

# 考虑推进剂晃动的火箭液固耦合分析的比拟算法\*

朱昶帆<sup>1</sup> 唐国安<sup>1</sup> 张美艳<sup>1,2†</sup>

(1. 复旦大学力学与工程科学系, 上海 200433) (2. 上海市空间飞行器机构重点实验室, 上海 201108)

**摘要** 对于弹性容器与不可压无黏液体之间的线性耦合问题, 已有缩聚对称形式的液固耦合系统有限元方程. 利用比拟算法获得液固耦合系统的系统矩阵, 将问题转化为通用有限元程序可以解决的问题. 以包含贮箱的火箭模型为例, 求解火箭的模态特性, 其中包括由液体晃动所引起的火箭振动模态. 结果表明此类模态与重力加速度有关, 频率随重力加速度的增大而增大.

**关键词** 液固耦合, 贮箱, 有限元方法, 比拟

DOI: 10.6052/1672-6553-2014-044

## 引言

现今大型运载火箭多采用液体推进剂, 而液体推进剂的质量占火箭起飞总质量较大比重. 推进剂的晃动效应对火箭的运动稳定性与振动环境都将产生影响. 在火箭上升过程中, 推进剂的质量的不断变化对于耦合分析的时效性提出了更高的要求. 另外火箭应处于稳定的工作状态, 因此线性晃动的耦合问题仍有研究意义. 出于以上考虑, 本文主要采用有限元方法作为理论基础. 液固耦合问题的有限元方法在发展初期就被提出了, 一般为位移-压力格式<sup>[1]</sup>. 吴兴世通过自由界面模态综合法建立了贮液容器的缩聚对称的液固耦合有限元方程<sup>[2]</sup>. Andrianarison 将流体的可压缩性纳入考量, 建立了缩聚对称的数学模型<sup>[3]</sup>. 朱琳等人通过求解等价的 Laplace 边值问题, 得到了液体对结构的附加矩阵<sup>[4]</sup>. 本文的主要工作是将 Laplace 边值问题转化为有限元程序能够求解的弹性力学和热传导问题, 利用程序的规范性, 提高了液固耦合振动分析的稳定性和可操作性. 由于本文方法考虑了液体晃动, 可以对晃动引起的相关现象做初步的研究.

## 1 理论基础

### 1.1 问题描述

假设贮箱内液体无黏、不可压缩且无旋, 则液

体压力  $p$  满足 Laplace 方程. 图 1 为液固耦合模型的示意图, 数学问题可以描述为:

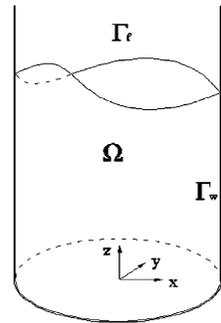


图 1 贮箱示意图

Fig. 1 Tank and liquid

$$\nabla^2 p = 0 \quad (\text{在液体所在区域 } \Omega) \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\rho_f \ddot{u}_n \quad (\text{在接触面 } \Gamma_w \text{ 上}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{g} \ddot{p}_n \quad (\text{在自由面 } \Gamma_f \text{ 上}) \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{n}$  是液体区域外法向向量,  $u$  是结构位移;  $\rho_f$  是液体密度,  $g$  是液体所受加速度.

经过缩聚、对称化, 就可以得到液体自由度缩聚到自由面且对称的耦合系统有限元方程组:

$$\begin{bmatrix} \rho_f^{-1} \mathbf{A} & \mathbf{M}_{sf}^T \\ \mathbf{M}_{sf} & \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\xi}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_f^{-1} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{Q}_s \end{Bmatrix} \quad (4)$$

2014-06-17 收到第 1 稿, 2014-07-21 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目 (11202052)

† 通讯作者 E-mail: zhangmy@fudan.edu.cn

其中,  $u$  为结构的节点位移,  $\xi$  为非刚体模态的液体晃动模态的正则坐标.  $\rho_f$  为液体密度,  $\Lambda$  为液体晃动模态的谱矩阵.  $M_s$ 、 $K_s$  为结构的质量矩阵与刚度矩阵.  $M_f$ 、 $K_f$  为液体对结构附加质量矩阵与附加刚度矩阵.  $M_{sf}$  为液体与结构的耦合矩阵.  $Q_s$  为耦合系统之外作用在结构上的外力. 要得到液体与结构耦合系统的模态特性, 式中液体对结构的附加矩阵和耦合矩阵则需要构造获得.

