(t)w^{\frac{8}{3}}a_1(t) - 8\beta_1(t)b_1^3(t) - 72\beta_1(t)b_0^2(t)b_1(t) = 0, \\ 5a_0(t)a'_1(t) + 5a_1(t)a'_0(t) - 5a_1^2(t)X'(t) - 24\beta_1(t)b_0(t)b_1^2(t) = 0, \\ 15a_0(t)a_1(t)X'(t) + 15a_1(t)a'_1(t) - 15\alpha_1(t)w^{\frac{8}{3}}a_1(t) - 40\beta_1(t)b_1^3(t) + 96\beta_1(t)b_0^2(t)b_1(t) = 0, \\ a_1^2(t)X'(t) + 16\beta_1(t)b_0(t)b_1^2(t) = 0, \\ 17\beta_1(t)b_1^3(t) - 9\beta_1(t)b_0^2(t)b_1(t) = 0, \\ -56\beta_1(t)b_0(t)b_1^2(t) = 0, \\ -280\beta_1(t)b_1^3(t) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases}6b'_0(t)+6\alpha_2(t)b_0^2(t)b_1(t)+\\ \quad 5\beta_2(t)a_1^2(t)-bb_1(t)X'(t)=0,\\ b'_1(t)+4\alpha_2(t)b_0(t)b_1^2(t)=0,\\ 4b_1(t)X'(t)-\alpha_2(t)b_1^3(t)-\\ \quad 4\alpha_2(t)b_0^2(t)b_1(t)=0.\end{cases} \tag{16}$$

利用吴消元法[13]并结合 Maple 求解代数方程组(15)、(16)得到如下两组解：

情形一 $a_0(t)$为未定常数,$a_1(t)=\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}$, $b_0(t)=-\frac{5}{6}\int\beta_2(t)a_1^2(t)dt+c_1$ (c_1 为积分常数), $b_1(t)=0, X(t)=-\frac{a_0(t)}{\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}}+2\arctan(\frac{a_0(t)}{\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}})+c_2$,($c_2$ 为任意常数).

于是,方程组(10)的解为：

$$\begin{cases}w=a_0(t)+\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}\tanh(\xi)\\ k=-\frac{5}{6}\int\beta_2(t)a_1^2(t)dt+c_1\end{cases} \tag{17}$$

所以,方程组(5)的解为：

$$\begin{cases}u=[a_0(t)+\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}\\ v=[-\frac{5}{6}\int\beta_2(t)a_1^2(t)dt+c_1]^{\frac{4}{3}}\end{cases} \tag{18}$$

其中：

$$\xi=x+\frac{a_0(t)}{\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}}-2\arctan(\frac{a_0(t)}{\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}})+c_2.$$

情形二 $a_0(t)$为未定常数,$a_1(t)=-\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}$, $b_0(t)=-\frac{5}{6}\int\beta_2(t)a_1^2(t)dt+c_1$ (c_1 为积分常数), $b_1(t)=0, X(t)=\frac{a_0(t)}{\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}}-2\arctan(\frac{a_0(t)}{\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}})+c_2$,($c_2$ 为任意常数).

于是,方程组(10)的解为：

$$\begin{cases}w=a_0(t)-\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}\tanh(\xi)\\ k=-\frac{5}{6}\int\beta_2(t)a_1^2(t)dt+c_1\end{cases} \tag{19}$$

所以,方程组(5)的解为：

$$\begin{cases}u=a_0(t)+\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}\tanh(\xi)\\ v=-\frac{5}{6}\int\beta_2(t)a_1^2(t)dt+c_1\end{cases} \tag{20}$$

其中：

$$\xi=x-\frac{a_0(t)}{\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}}-2\arctan(\frac{a_0(t)}{\sqrt{-a_0^2(t)+c_1}})+c_2.$$

2.2 时变系数下非线性项对称耦合 KdV 和 Burgers 方程组的解

考虑如下方程组：

$$\begin{cases}u_t+\alpha_1(t)vv_x+\beta_1(t)u_{xxx}=0\\ v_t+\alpha_2(t)uu_x+\beta_2(t)v_{xx}=0\end{cases} \tag{21}$$

把方程(21)的行波解设为：

$$\begin{cases}u(x,t)=u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_i(t)F^i(\xi)\\ v(x,t)=v(\xi)=\sum_{i=0}^{n}b_i(t)T^i(\xi)\end{cases} \tag{22}$$

其中,$\xi=x-X(t)$,$X(t)$为待定的随时间变化的函数.

