

# 基于复模态方法的二维夹层壁板颤振分析\*

杨晓东<sup>1,2†</sup> 边青峰<sup>2</sup>

(1. 北京工业大学 机电学院, 北京 100124) (2. 沈阳航空航天大学 航空航天工程学部, 沈阳 110136)

**摘要** 本文研究二维夹层壁板在一侧受超音速气动力的情况下的颤振现象. 利用复模态方法和伽辽金方法分析颤振临界马赫数以及夹芯粘性阻尼对颤振的影响. 结果发现考虑前四阶模态时, 由于一二阶频率重合而使振动能量积聚发生颤振. 考虑中间层的粘弹性时, 发现随着粘性阻尼的增加, 颤振临界马赫数和临界颤振频率均呈现先降低后升高的现象, 其原因是粘弹性一方面降低系统固有频率使得临界马赫数降低, 另一方面又使能量耗散使得临界马赫数升高, 在这两种作用的影响下出现了上述复杂的现象. 本文的研究结果有利于颤振抑制时的设计优化.

**关键词** 夹层壁板, 颤振, 粘性阻尼, 复模态方法

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-049

## 引言

飞行器颤振是弹性结构在高速气流中由于受到气动力, 弹性力和惯性力的耦合作用而发生的振幅不衰减的自激振动<sup>[1]</sup>, 它是气动弹性力学中最重要的问题之一, 颤振的发生往往导致灾难性的结构破坏. 目前对振动问题的分析一般有伽辽金法和复模态法, 文献[2]和[3]均用这两种方法研究了输流管道的固有频率, 并对比了它们的特点. 复合材料粘弹性夹层板由于它质量轻, 刚度大, 并具有很好的减振降噪性能, 因而在实际工程中得到广泛应用. 1969 年, Mead 和 Markus 根据约束阻尼结构的横向位移推导出其六阶微分方程<sup>[4]</sup>. 1984 年, Miles 首次将约束阻尼技术应用到波音 747 飞机舱室的减振降噪. 邓春年等基于虚功原理, 提出了一种新的建立约束阻尼板结构动力学的有限元模型<sup>[5]</sup>. 文献[6]对约束阻尼悬臂梁的瞬态响应进行了实验验证. 文献[7]研究了夹层结构的频率与损耗因子的计算方法. 文献[8-10]研究了阻尼对系统振动的影响. 在夹层壁板的应用中, 一侧受到气动力, 文献[11-12]在此基础上进行了壁板的颤振分析. 文献[13]还考虑了热效应对颤振的影响.

方面研究了阻尼夹层板的颤振问题. 但对于夹层板粘弹性夹芯对颤振的影响还缺乏系统的分析. 本文利用复模态方法研究带有粘弹性材料夹芯的夹层壁板颤振问题. 首先用伽辽金和复模态两种方法研究了系统的颤振并对比了两种方法, 然后分析了粘弹性系数对系统振动能量及固有频率以及临界马赫数的影响, 发现夹芯材料的粘弹性系数对颤振的抑制作用存在双重性, 最后讨论粘弹性夹芯对颤振的影响及物理成因.

## 1 运动微分方程

根据 von Karman 理论, 建立夹层壁板物理模型如图 1 所示, 几何参数及受力如图 2.

对于面板及夹芯板有如下基本假设:

1) 夹层壁板服从小变形假设, 且各层具有相

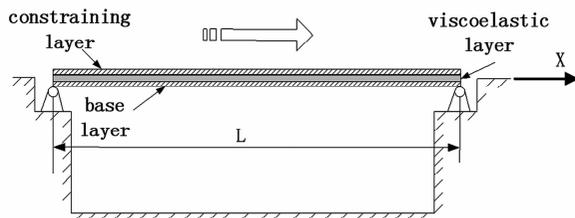


图 1 壁板示意图

Fig. 1 Sketch map for wall panel

上述文献分别从解析解、数值解、实验解等各

2012-07-15 收到第 1 稿, 2012-08-01 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11172010, 10702045)、辽宁省高等学校杰出青年成长计划

