

一个粘弹性振子的动力学与控制*

罗佳伟¹ 徐旭^{2†}

(1. 辽宁大学数学学院, 沈阳 110036) (2. 吉林大学数学学院, 长春 130012)

摘要 本文详细分析了一个具有粘弹性项的非线性振子的动力学与控制. 首先研究了系统平衡点的稳定性, 表明系统存在复杂的无界动力学行为. 然后引入时滞速度反馈对这个不稳定系统进行控制. 研究结果表明速度反馈控制能镇定此不稳定的粘弹性系统. 适当的选择控制增益和控制时滞, 控制系统有稳定的平衡点, 由 Hopf 分岔产生的周期解, 拟周期解, 并能展现出复杂的混沌解. 数值模拟验证了结论的正确性.

关键词 稳定性, 粘弹性, 余维 2 分岔, 时滞, Hopf 分岔

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-104

引言

粘弹性物质在很多领域被广泛应用, 如结构振动抑制, 振动系统, 生物力学等^[1-7]. 在线性弹性理论中, 一维粘弹性模型的本构关系可以写成如下的形式^[8-10],

$$\sigma(t) = E[e(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)e(\tau)d\tau], \quad (1)$$

其中 σ 是应力, E 是瞬时杨氏模量, e 是应变, $\Gamma(t-\tau)$ 是材料的松弛核函数, 反应过去状态对现在动力学的影响. 由于引入了松弛项, 系统的发展变化不仅和当前时刻的状态有关, 而且也和当前时刻之前的若干状态有关, 其动力学特性具有许多新特点. 橡胶材料和沥青是典型的粘弹性体, 这些粘弹性系统的柔度是十分强的, 具有很小的刚度, 通常会产生非常大的变形, 因此平衡点的稳定性一般不容易保持. 为了镇定这样的系统, 动力学控制就十分必要. 时滞状态反馈是进行系统动力学控制的有效方法之一, 由于实现起来简单并具有可操作性, 因此得到了广泛的关注^[11]. 本文考虑如下的通过粘弹性弹簧连接的广义粘弹性振子的运动,

$$\ddot{x} + bx + \int_{-\infty}^t F(t-s)x(s)ds + \beta x^3 = 0, \quad (2)$$

其中 $b > 0, 0 < \beta \leq 1, F(s)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的非负有界核函数, 来反映过去状态对现在动力学的影响. 根据接下来第 1 节的分析, 方程(2)的零平

衡点是不稳定的. 本文以这个不稳定的粘弹性系统为研究对象, 阐述时滞控制的有效性, 并分析时滞反馈对模型动力学的影响.

1 未控制系统的稳定性分析

弱核函数 $F(s) = \alpha e^{-\alpha s} (\alpha > 0)$ 是常见的粘弹性松弛函数之一, 在许多的系统中都有应用. 简单起见, 本文考虑弱核函数. 将 $F(s) = \alpha e^{-\alpha s}$ 代入到方程(2)中得到,

$$\ddot{x} + bx + \int_{-\infty}^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} x(s) ds + \beta x^3 = 0, \quad (3)$$

令

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} x(s) ds \quad (4)$$

则

$$u'(t) = \alpha x(t) - \alpha u(t). \quad (5)$$

引入一个新的变量 u , 则方程(3)在零平衡点处的线性化方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -bx(t) - u(t). \\ \dot{u}(t) = \alpha x(t) - \alpha u(t) \end{cases} \quad (6)$$

相应的特征多项式为:

$$\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + b\lambda + \alpha(b+1) = 0. \quad (7)$$

由于 $b > 0, \alpha > 0$, 由 Routh-Hurwitz 准则, 当 $b > (1+b)$ 时, 方程(7)的所有特征根具有负实部. 显然, 这个条件是不满足的, 这意味着系统(2)的零平衡

2012-09-14 收到第 1 稿, 2013-04-01 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11072086), 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-09-0430)和辽宁大学青年基金项目(2013LDQN03)
† 通讯作者 E-mail: xuxu@jlu.edu.cn

点是不稳定的.

2 时滞速度反馈控制

本节将时滞速度反馈 $A\dot{x}(t-\tau)$ 项引入到系统(3)中,则控制系统方程可以表示为:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + bx + \int_{-\infty}^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} x(s) ds + \beta x^3 + \\ A\dot{x}(t-\tau) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

方程(8)的特征方程如下

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (Ae^{-\lambda\tau} + \alpha)\lambda^2 + (\alpha Ae^{-\lambda\tau} + b)\lambda + \\ b\alpha + \alpha = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

方程(9)是超越方程,具有无穷多个根.我们将分析特征根的分布,并给出系统的稳定性边界.