将行波变换(22)代入方程组(21)中得到如下形式的常微分方程组：

$$\begin{cases}-X'(t)u'+\alpha_1(t)vv'+\beta_1(t)u'''=0\\ -X'(t)v'+\alpha_2(t)uu'+\beta_2(t)v''=0\end{cases} \tag{23}$$

根据齐次平衡法,分别平衡方程组(23)中两个方程的线性最高阶导数项和非线性项的阶数,有

$$\begin{cases}m+3=2n+1\\ n+2=2m+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{4}{3}\\ n=\frac{5}{3}\end{cases} \tag{24}$$

m,n 都是分数阶. 再作变换：

$$u=w^{\frac{4}{3}},\quad v=k^{\frac{5}{3}} \tag{25}$$

$$\begin{cases}w(x,t)=w(\xi)=\sum_{i=0}^{p}a_i(t)F^i(\xi)\\ k(x,t)=k(\xi)=\sum_{i=0}^{q}b_i(t)T^i(\xi)\end{cases} \tag{26}$$

经计算得：

$$\begin{cases}p=1\\ q=1\end{cases} \tag{27}$$

故有

$$\begin{cases}w(x,t)=w(\xi)=a_0(t)+a_1(t)F(\xi)\\ k(x,t)=k(\xi)=b_0(t)+b_1(t)T(\xi)\end{cases} \tag{28}$$

重复上面的计算过程,可得到如下代数方程组为：

$$\begin{cases}4a_0^2(t)a'_0(t)+5\alpha_1(t)b_1(t)=0,\\ a_0^2(t)a'_1(t)+2a_0(t)a'_0(t)a_1(t)=0,\\ -a_0^2(t)a_1(t)X'(t)+\beta_1(t)a_0^2(t)a_1(t)v=0,\\ 2a_0(t)a_1(t)a'_1(t)+a_1^2(t)a'_0(t)=0,\\ -2a_0(t)a_1^2(t)X'(t)+3\beta_1(t)a_0(t)a_1^2(t)v=0,\\ 4a_1^2(t)a'_0(t)=0,\\ -a_1^3(t)X'(t)+2\beta_1(t)a_1^3(t)V+\\ \quad 6\beta_1(t)a_0^2(t)a_1(t)\mu=0,\\ -8\beta_1(t)a_1^3(t)=0,\\ 56\beta_1(t)a_0(t)a_1^2(t)\mu=0,\\ 32\beta_1(t)a_1^3(t)\mu=0.\end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases}3b_0(t)b'_0(t)-3b_0(t)b_1(t)X'(t)+\\ \quad 2\beta_2(t)b_1^2(t)=0,\\ b_0(t)b'_1(t)+b_1(t)b'_0(t)-\\ \quad b_1^2(t)X'(t)-2\beta_2(t)b_0(t)b_1(t)=0,\\ 3b_0(t)b_1(t)X'(t)+3b_1(t)b'_1(t)-\\ \quad 10\beta_2(t)b_1^2(t)=0,\\ b_1^2(t)X'(t)+2\beta_2(t)b_0(t)b_1(t)=0,\\ 4\alpha_2(t)a_1(t)=0.\end{cases} \tag{30}$$

为了得到更多类型的孤波解,我们将按 μ,η,λ 取不同的值,分以下三种情形讨论,可得到方程组(29)、(30)的解.

情形一

(1) $a_0(t)=\left[-\frac{15c_1}{4}\int\frac{\alpha_1(t)}{b_0(t)}dt+c_3\right]^{\frac{1}{3}}$, $a_1(t)=0$, $b_0(t)$ 为未定常数, $b_1(t)=\frac{c_1}{b_0(t)}$, $X(t)=\frac{2c_1}{3}\int\frac{\beta_2(t)}{b_0^2(t)}dt+c_2$ (c_1,c_2,c_3 为积分常数).