## 1.2 耦合矩阵的构造

根据公式, 当结构保持静止于平衡位置, 结构满足的节点力平衡关系:

$$Q_s = M_{sf} \ddot{\xi} \quad (5)$$

说明液体压力正则坐标以  $\xi$  的加速度晃动时, 液体晃动作用在结构上的节点力为  $-M_{sf} \ddot{\xi}$ .

$\xi$  是  $n_f - 1$  维向量, 其维数比液体自由面压力  $p_f$  少 1. 令  $u = 0, \ddot{u} = 0, \dot{\xi} = e_j$ , 求解此时压力作用在结构上的等效节点力, 将其改变符号, 就得到耦合矩阵的第  $j$  列.

假设已有固壁条件下液体晃动的谱矩阵  $\Lambda$  和正则模态矩阵  $\Psi$ , 将其展开可得:

$$\Lambda = \text{diag}[\omega_1^2, \dots, \omega_j^2, \dots, \omega_{n_f-1}^2]$$

$$\Psi = [\psi_1, \dots, \psi_j, \dots, \psi_{n_f-1}] \quad (6)$$

由于液体晃动的刚体模态  $\psi_0$  由且只由结构位移引起的, 此时结构位移为零, 当  $\dot{\xi} = e_j$  时, 液体自由面压力表示为:

$$p_f = \Psi \dot{\xi} = -\Psi \Lambda^{-1} \ddot{\xi} = -\omega_j^{-2} \psi_j \quad (7)$$

可见, 此时压力与晃动的第  $j$  阶模态有关.

## 1.3 附加质量矩阵的构造

在  $u = 0$  且  $\dot{\xi} = 0$  的条件下, 结构具有加速度  $\ddot{u}$  时所满足的平衡关系为:

$$Q_s = M_s \ddot{u} + M_f \ddot{u} \quad (8)$$

其中,  $-M_f \ddot{u}$  是由于结构运动诱导液体流动后, 液体反作用于结构上的节点力. 令  $\ddot{u} = e_j$ , 求解液体压力分布, 就能得到附加质量矩阵  $M_f$  的第  $j$  列.

此时在液体与结构的接触面  $\Gamma_w$  上, 边界条件为公式. 在液体的自由面  $\Gamma_f$  上, 边界条件用液体自由面函数  $\zeta$  来表示:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \ddot{\zeta} \quad (9)$$

由于液体的不可压缩性, 自由面函数满足

$$\ddot{\zeta} = -\frac{1}{A_f} \int_{\Gamma_w} \ddot{u}_n d\Gamma \quad (10)$$

$A_f$  是液体自由面的面积.

因为液体边界条件都是 Neumann 边界条件, 所以无法唯一确定液体压力, 需要加入补充条件. 由于此时结构位移为零, 液体自由面压力可以通过非刚体晃动模态展开. 求解正则模态矩阵  $\Psi$  时, 会得到缩聚到自由面节点上的液体质量矩阵  $M_{ff}$ . 利用模态正交性得到补充条件后:

$$\psi_0^T \cdot M_{ff} \cdot p_f = 0 \quad (11)$$

就能唯一确定液体压力.

## 1.4 附加刚度矩阵的构造

由式可知, 结构保持静止且液体没有晃动加速度时, 结构的节点力平衡关系为:

$$Q_s = K_s u + K_j u \quad (12)$$

$-K_j u$  为结构位移  $u$  导致液体压力变化反作用于结构的节点力. 令  $\ddot{u} = 0, \dot{\xi} = 0, u = e_j$ , 根据液体连续性条件, 可以算出液面高度为:

$$h = -\frac{1}{A_f} \int_{\Gamma_w} u_n d\Gamma \quad (13)$$

考虑到小变形假设, 液体与结构的接触面上受到静水压. 然后计算出作用在结构上的等效节点力, 改变符号就是附加刚度矩阵的第  $j$  列. 然而结构变形处压力的变化不能忽略, 为了能够消除这一误差可以在附加刚度矩阵中每个节点  $z$  方向的对角元上增加排开液体的重量  $\rho_f g \int_{\Gamma_w} u_n d\Gamma$ .

## 2 比拟算法

### 2.1 耦合矩阵的比拟求解

耦合矩阵可以运用求解弹性体振动模态的方法来比拟, 可以借助通用有限元程序求解液体晃动模态, 进而得到耦合矩阵<sup>[5]</sup>.