当 $\tau=0$ 时,方程(9)可以写成

$$\lambda^3 + (A + \alpha)\lambda^2 + (\alpha A + b)\lambda + \alpha(b + 1) = 0 \quad (10)$$

由 Routh - Hurwitz 准则,如果

$$A + \alpha > 0, A^2\alpha + A\alpha^2 + Ab > \alpha, \alpha A + b > 0 \quad (11)$$

时(8)的平衡点是渐近稳定的.而当时滞 τ 从 0 开始增加,当系统的纯虚根出现时,平衡点的稳定性将会发生改变.由于 $b\alpha + \alpha > 0, \lambda = 0$ 不是方程的根.令 $\lambda = \pm i\omega (\omega > 0)$ 是方程(10)的一对共轭纯虚根,并代入(10)得到

$$\begin{aligned} \sqrt{W}\sin(\varphi) = \omega(\omega^2 - b), \\ \sqrt{W}\cos(\varphi) = -\alpha(\omega^2 - b - 1) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\varphi = \omega\tau + \theta, \sqrt{W} = \sqrt{A^2\omega^4 + \alpha^2 A^2 \omega^2}, \cos(\theta) = A\omega^2 / \sqrt{W}, \sin\theta = \alpha A\omega / \sqrt{W}$.

方程(12)中消去 τ 得

$$G(Y) = Y^3 + cY^2 + dY + g = 0 \quad (13)$$

这里 $Y = \omega^2, c = \alpha^2 - A^2 - 2b, d = b^2 - 2\alpha(b\alpha + \alpha) - \alpha^2 A^2, g = (b\alpha + \alpha)^2$. 由于 $Y = \omega^2$ 是正实数,故只有方程(13)的正实根是我们研究的.令 Y_1, Y_2, Y_3 是方程(13)的三个根,则有下面的关系成立^[12]: $Y_1 + Y_2 + Y_3 = -c, Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3 = -g$. 定义

$$p = \frac{3d - c^2}{3}, q = \frac{2}{27}c^3 - \frac{cd}{3} + g,$$

$$\Delta = \left[\frac{q}{2}\right]^2 + \left[\frac{p}{3}\right]^3.$$

对于方程(13)的根,我们下面的结论^[12].

Case (1): 当 $\Delta > 0$ 时,方程(13)有一个实根和一对共轭虚根.由于 g 是正实数,可以很容易地看出方程(13)的实根在 $\Delta > 0$ 时是负的,即此种情

况方程(13)没有正实根.

Case (2): 当 $\Delta < 0$ 时,方程(13)有如下三个不同实根

$$Y_m = 2\sqrt{B}\cos\frac{\beta + 2m\pi}{3} - \frac{c}{3}, m = 0, 1, 2 \quad (14)$$

其中, $B = |p|/3, \cos\beta = (-q/2)/B, \sin\beta = \sqrt{-\Delta}/B$, and $0 < \beta < \pi$.

进而,简单计算得到,如果

$$0 < c/3 < \sqrt{B}\text{或}\sqrt{B} < -c/3 < 2\sqrt{B}, \quad (15)$$

则(13)有两个正实根

$$Y_1 = 2\sqrt{B}\cos\frac{\beta}{3} - \frac{c}{3}, Y_2 = 2\sqrt{B}\cos\frac{\beta + 4\pi}{3} - \frac{c}{3}. \quad (16)$$

并且 $Y_1 > Y_2 > 0$.

将 $\omega_1 = \sqrt{Y_1}, \omega_2 = \sqrt{Y_2}$ 代入方程(12)得到两组临界时滞

$$\begin{aligned} \tau_{1j} = \frac{1}{\omega_1}(\theta + \varphi_1 + 2j\pi), \tau_{2j} = \frac{1}{\omega_2}(\theta + \varphi_2 + 2j\pi), \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$ 由方程(12)得到.