此时可得方程组(21)的解为:

$$\begin{cases}u=\left[-\frac{15c_1}{4}\int\frac{\alpha_1(t)}{b_0(t)}dt+c_3\right]^{\frac{4}{9}},\\ v=\left[b_0(t)+\frac{c_1}{b_0(t)}\tanh(\xi)\right]^{\frac{5}{3}}\end{cases} \tag{31}$$

其中: $\xi=x-\frac{2c_1}{3}\int\frac{\beta_2(t)}{b_0^2(t)}dt+c_2$.

(2) $a_0(t)=\frac{1}{2}\left[-\frac{15\alpha_1(t)}{4}\int\frac{\alpha_1(t)}{b_0(t)}dt+8c_1\right]^{\frac{1}{3}}$, $a_1(t)=0$, $b_0(t)=\frac{8c_2\beta_2(t)}{\alpha_1(t)}$, $b_1(t)=\frac{\alpha_1(t)}{8\beta_2(t)}$, $X(t)=\frac{\alpha_1^4(t)+c_2^2\beta_2^4(t)+c_3\alpha_1^2(t)\beta_2^2(t)}{32c_2\alpha_1^2(t)\beta_2^2(t)}$ (c_1,c_2,c_3 为积分常数).

此时可得方程组(21)的解为:

$$\begin{cases}u=\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\left[-\frac{15\alpha_1(t)}{4}\int\frac{\alpha_1(t)}{b_0(t)}dt+8c_1\right]^{\frac{4}{9}},\\ v=\left[\frac{8c_2\beta_2(t)}{\alpha_1(t)}+\frac{\alpha_1(t)}{8\beta_2(t)}\tanh(\xi)\right]^{\frac{5}{3}}\end{cases} \tag{32}$$

其中: $\xi=x-\frac{\alpha_1^4(t)+c_2^2\beta_2^4(t)+c_3\alpha_1^2(t)\beta_2^2(t)}{32c_2\alpha_1^2(t)\beta_2^2(t)}$.

情形二

当 $\mu=r^2,\eta=-1-r^2,\lambda=1,F=\mathrm{sn}\xi$ 时,得出如下三组解:

(1) $a_0(t)=0$, $a_1(t)=-40^{\frac{2}{5}}\eta^{-\frac{2}{5}}\delta(t)$, $b_0(t)=0$, $b_1(t)=40^{\frac{1}{5}}\eta^{\frac{1}{5}}\varepsilon(t)$, $X(t)=c$, (c 为未定常数), 其中

$$\delta(t)=\frac{[\alpha_1(t)\alpha_2^3(t)\beta_2^2(t)\beta_1^4(t)]^{\frac{2}{5}}}{2\alpha_2(t)\beta_1^2(t)\beta_2(t)},$$

$$\varepsilon(t)=\frac{[\alpha_1(t)\alpha_2^3(t)\beta_2^2(t)\beta_1^4(t)]^{\frac{1}{5}}}{\beta_1(t)\beta_2(t)}.$$

此时可得方程组(21)的解为:

$$\begin{cases}u=[-40^{\frac{2}{5}}(1+r^2)^{-\frac{2}{5}}\delta(t)\sqrt{1-\mathrm{cn}^2\xi}]^{\frac{4}{3}},\\ v=[-40^{\frac{1}{5}}(1+r^2)^{-\frac{1}{5}}\varepsilon(t)\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}\end{cases} \tag{33}$$

当 $r\to1$ 时, $\mathrm{sn}\xi\to\tanh\xi$, $\mathrm{cn}\xi\to\mathrm{sech}\xi$, 可得到其相应的类冲击波解为:

$$\begin{cases}u=[-20^{\frac{2}{5}}\delta(t)\tanh(\xi)]^{\frac{4}{3}},\\ v=[-20^{\frac{1}{5}}\varepsilon(t)\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}\end{cases} \tag{34}$$

当时 $r\to0$, $\mathrm{sn}\xi\to\sin\xi$, $\mathrm{cn}\xi\to\cos\xi$, 可得到其相应的类三角函数周期型解:

$$\begin{cases}u=[-40^{\frac{2}{5}}\delta(t)\sin(\xi)]^{\frac{4}{3}},\\ v=[-40^{\frac{1}{5}}\varepsilon(t)\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}\end{cases} \tag{35}$$

其中: $\xi=x-c$ (c 为未定常数).