† 通讯作者 E-mail: jxdyang@163.com

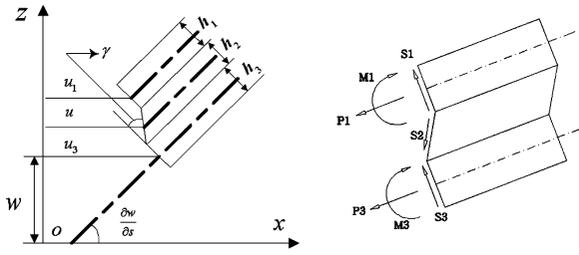


图2 约束层阻尼板几何变形及微元受力示意图

Fig. 2 Deformation and forces of finite element of the CLD panel

同的挠度;

- 2) 各层之间没有滑移,层间位移连续;
- 3) 不考虑基层和约束层的剪切变形;
- 4) 对于粘弹性阻尼夹芯层,只考虑其横向剪切变形;
- 5) 由于夹层板在振动过程纵向位移的振幅比横挠度的振幅小得多,忽略纵向位移所产生的惯性力.同时忽略转动惯量的影响.

夹层板上下两层为弹性板,中间为粘弹性阻尼板,上下两层考虑弯矩,中间不考虑弯矩只考虑剪力.上中下板厚分别为  $h_1, h_2, h_3$ ,密度为  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ,板长为  $L$ ,设壁板的纵向形变为  $w$ ,上下面板横向位移为  $u_1, u_3$ ,中间面板横向形变为  $u$ ,中间层剪切形变为  $\gamma$ ,根据 Mead 和 Markus 推导的六阶动力方程<sup>[4]</sup>,

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g(1+Y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{D_t} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - gp \right) \quad (1)$$

式中

$$g = \frac{G}{h_2} \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_3 h_3} \right),$$

$$Y = \frac{d^2}{D_t} \left( \frac{E_1 h_1 \cdot E_3 h_3}{E_1 h_1 + E_3 h_3} \right),$$

$$d = h_2 + \frac{1}{2}(h_1 + h_3),$$

$$D_1 = E_1 h_1^3 / 12,$$

$$D_3 = E_3 h_3^3 / 12,$$

$$D_t = D_1 + D_3 \quad (2)$$

考虑气流为超音速音速,由 1.6 ~ 5 马赫适用的一阶超音速活塞理论

$$p = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[ \frac{2q}{M_a} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] \quad (3)$$

式中  $m = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3$  为夹层壁板的等效密度,  $q = \frac{1}{2} \rho V^2$  为动压,  $V$  为来流速度,  $\rho$  为空气密

度,设音速为 340 m/s.把(3)式代入(1)式得系统运动控制方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g(1+Y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{D_t} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - g \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \\ & \frac{1}{D_t} \frac{2q}{M_a} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{2q}{D_t M_a V} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{2gq}{D_t M_a} \frac{\partial w}{\partial x} - \\ & \frac{2gq}{D_t M_a V} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

## 2 颤振分析

### 2.1 伽辽金方法

一般对于连续体的振动问题,伽辽金方法是有效的解决思路.我们首先用此种方法,设(4)式的解为

$$w = \Phi^T \Lambda \quad (5)$$

其中空间函数及时间函数分别为

$$\begin{cases} \Phi = [\Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_N(x)]^T \\ \Lambda = [\Lambda_1(t) & \Lambda_2(t) & \cdots & \Lambda_N(t)]^T \end{cases} \quad (6)$$

则(4)式可化为

$$\begin{aligned} & (A_2 \Phi^{TT} - A_2 g \Phi^T) \ddot{\Lambda} + (A_4 \Phi^{TT} - A_6 \Phi^T) \dot{\Lambda} + \\ & (\Phi^{(6)T} - A_1 \Phi^{(4)T}) \Lambda = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = -g(1+Y) \\ A_2 = m/D_t \\ A_3 = 2q/(D_t M_a) \\ A_4 = 2q/(D_t M_a V) \\ A_5 = -2gq/(D_t M_a) \\ A_6 = -2gq/(D_t M_a V) \end{cases} \quad (8)$$