从方程(13)得到 $G'(\omega_1) > 0, G'(\omega_2) < 0$, 这说明当时滞通过临界时滞 τ_{1j} (或 τ_{2j}) 时,方程(9)将增加(或减少)两个具有正实部的特征根^[13]. 因此当时滞 τ 从 0 增大时,系统将发生稳定性切换.则存在一个正整数 J , 当

$$\tau \in [0, \tau_{1,0}) \cup [\tau_{2,0}, \tau_{1,1}) \cup \dots \cup [\tau_{2,J-1}, \tau_{1,J}), \quad (18)$$

使得方程(9)的所有根都具有负实部.而当

$$\tau \in [\tau_{1,0}, \tau_{2,0}) \cup (\tau_{1,1}, \tau_{2,1}) \cup \dots \cup (\tau_{1,J-1}, \tau_{2,J-1}) \cup (\tau_{1,J}, +\infty). \quad (19)$$

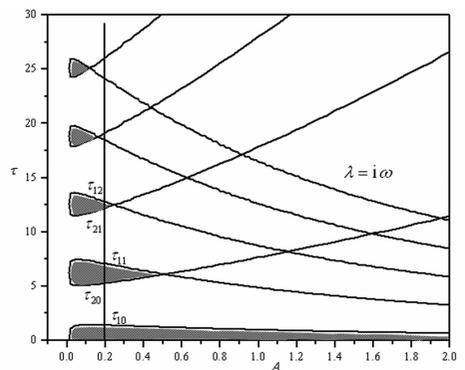


图1 方程(8)零平衡点的稳定区域(阴影部分)

Fig.1 Stability regions (shaded) of trivial equilibrium of Eq. (8)

方程(9)至少有一个正实部的根.图1画出了

系统的稳定和不稳定区域.

从上面的分析可知,当 $\tau = 0$ 时方程在 A 和 τ 满足条件(11)时是渐近稳定的,它将继续保持稳定,直到 τ 增加到使方程(9)具有零实部的特征根. 定义 $\tau_c = \min(\tau_{ij})$, 当 $\tau \in [0, \tau_c)$ 时,方程(9)的所有根都具有负实部,而方程(9)在 $\tau = \tau_c$ 处有一对纯虚根 $\pm i\omega_c$. 故当 $\tau \in [0, \tau_c)$ 时,方程(8)在 0 平衡点是渐近稳定的,在 $\tau = \tau_c$ 处将发生 Hopf 分岔.

3 Hopf 和余维 2 分岔

上一节的分析指出,当 $\tau = \tau_c$ 时方程(8)将发生 Hopf 分岔. Hopf 分岔的方向和分岔周期解的稳定性可以通过规范型理论和中心流形定理^[14]来研究. 然而需要大量的符号计算. 因此,本文略去具体的分析细节,而只给出数值模拟. 在方程(8)中选取参数 $b = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.01$ 时,用数学软件 XPP^[15] 模拟出方程的解的情况. 当 $A = 0$,方程(8)的解是无界的,如图 2(a)所示. 当 $A = 1, \tau = 0$ 时,系统的零平衡点是稳定的(图 2(b)). 当 $\tau = 1.6$ 时,零平衡点失去其稳定性并产生了周期解(图 2(c)).

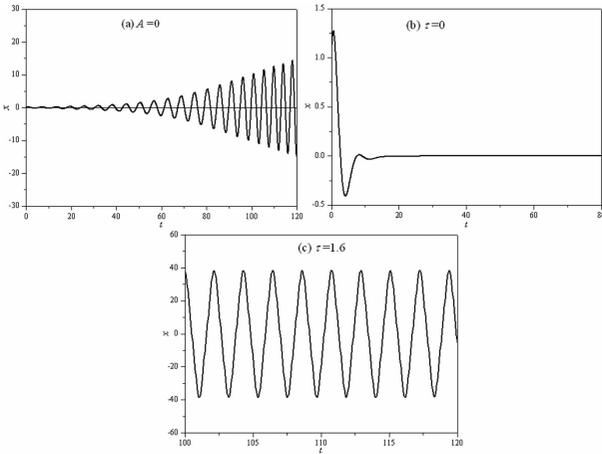


图2 方程的时间历程

Fig. 2 Time history of Eq. (8)

对于一些给定的反馈参数和时滞,系统的特征方程可能含有两对纯虚根 $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ 这对应于图 1 中曲线的交叉点. 在这些交叉点附近可能会导致更复杂的动力学行为. 这里研究共振 Hopf - Hopf 分岔的情形: 即假设两个 Hopf 分岔的频率满足 $\omega_1 : \omega_2 = m : n, m, n \in Z$, 其中 Z 是正整数. 充分条件是时滞 τ 在两个分岔中有相同的值,即

$$\arctan \frac{\omega_1(\omega_1^2 - b)}{\alpha(b + 1 - \omega_1^2)} - \arctan \frac{\alpha}{\omega_1} =$$

$$\frac{m}{n} \left[\arctan \frac{\omega_2(\omega_2^2 - b)}{\alpha(b + 1 - \omega_2^2)} - \arctan \frac{\alpha}{\omega_2} \right] \quad (20)$$

一般地,并不能从 Eq. (20) 解出具体的频率值,但是可以通过数值模拟的形式计算出来. 图 3 给出了一些共振 Hopf - Hopf 分岔交叉点情况. 图 3 中两个曲线的交点就是余维 2 分岔点.