(2) $a_0(t)=0$, $a_1(t)=-5^{\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}\phi(t)$,

$$b_0(t)=-\sqrt{\frac{\gamma(t)-40^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}}\varphi(t)}{3\beta_2(t)}},\ b_1(t)=c_2,$$

$$X(t)=\frac{2\sqrt{-3\beta_2(t)[\gamma(t)-40^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}}\varphi(t)]}}{3c_2}t+$$

c_1, (c_1 为任意常数, c_2 为未定常数), 其中:

$$\phi(t)=\frac{[c_2\alpha_1(t)\beta_1^2(t)]^{\frac{1}{3}}}{\beta_1(t)},$$

$$\phi(t)=\frac{\alpha_2(t)[c_2\alpha_1(t)\beta_1^2(t)]^{\frac{1}{3}}}{\beta_1(t)},$$

$\gamma(t)=c_2^2\beta_2(t)$.

此时可得方程组(21)的解为：

$$\begin{cases}u=[5^{\frac{1}{3}}(1+r^2)^{-\frac{1}{3}}\phi(t)\sqrt{1-\mathrm{cn}^2\xi}]^{\frac{4}{3}}\\ v=[-\sqrt{-\frac{\gamma(t)+40^{\frac{1}{3}}(1+r^2)^{-\frac{1}{3}}\phi(t)}{3\beta_2(t)}}+\\ \quad c_2\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}\end{cases}\tag{36}$$

当 $r\to1$ 时，$\mathrm{sn}\xi\to\tanh\xi$，$\mathrm{cn}\xi\to\mathrm{sech}\xi$，可得到对应的类冲击波解为：

$$\begin{cases}u=[(\frac{5}{2})^{\frac{1}{3}}\phi(t)\tanh(\xi)]^{\frac{4}{3}}\\ v=[-\sqrt{-\frac{\gamma(t)+20^{\frac{1}{3}}\phi(t)}{3\beta_2(t)}}+c_2\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}\end{cases}\tag{37}$$

其中：

$$\xi=x-\frac{2\sqrt{-3\beta_2(t)[\gamma(t)+20^{\frac{1}{3}}\varphi(t)]}}{3c_2}t+c_1$$

当 $r\to0$ 时，$\mathrm{sn}\xi\to\sin\xi$，$\mathrm{cn}\xi\to\cos\xi$，可得到其相应的类三角函数周期型解：

$$\begin{cases}u=[5^{\frac{1}{3}}\phi(t)\sin\xi]^{\frac{4}{3}}\\ v=[-\sqrt{-\frac{\gamma(t)+40^{\frac{1}{3}}\phi(t)}{3\beta_2(t)}}+c_2\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}\end{cases}\tag{38}$$

其中：

$$\xi=x-\frac{2\sqrt{-3\beta_2(t)[\gamma(t)+40^{\frac{1}{3}}\varphi(t)]}}{3c_2}t+c_1.$$

(3) $a_0(t)=0, a_1(t)=-5^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}}\phi(t)$,

$$b_0(t)=\sqrt{-\frac{\gamma(t)+40^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}}\phi(t)}{3\beta_2(t)}}, b_1(t)=c_2,$$

$$X(t)=-\frac{2\sqrt{-3\beta_2(t)[\gamma(t)+40^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}}\varphi(t)]}}{3c_2}t$$

$+c_1$(c_1 为任意常数，c_2 为未定常数)，

其中

$$\phi(t)=\frac{[c_2\alpha_1(t)\beta_1^2(t)]^{\frac{1}{3}}}{\beta_1(t)},$$

$$\varphi(t)=\frac{\alpha_2(t)[c_2\alpha_1(t)\beta_1^2(t)]^{\frac{1}{3}}}{\beta_1(t)},$$

$\gamma(t)=c_2^2\beta_2(t)$.