弹性体的运动微分方程可以作为液体控制方程的类比, 选取方向上的方程:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (14)$$

其中,  $\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$  是相应方向的应力分量,  $u_z$  是弹性体在  $z$  方向上的位移,  $\rho_s$  则是弹性体的密度.

弹性体是正交各向异性的, 弹性张量有如下形式:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \quad (15)$$

引入位移条件,选择适当的材料属性:

$$u_x = u_y = 0 \tag{16}$$

$$d_{33} = d_{55} = d_{66} = 1 \tag{17}$$

$$\rho_s = 0 \tag{18}$$

那么弹性体的微分方程变成了位移  $u_z$  的 Laplace 方程. 此时控制方程中的  $u_z$  等价于液体压力.

将这一等价关系放入液体的边界条件和中,得到弹性体的边界条件如下:

$$\frac{\partial u_z}{\partial n} = 0 \quad (\text{在接触面 } \Gamma_w \text{ 上}) \tag{19}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial n} = -\frac{1}{g} \ddot{u}_z \quad (\text{在自由面 } \Gamma_f \text{ 上}) \tag{20}$$

根据斜面应力公式,可得:

$$\frac{\partial u_z}{\partial n} = f_z \tag{21}$$

其中,  $f_z$  是弹性体边界上  $z$  方向的面积力.

在自由面  $\Gamma_f$  上,可以不用直接施加力边界,而是通过构造一层厚度为  $h$  的表面层来代替,该表面层的密度  $\rho$  为  $1/g$ . 另外,弹性体在模态分析中的质量矩阵应该选择一致质量矩阵,否则可能得到错误的结果.

### 2.2 附加质量矩阵的比拟求解

附加质量矩阵的  $M_f$  求解可以通过稳态温度分布来比拟. 稳态的热传导问题中,温度所满足的控制方程为 Laplace 方程. 将液体边界中的压力替换为温度  $T$ ,就可以得到稳态热传导问题的边界条件. 根据传热学中的 Fourier 定律,有:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{q}{k} \tag{22}$$

其中  $q$  为热流密度,  $k$  为热传导系数. 将热传导系数  $k$  设为 1,则温度场边界条件即为:

$$q = \rho_f \ddot{u}_n \tag{23}$$

$$q = \rho_f \zeta \tag{24}$$

对应于液体的补充条件,自由面上的节点温度  $T_f$  也需要补充条件,才能唯一确定温度分布.

### 3 数值算例

火箭的整体有限元模型如图 2(a) 所示,其中火箭为二级火箭. 火箭的主体主要由一维有限元单位构成,而第一级火箭中的氧化剂贮箱和燃料贮箱则建立为三维的有限元模型,并加入推进剂有限元模型. 其中,上方贮箱存放的是氧化剂,密度为

1458kg/m<sup>3</sup>,高度为 5.1467m;下方贮箱存放的是燃料,密度为 700kg/m<sup>3</sup>,高度为 4.686m,有限元模型如图 2(b) 所示.

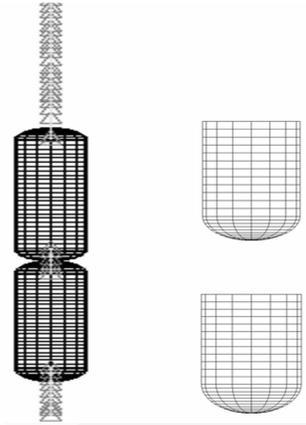


图2 火箭有限元模型

Fig.2 Finite element model of rocket

首先进行在一个重力加速度下的火箭模态分析,分别得到以液体晃动为主的耦合系统模态和以结构振动为主的耦合系统模态. 氧化剂的有限元模型的自由面有 265 个节点,而燃料的自由面上 297 个节点,可知共有 560 个液体晃动模态会导致耦合系统的振动. 其中一些系统模态由于晃动导致耦合系统重心偏移产生了耦合明显的现象,如 0.5544Hz、0.9010Hz 和 1.1424Hz.

其余的耦合系统模态则是以结构振动为主的. 其中,整体纵向振动模态频率为 13.227Hz,整体横向振动模态有 2.5823Hz、15.438Hz,局部振动模态有 5.7557Hz、7.2858Hz、9.5135Hz 和 10.416Hz.