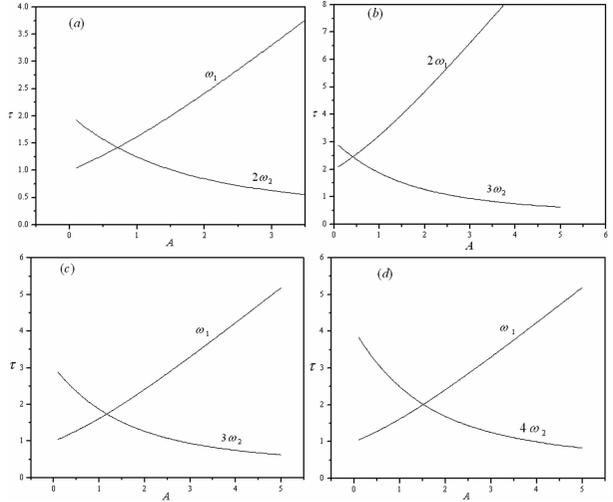


图3 当 $\alpha = 0.05, b = 1$ 时, Hopf-Hopf 分岔交叉点 (a) $\omega_1 : \omega_2 = 2 : 1$, (b) $\omega_1 : \omega_2 = 3 : 2$, (c) $\omega_1 : \omega_2 = 3 : 1$, (d) $\omega_1 : \omega_2 = 4 : 1$

Fig. 3 Hopf-Hopf bifurcation intersections when (a) $\omega_1 : \omega_2 = 2 : 1$, (b) $\omega_1 : \omega_2 = 3 : 2$, (c) $\omega_1 : \omega_2 = 3 : 1$, (d) $\omega_1 : \omega_2 = 4 : 1$

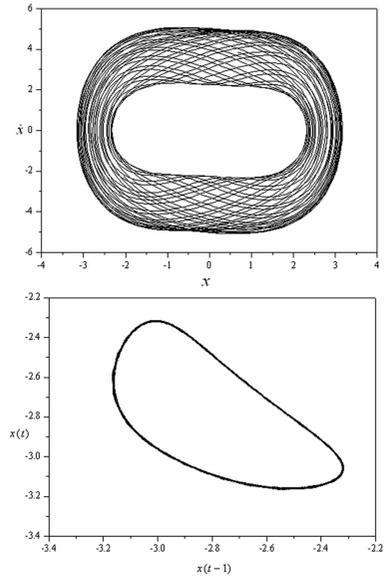


图4 系统在余维 2 分岔附近的拟周期解. (a) 相平面; (b) Poincaré 截面图

Fig. 4 Quasi-periodic solutions around the codimension-2 bifurcation point

系统在 Hopf-Hopf 分岔附近的动力学行为是非常复杂的. 稳定的拟周期解和不稳定的解都可能存在,在方程中取一组参数 $b = 2, \alpha = 0.1, \beta = 0.3$,

$A = 0.775, \tau = 3$ 时,数值模拟出方程的解如图 4 所示,方程的解是拟周期解,其 Poincaré 截面是一族离散点组成的封闭圆环。

而当方程中取参数 $b = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.01, A = 1, \tau = 2.8$ 时,产生了混沌吸引子,其相面图和 Poincaré 截面 ($\Sigma = \{(x(t - \tau), x) : (\dot{x} = 0, \dot{x} > 0)\}$) 图见如图 5 所示。

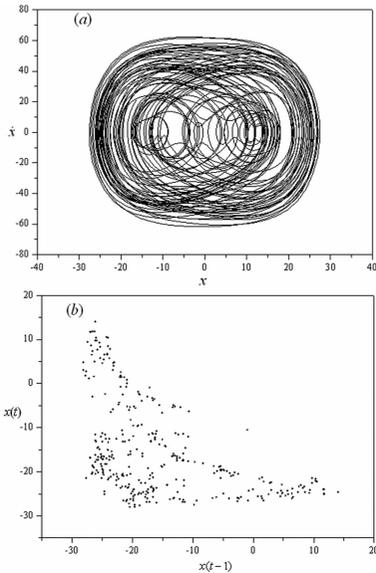


图 5 系统(8)在余维 2 分岔附近的混沌解。(a) 相平面;
(b) Poincaré 截面图

Fig. 5 Chaotic solutions of Eq. (8) near codimension-2 bifurcation point (a) phase plane plot; (b) Poincaré section plot