此时可得方程组(21)的解为：

$$\begin{cases}u=[5^{\frac{1}{3}}(1+r^2)^{-\frac{1}{3}}\phi(t)\mathrm{sn}\xi]^{\frac{4}{3}}\\ v=[\sqrt{-\frac{\gamma(t)+40^{\frac{1}{3}}(1+r^2)^{-\frac{1}{3}}\phi(t)}{3\beta_2(t)}}+\\ \quad c_2\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}\end{cases}\tag{39}$$

当 $r\to1$ 时，$\mathrm{sn}\xi\to\tanh\xi$，$\mathrm{cn}\xi\to\mathrm{sech}\xi$，可得到其相应的类冲击波解为：

$$\begin{cases}u=[(\frac{5}{2})^{\frac{1}{3}}\phi(t)\tanh(\xi)]^{\frac{4}{3}}\\ v=[\sqrt{-\frac{\gamma(t)+20^{\frac{1}{3}}\phi(t)}{3\beta_2(t)}}+c_2\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}\end{cases}\tag{40}$$

其中：

$$\xi=x+\frac{2\sqrt{-3\beta_2(t)[\gamma(t)+20^{\frac{1}{3}}\varphi(t)]}}{3c_2}t+c_1.$$

当 $r\to0$ 时，$\mathrm{sn}\xi\to\sin\xi$，$\mathrm{cn}\xi\to\cos\xi$，可得到其相应的类三角函数周期型解

$$\begin{cases}u=[5^{\frac{1}{3}}\phi(t)\sin\xi]^{\frac{4}{3}}\\ v=[\sqrt{-\frac{\gamma(t)+40^{\frac{1}{3}}\phi(t)}{3\beta_2(t)}}+c_2\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}\end{cases}\tag{41}$$

其中：

$$\xi=x+\frac{2\sqrt{-3\beta_2(t)[\gamma(t)+40^{\frac{1}{3}}\varphi(t)]}}{3c_2}t+c_1.$$

情形三

当 $\mu=-r^2$, $\eta=2r^2-1$, $\lambda=1-r^2$, $F=\mathrm{cn}\xi$，得出如下两组解：

(1) $a_0(t)=c_1, a_1(t)=0, b_0(t)=0, b_1(t)=c_2e^{-2\beta_2(t)t}, X(t)=c_3$.

此时，我们得到(21)的解为

$$\begin{cases}u=c_1^{\frac{4}{3}},\\ v=[c_2e^{-2\beta_2(t)t}\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}.\end{cases}\tag{42}$$

其中：$\xi=x-c_3$(c_1, c_3 为未定常数，c_2 为任意常数).

(2) $a_0(t)=c_1, a_1(t)=0, b_0(t)=b_1(t)=c_2$,

$X(t)=-2\int\beta_2(t)dt+c_3$.

$$\begin{cases}u=c_1^{\frac{4}{3}},\\ v=[c_2+c_2\tanh(\xi)]^{\frac{5}{3}}.\end{cases}\tag{43}$$

其中:$\xi = x + 2\int \beta_2(t)dt + c_3$ (c_1, c_2 为未定常数,c_3 为任意常数).

2.3 时变系数下非线性项非对称耦合 KdV 和 Burgers 方程组的解

考虑如下方程组:

$$\begin{cases} u_t + \alpha_1(t)uv_x + \beta_1(t)u_{xxx} = 0 \\ v_t + \alpha_2(t)vu_x + \beta_2(t)v_{xx} = 0 \end{cases} \tag{44}$$

其中 $\alpha_1(t)$,$\alpha_2(t)$ 为对流项系数,$\beta_1(t)$,$\beta_2(t)$ 分别为色散项与扩散项的系数.

采用扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法和扩展的双曲函数展开法来讨论时变系数下非线性项非对称耦合 KdV 和 Burgers 方程组(44)的孤波解. 令:

$$u(x,t) = u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i(t)F^i(\xi),$$

$$v(\xi) = \sum_{i=0}^{n} b_i(t)S^i + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)TS^{i-1}.$$

其中 $\xi = x - X(t)$,$X(t)$ 为待定的随时间变化的函数.

通过一系列的计算化简,为得到更多类型的孤波解,我们分别令 μ, p, λ 取不同的值,可得到以下三种情形下的解.

情形一

$a_0(t)$ 为未定常数,$a_1(t) = 0$,$b_0(t)$ 为未定常数,$b_1(t) = c_1 e^{\int \beta_2(t)dt}$,$b_2(t) = c_2 e^{2\int \beta_2(t)dt}$,$c_1(t) = c_2(t) = 0$,$X(t) = \eta c_3 \int \beta_1(t)dt$ (c_1, c_2, c_3 为积分常数).