(7)式两端前乘以  $\Phi$ ,并在  $[0, L]$  上积分,得到

$$B_1 \ddot{\Lambda} + B_2 \dot{\Lambda} + B_3 \Lambda = 0 \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} B_1 = \int_0^L \Phi (A_2 \Phi^{TT} - A_2 g \Phi^T) dx \\ B_2 = \int_0^L \Phi (A_4 \Phi^{TT} - A_6 \Phi^T) dx \\ B_3 = \int_0^L \Phi (\Phi^{(6)T} - A_1 \Phi^{(4)T} + A_3 \Phi^{TT} + A_5 \Phi^T) dx \end{cases} \quad (10)$$

上式两端同时左乘  $B_1^{-1}$ ,并把结果转为一阶常微方

程组得到

$$\dot{\Omega} - C\Omega = 0 \tag{11}$$

其中

$$\Omega = \dot{\Lambda}^T, \Lambda^T, C = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = -B_1^{-1} \quad D_2 = -B_1^{-1}B_3 \tag{12}$$

由式(11)的特征根就可以得到离散化后的系统的前  $N$  阶固有频率。

### 2.2 复模态方法

复模态方法是求解特征值问题的另一有效数值方法,这种方法不受 Galerkin 方法截断阶数对精度的限制,但求解过程则较为繁琐。令(4)式的形式解为

$$w = w_n e^{\lambda t} \tag{13}$$

其中

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i,$$

$$w_n = \sum_{k=1}^6 c_k e^{\beta_k x} \tag{14}$$

将形式解(13)代入方程(4),得特征方程为

$$\beta^6 - g(1+Y)\beta^4 + \frac{1}{D_t} \frac{2q}{M_a} \beta^3 + \left(\frac{m}{D_t} \lambda^2 + \frac{2q\lambda}{D_t M_a V}\right)\beta^2 - \frac{2gq}{D_t M_a} \beta - \left(\frac{mg}{D_t} \lambda^2 + \frac{2gq\lambda}{D_t M_a V}\right) = 0 \tag{15}$$

利用在  $x=0$  和  $x=L$  处的边界条件,

$$w_n = 0 \quad w_n'' = 0 \quad w_n^{(4)} = 0 \tag{16}$$

特征值可由下式决定

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\beta_1 L} & e^{\beta_2 L} & e^{\beta_3 L} & e^{\beta_4 L} & e^{\beta_5 L} & e^{\beta_6 L} \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & \beta_4^2 & \beta_5^2 & \beta_6^2 \\ \beta_1^2 e^{\beta_1 L} & \beta_2^2 e^{\beta_2 L} & \beta_3^2 e^{\beta_3 L} & \beta_4^2 e^{\beta_4 L} & \beta_5^2 e^{\beta_5 L} & \beta_6^2 e^{\beta_6 L} \\ \beta_1^4 & \beta_2^4 & \beta_3^4 & \beta_4^4 & \beta_5^4 & \beta_6^4 \\ \beta_1^4 e^{\beta_1 L} & \beta_2^4 e^{\beta_2 L} & \beta_3^4 e^{\beta_3 L} & \beta_4^4 e^{\beta_4 L} & \beta_5^4 e^{\beta_5 L} & \beta_6^4 e^{\beta_6 L} \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

利用数值搜索的方法寻求  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  值使得(15)式的解满足(17)式,即可算得特征值。