4 结论

本文研究了一个具有粘弹性项的非线性振子的动力学与控制。此粘弹性系统具有复杂的无界行为。由于许多真实的粘弹性可以根据先前的状态来调节现在的状态,为了模拟更实际的系统状况,文中引入了延迟状态反馈来控制此模型。研究表明时滞速度反馈控制能有效镇定此系统,是一个简单有效的稳定性控制方案。文中还研究了系统的 Hopf 分岔和余维 2 分岔,并通过数值模拟得到了反馈控制系统复杂的动力学行为。研究表明控制模型有渐近稳定的平衡点,周期解,拟周期解,以及复杂的混沌解。这说明时滞状态反馈可以有效地控制粘弹性系统模型。

参 考 文 献

1 Huang S C, Inman D J, Austin E M. Some design consid-

- erations for active and passive constrained layer damping treatments. *Smart Material and Structure*, 1995, 5: 301 ~ 313
- 2 Muravyov A, Hutton S G. Closed-form solutions and the eigenvalue problem for vibration of discrete viscoelastic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64: 684 ~ 691
- 3 Muravyov A. Analytical solutions in the time domain for vibration problems of discrete viscoelastic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 199(2): 337 ~ 348
- 4 Muravyov A, Hutton S G. Free vibration response characteristics of a simple elasto-hereditary system. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1998, 120: 628 ~ 632
- 5 Jindrich D L, Zhou Y H, Becker T, Dennerlein J T. Non-linear viscoelastic models predict fingertip pulp force-displacement characteristics during voluntary tapping. *Journal of Biomechanics*, 2003, 36: 497 ~ 503
- 6 Borg T, Pääkkönen E J. Linear viscoelastic models; Part I. Relaxation modulus and melt calibration. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2009, 156: 121 ~ 128
- 7 Bird R B, Curtiss C F, Armstrong R C, Hassanger O. Dynamics of polymeric liquids. New York: John Wiley & Sons, 1987
- 8 Menon S, Tang J. A state-space approach for the dynamic analysis of viscoelastic systems. *Computers and Structures*, 2004, 82: 1123 ~ 1130
- 9 Muravyov A. Forced vibration responses of a viscoelastic structure. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 218(5): 892 ~ 907
- 10 Muravyov A, Hutton S G. Closed-form solutions and the eigenvalue problem for vibration of discrete viscoelastic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64: 684 ~ 691
- 11 王京祥,王在华.时滞状态反馈控制系统的稳定性增益区域.动力学与控制学报,2008,6(4):301 ~ 306 (Wang J X, Wang Z H. Stable region of the feedback gains in a controlled system with delayed feedback. *Journal of Dynamics and Control*, 2008,6(4):301 ~ 306 (in Chinese))
- 12 潘志,贺祖琪.数学手册.徐州:中国矿业大学出版社,1995 (Pai Z, He Z Q. Mathematics handbook. Xuzhou: China University of Mining and Technology Press, 1995 (in Chinese))
- 13 Wang Z H, Hu H Y. Stability switches of time-delayed dynamic systems with unknown parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 233: 215 ~ 233
- 14 Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge: Cambridge Uni-

versity Press, 1981

tool. Pittsburgh: University of Pittsburgh, 1997

15 Ermentrout B, XPPAUT 3.0 – The differential equations

DYNAMICS AND CONTROL OF AN OSCILLATOR WITH VISCOELASTIC ITEM*

Luo Jiawei¹ Xu Xu^{2†}

(1. College of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036)

(2. College of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012)

Abstract The paper presents a detailed analysis on the dynamics and delayed state feedback control of an oscillator with generalized visco-elastic item. The trivial equilibrium of the model is first investigated and shows that uncontrolled model exhibits complicated unbounded behavior. Then a velocity feedback control is introduced to stabilize this unstable system. It shows that the velocity feedback control can stabilize the system. And with properly chosen delay and gain in the delayed feedback path, the velocity controlled model may have stable equilibrium, or periodic solutions resulted from the Hopf bifurcation, codimension-2 bifurcation or complex strange attractor. Some numerical experiments verify the theoretical analysis.

Key words stability, visco-elastic, codimension-2 bifurcation, time delay, Hopf bifurcation

Received 14 September 2012, revised 1 April 2013.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11072086), the Program for New Century Excellent Talents in University (NCET) (NCET-09-0430) and the Youth Foundation of Liaoning University (2013LDQN03)

† Corresponding author E-mail: xuxu@jlu.edu.cn