此时,方程组(44)的解为:

$$\begin{cases} u = a_0(t), \\ v = b_0(t) + c_2 e^{2\int \beta_2(t)dt} + c_1 e^{\int \beta_2(t)dt}\operatorname{sech}\xi - \\ \quad c_2 e^{2\int \beta_2(t)dt}\tanh^2(\xi) \end{cases} \tag{45}$$

其中:$\xi = x - \eta c_3 \int \beta_1(t)dt$.

情形二

当 $\mu = r^2$,$\eta = -1 - r^2$,$\lambda = 1$ 时,此时 $F = \operatorname{sn}\xi$ 可得如下两组解:

(1) $a_0(t) = \dfrac{2\beta_2(t)[-b\mu\beta_1(t)t + c_4]}{\alpha_2(t)} + c_1$,

$a_1(t) = \dfrac{2\beta_2(t)}{\alpha_2(t)}$,$b_0(t) = c_2 e^{-2\beta_2(t)t}$,

$b_1(t) = b_2(t) = 0$,$c_1(t) = c_2(t) = 0$,

$X(t) = -\beta_1(t)(-\eta + 6\mu)t + c_4$ (c_1 为待定常数,c_2, c_3, c_4 为任意常数).

此时,方程组(44)的解为:

$$\begin{cases} u = \dfrac{2\beta_2(t)[-6r^2\beta_1(t)t + c_4]}{\alpha_2(t)} + c_1 + \\ \quad \dfrac{2\beta_2(t)}{\alpha_2(t)}\sqrt{1 - \operatorname{cn}^2\xi}, \\ v = c_2 e^{-2\beta_2(t)t} \end{cases} \tag{46}$$

当 $r \to 1$ 时,$\operatorname{sn}\xi \to \tanh\xi$,$\operatorname{cn}\xi \to \operatorname{sech}\xi$,$\operatorname{dn}\xi \to \operatorname{sech}\xi$,可得相应的类冲击波解:

$$\begin{cases} u = \dfrac{2\beta_2(t)[-6\beta_1(t)t + c_4]}{\alpha_2(t)} + c_1 + \\ \quad \dfrac{2\beta_2(t)}{\alpha_2(t)}\tanh(\xi), \\ v = c_2 e^{-2\beta_2(t)t} \end{cases} \tag{47}$$

当 $r \to 0$ 时,$\operatorname{sn}\xi \to \sin\xi$,$\operatorname{cn}\xi \to \cos\xi$,可得到其相应的类三角函数周期型解:

$$\begin{cases} u = \dfrac{2c_4\beta_2(t)}{\alpha_2(t)} + c_1 + \dfrac{2\beta_2(t)}{\alpha_2(t)}\sin(\xi), \\ v = c_2 e^{-2\beta_2(t)t} \end{cases} \tag{48}$$

其中:$\xi = x + \beta_1(t)t + c_4$.

(2) $a_0(t) = c_1[-6\mu\beta_1(t)t + c_4] + c_2$,$a_1(t) = c_1$,

$b_0(t) = c_3 e^{-2c_1\alpha_2(t)t}$,$b_1(t) = b_2(t) = 0$,

$c_1(t) = c_2(t) = 0$,$X(t) = -\beta_1(t)(-\eta + 6\mu)t + c_4$ (c_1 为待定常数,c_2, c_3, c_4 为任意常数).

此时,方程组(44)的解为:

$$\begin{cases} u = c_1[-6r^2\beta_1(t)t + c_4] + c_2 + \dfrac{c_1}{r}\sqrt{1 - \operatorname{dn}^2\xi}, \\ v = c_3 e^{-2c_1\alpha_2(t)t} \end{cases} \tag{49}$$

当 $r \to 1$ 时,$\operatorname{sn}\xi \to \tanh\xi$,$\operatorname{cn}\xi \to \operatorname{sech}\xi$,$\operatorname{dn}\xi \to \operatorname{sech}\xi$,可得到相应的类冲击波解:

$$\begin{cases} u = c_1[-6\beta_1(t)t + c_4] + c_2 + c_1\tanh(\xi), \\ v = c_3 e^{-2c_1\alpha_2(t)t} \end{cases} \tag{50}$$

当 $r \to 0$ 时,$\operatorname{sn}\xi \to \sin\xi$,$\operatorname{cn}\xi \to \cos\xi$,可得到其相应的类三角函数周期型解:

$$\begin{cases} u = c_2 + c_1\sin\xi \\ v = c_3 e^{-2c_1\alpha_2(t)t} \end{cases} \tag{51}$$

其中:$\xi = x + \beta_1(t)t + c_4$.