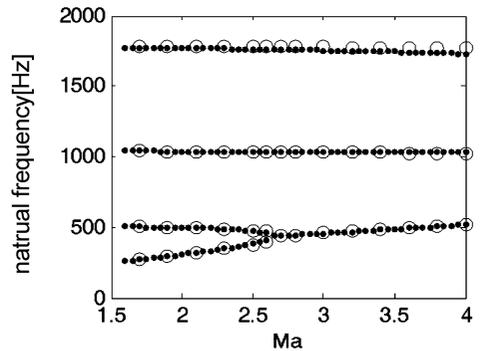
### 2.3 数值计算

以南洋阻尼材料厂生产的 NYJ—IA-5—73 阻尼材料为夹芯层,基层和约束层均为铝合金,具体物理参数由表 1 给出。为研究粘弹性材料影响,设夹芯层粘弹性系数可变。利用伽辽金法和复模态法

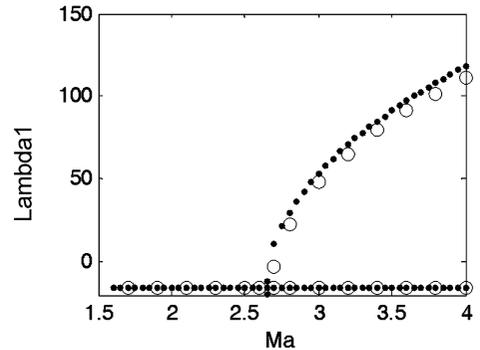
分别求解系统前四阶模态并将结果重叠,可以得到系统前四阶模态的能量及频率随着马赫数的变化如图 3 所示。

表 1 板参数表

Table 1 parameters table of the panel			
$L/m$	$E_1, E_3/GPa$	$h_1 h_2 h_3/m$	$G/MPa$
0.5	68.9	0.002	0.896
$\rho_1 \rho_3 / kg \cdot m^{-3}$	$\rho_2 / kg \cdot m^{-3}$	$\rho / kg \cdot m^{-3}$	
2740	999	1.205	



(a) Imaginary part



(b) Real part

图 3 特征值随马赫数变化图

Fig. 3 Relationship of eigenvalues vs Mach number

图 3 分别给出了特征频率虚部和实部随马赫数的变化曲线,虚部则表示固有频率的变化,而实部表征了能量的变化。随着马赫数的增加,系统的一二阶频率在  $Ma = 2.705$  时重合,而此时表征能量变化的实部开始大于 0,因此系统产生颤振。图中,点线表示伽辽金方法结果,空心圆则表示复模态法结果,两种方法的结果可以相互验证。

### 3 粘弹性对颤振的影响

考虑壁板中间层为粘弹性材料,对粘弹性阻尼层本构关系取 Kelvin 模型,则其无量纲剪切模量  $g$  表述为如下算子

$$g \rightarrow g' \left( 1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \tag{18}$$

其中  $g'$  为实数,  $\eta$  为粘性系数. 把(13)(14)及(18)代入(4)式可得粘弹性阻尼结构的特征方程为

$$\begin{aligned} &\beta^6 - g(1 + Y)(1 + \eta\lambda)\beta^4 + \\ &\frac{1}{D_i} \frac{2q}{M_a} \beta^3 + \left( \frac{m}{D_i} \lambda^2 + \frac{2q\lambda}{D_i M_a V} \right) \beta^2 - \\ &\frac{2gq}{D_i M_a} (1 + \eta\lambda) \beta - \\ &(1 + \eta\lambda) \left( \frac{mg}{D_i} \lambda^2 + \frac{2gq\lambda}{D_i M_a V} \right) = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