对五倍重力加速度下的火箭进行模态分析. 同样也得到 560 阶液体晃动为主的耦合系统模态. 其中由于重心偏移导致的明显耦合模态频率为 1.2376Hz、2.0145Hz、2.5546Hz. 其余的耦合系统模态则是以结构振动为主的,包括整体纵向振动、整体横向振动模态和局部振动模态. 对应一倍加速度,五倍加速度下的耦合系统模态频率列在表 1 中.

表1 不同重力下火箭的频率

Table 1 Frequencies of the rocket under different gravity

| Frequencies of one time gravity (Hz) | Frequencies of five times gravity (Hz) |
|--------------------------------------|--|
| 0.5544                               | 1.2376                                 |
| 1.1424                               | 2.5546                                 |
| 2.5823                               | 2.6260                                 |
| 5.7557                               | 5.8137                                 |
| 9.5135                               | 9.5349                                 |
| 13.227                               | 13.235                                 |

从表1中可以看出,液体晃动为主的耦合系统模态受到重力变化的影响较大,通过计算可以知道系统的固有频率与过载系数的平方根成正比.而结构振动为主的耦合系统模态则基本没有受到重力变化的影响.

#### 4 结论

本文通过比拟算法对火箭推进剂贮箱的液固耦合系统进行了建模.在缩聚对称形式的液固耦合系统方程组的基础上,分析耦合矩阵、附加质量矩阵和附加刚度矩阵的物理意义,并借助通用有限元程序分别得到了耦合矩阵与附加质量矩阵,并最终获得了耦合系统方程组的完整信息.

本文方法利用通用有限元程序的规范性,在提高液固耦合振动分析效率的同时,保证了分析的稳定性与可操作性.并且因为耦合系统方程组加入了推进剂晃动的考量,因此可以就液体晃动对耦合系统的影响进行初步的研究.对不同重力加速度下的火箭模型进行模态分析,分别得到以结构振动为主的系统耦合模态与以液体晃动为主的系统耦合模态,第一类模态的频率基本与过载系数无关,而第二类模态的频率与过载系数紧密相关,且其中部分模态会引起系统比较明显的耦合振动.

#### 参 考 文 献

- 1 王勖成.有限单元法.北京:清华大学出版社,2003 (Wang X C. Finite element method. Beijing: Tsinghua University Press, 2003 (in Chinese))
- 2 吴兴世.贮液容器水动弹性分析的迦辽金有限元-自由界面模态综合法.固体力学学报,1984,2(1):205~219 (Wu X S. A galerkin finite element unrestrained modal synthesis method for hydroelastic analysis of liquid container. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1984, 2(1): 205~219 (in Chinese))
- 3 Andrianarison O, Ohayon R. Reduced models for modal analysis of fluid-structure systems taking into account compressibility and gravity effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195:5656~5672
- 4 朱琳,唐国安,柳征勇.推进剂与贮箱液固耦合振动的动力学分析.振动与冲击,2012,31(5):139~143 (Zhu L, Tang G A, Liu Z Y. Dynamic analysis for fluid-structure coupled vibration of propellants and fuel tank. *Journal of Vibration and Shock*, 31(5):139~143 (in Chinese))
- 5 Tokuda N, Sakurai T, Teraoku T. Sloshing analysis method using existing FEM structural analysis code. *Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, 1995, 117:268~272

## THE ANALOGY METHOD TO COUPLING ANALYSIS OF ROCKETS CONSIDERING PROPELLANT SLOSHING \*

Zhu Changfan<sup>1</sup> Tang Guoan<sup>1</sup> Zhang Meiyuan<sup>1,2†</sup>

(1. Department of Mechanics & Engineering Science, Fudan University, Shanghai 200433, China)

(2. Shanghai Key Laboratory of Space Aircraft Mechanism, Shanghai 201108, China)

**Abstract** For the linear coupling of the elastic tank and incompressible and inviscid liquid, there are reduced and symmetric finite element equations of coupling system. The system matrix could be obtained by the analogy method, and then the analysis of coupling system will turn to be a problem that could be solved by the general finite element software. For example, the modal characteristics of the rocket with tanks were studied. Coupling modes caused by liquid sloshing were founded, and the result shows the modes of this kind are relevant to the gravity acceleration. In addition, the greater the gravity, the higher the frequency.

**Key words** fluid-structure interaction, tank, finite element method, analogy

Received 17 June 2014, revised 21 July 2014.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11202052)

† Corresponding author E-mail: zhangmy@fudan.edu.cn