情形三

当 $\mu=-r^2,\eta=2r^2-1,\lambda=1-r^2$ 时，此时 $F=\mathrm{cn}\xi$，可得到如下两组解：

(1) $a_0(t)=c_1,a_1(t)=0,b_0(t)=c_2,b_1(t)=0$,

$b_2(t)=c_3e^{-4\beta_2(t)t},c_1(t)=c_2(t)=0$,

$X(t)=c_4$ (c_1,c_2 为未定常数，c_3,c_4 为任意常数).

此时，方程组(44)的解为：

$$\begin{cases}u=c_1\\ v=c_3e^{-4c_1\beta_2(t)t}\mathrm{sech}^2\xi\end{cases}\tag{52}$$

根据关系式可得到相应的类冲击波解为：

$$\begin{cases}u=c_1\\ v=c_3e^{-4c_1\beta_2(t)t}-c_3e^{-4\beta_2(t)}\tanh^2(\xi)\end{cases}\tag{53}$$

其中：$\xi=x-c_4$.

(2) $a_0(t)=c_1,a_1(t)=c_2,b_0(t)=-2c_3e^{-4\beta_2(t)t}$,

$b_1(t)=0,b_2(t)=c_3e^{-4\beta_2(t)t},c_1(t)=c_2(t)=0$,

$X(t)=\beta_1(t)\eta t+c_4$ (c_1,c_2 为未定常数，c_3,c_4 为任意常数).

此时，方程组(44)的解为：

$$\begin{cases}u=c_1+c_2\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\xi}\\ v=-2c_3e^{-4\beta_2(t)t}+c_3e^{-4\beta_2(t)}\mathrm{sech}^2\xi\end{cases}\tag{54}$$

当 $r\to1$ 时，$\mathrm{sn}\xi\to\tanh(\xi)$，$\mathrm{cn}\xi\to\mathrm{sech}\xi$，可得到相应的类孤立波解：

$$\begin{cases}u=c_1+c_2\mathrm{sech}\xi,\\ v=-2c_3e^{-4\beta_2(t)t}+c_3e^{-4\beta_2(t)}\mathrm{sech}^2\xi\end{cases}\tag{55}$$

其中：$\xi=x-\beta_1(t)t+c_4$.

当 $r\to0$ 时，$\mathrm{sn}\xi\to\sin\xi$，$\mathrm{cn}\xi\to\cos\xi$，可得到相应的类三角函数周期型解：

$$\begin{cases}u=c_1+c_2\cos\xi,\\ v=-2c_3e^{-4\beta_2(t)t}+c_3e^{-4\beta_2(t)}\mathrm{sech}^2\xi\end{cases}\tag{56}$$

根据关系式可得到相应的类冲击波解为：

$$\begin{cases}u=c_1+c_2\cos\xi,\\ v=-2c_3e^{-4\beta_2(t)t}+c_3e^{-4\beta_2(t)}-c_3e^{-4\beta_2(t)}\tanh^2\xi\end{cases}\tag{57}$$

其中：$\xi=x+\beta_1(t)t+c_4$.

3 结论

通过求解三类时变系数下耦合 KdV 和 Burgers 方程组的孤波解，我们可以得出以下结论：

(1)在 2.1 中的两组解中，因为 $a_0(t)$ 为待定常数，所以波速 $X(t)$ 是常数，则波的速度在传播过程中不发生改变，即所得的孤波解为常速波解.

(2)在 2.2 中，由行波解中的 $X(t)$ 可确定除了情形二中的第 1 组解和情形三中的第 1 组解外，其余的所有解都跟时间有关，因此均为变速解.

(3)在 2.3 中，除了情形三中的第一组解为常数解外，其余各组解中的 $X(t)$ 都是随时间 t 变化的函数，即为变速解.

参考文献

1 张翼. 基于双线性方法的孤子可积系统[博士学位论文]. 上海：上海大学，2004：97 ~ 101 (Zhang Y. Soliton and integrable systems based on bilinear method[PhD Thesis]. Shanghai: Shanghai University, 2004: 97 ~ 101 (in Chinese))

2 Wahlquist H D, Estabrook F B. Bäcklund transformation for solitons of the Korteweg-de Vries equation. *Physical Review Letters*, 1973, 31: 1386 ~ 1390

3 Hirota Ryogo. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Physical Review Letters*, 1971, 27(18): 1192 ~ 1194

4 Wang M L. Application of homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 1996, 16: 67

5 石玉仁，吕克璞，段文山等. 变系数 Burgers 方程的精确解. 兰州大学学报(自然科学版)，2005，41(4)：107 ~ 111 (Shi Y R, Lv K P, Duan W S, et al. Exact solutions of Burgers equation with variable coefficients. *Journal of Lanzhou University (Natural Science)*, 2005, 41(4): 107 ~ 111 (in Chinese))

6 Liu S K, Fu Z T, Liu S D et al. Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. *Physics Letters A*, 2001, 289(1): 69 ~ 74

7 韩家骅，徐勇，陈良等. KdV 方程的精确解析解. 安徽大学学报(自然科学版)，2002，3(3)：44 ~ 50 (Han J H, Xu Y, Chen L, et al. Explicit exact solutions to KdV equation. *Journal of Anhui University (Natural Science Edition)*, 2002, 3(3): 44 ~ 50 (in Chinese))

8 李德生. (2 + 1)-维 Burgers 方程的精确解. 沈阳工业大学学报，2003，25(6)：225 ~ 226 (Li D S. Exact solutions of (2 + 1)-dimesional Burgers Equation. *Journal of Shenyang University of Technology*, 2003, 25(6): 225 ~ 226 (in Chinese))

9 化存才.非线性波动问题的若干时空动力学研究[博士后出站报告].上海:上海交通大学,2002.(Hua C C. Studies on several spatiotemporal dynamics of nonlinear wave problems[Reports]. Shanghai:Shanghai Jiao Tong University,2002(in Chinese))

10 贾秀娟.含扰动非线性波方程的 Jacobi 椭圆函数展开法及其在 KdV 类方程中的应用[硕士学位论文].云南:云南师范大学,2008 (Jia X J. Nonlinear wave equations with perturbation of Jacobi elliptic function expansion method and its application in KdV-type equation[Master Degree Dissertation]. Yunnan:Yunnan Normal University,2008(in Chinese))

11 化存才,陆启韶,任维等. 数学应用工程研究.北京:科学出版社,2010:26～31 (Hua C C,Lu Q S,Ren W et al. The study of mathematical applied engineering. Beijing:Science Press. 2010:26～31(in Chinese))

12 李志斌.非线性数学物理方程的行波解.北京:科学出版社, 2007:96～97 (Li Z B. The traveling wave solutions of nonlinear mathematical physics equations. Beijing:Science Press. 2007:96～97(in Chinese))

13 张鸿庆.弹性力学方程组一般解的统一理论.大连理工大学学报,1978,18～23 (Zhang H Q. A united theory on general solutions of systems of elasticity equation. *Journal of Dalian University of Technology*, 1978,18～23 (in Chinese))

SOLITARY WAVE SOLUTIONS FOR COUPLED KDV-BURGERS EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS *

Gao Xiang　Hua Cuncai†　Hu Dongpo

(*School of Mathematics*, *Yunnan Normal University*, *Kunming* 650500, *China*)

Abstract Based on the hyperbolic function expansion method and Jacobi elliptic function expansion method, their extended forms were applied to discuss three kinds of coupled KdV-Burgers equations with variable coefficients, and some solitary wave solutions in different situations were derived, including soliton-like solutions, shock-wave-like solutions and trigonometric-function-like periodic solutions.

Key words hyperbolic function expansion method, Jacobi elliptic function expansion method, coupled KdV-Burgers equations with variable coefficients, solitary wave solutions

Received 5 December 2012, revised 13 June 2013.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10772158, 11162020) and the Planning Program of Leading Youth Scholars of Science and Technology of Yunnan Province of China (2008PY059)

† Corresponding author E-mail: cuncai-hua@139.com