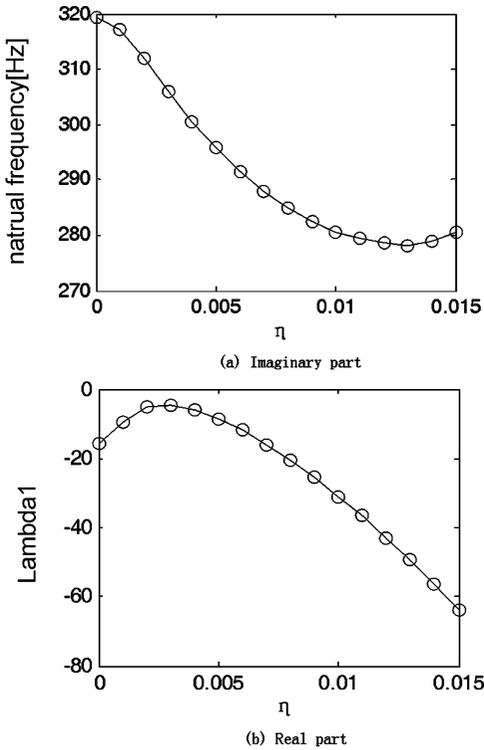


图4 特征值随粘性阻尼的变化 ( $Ma = 2.1$ )

Fig.4 Eigenvalues vs. viscous damping ( $Ma = 2.1$ )

由于  $\lambda$  实部代表系统能量变化, 虚部代表频率, 利用数值方法考察粘弹性系数对这两部分的影响, 考察颤振发生前马赫数  $Ma = 2.1$  时  $\lambda$  虚部实部随马赫数的变化图, 如图4所示. 在图4~6中离散圆形符号表示计算结果, 插值所得连线提示变化的趋势.

由图4中虚部随粘性阻尼的变化, 可知随粘性阻尼的增加, 固有频率主要呈现先下降后上升的趋势. 固有频率降低使得临界马赫数降低, 使系统易于发生颤振, 因此当阻尼较小时使固有频率降低的影响将使颤振易于发生. 由图4的实部则可以看

出, 振动系统的能量积聚随着粘弹性系数的增加呈现先上升后下降趋势, 这种当小阻尼时能量积聚的升高也使得系统易于发生颤振. 综上所述, 粘性阻尼对固有频率和能量的双重影响就有可能导致粘性阻尼层的介入对颤振的抑制作用或好或坏.

由于图4中的虚部与实部随粘性阻尼变化的极值并不为同一阻尼值, 因此我们需要分析粘性阻尼对颤振临界马赫数的影响, 从而讨论粘性阻尼层对颤振抑制的最终效果.

图5给出了临界马赫数随粘性阻尼的变化情况, 很明显当阻尼较小时, 临界马赫数随阻尼增加反而降低. 当阻尼较大时, 则临界马赫数随阻尼的增加而增加. 因此, 当粘性阻尼较大时, 粘性阻尼层对颤振有抑制作用, 但当粘性阻尼较小时, 粘性阻尼层的介入对颤振抑制不利. 图6为发生颤振时对应颤振频率随粘性阻尼的变化.

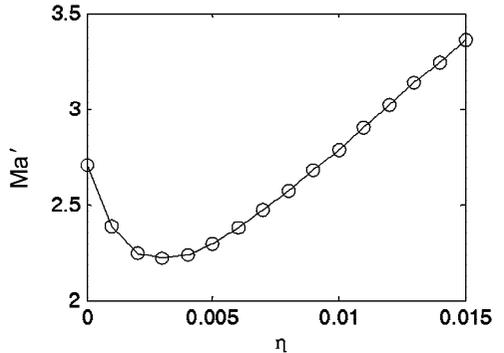


图5 临界马赫数与粘性阻尼的关系

Fig.5 Relationship of flutter Mach number and viscous damping

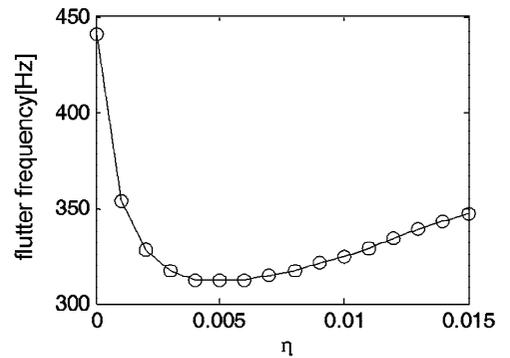


图6 颤振时频率与粘性阻尼的关系

Fig.6 Relationship of flutter frequency and viscous damping

当粘性阻尼较小时, 系统所发生的易于失稳的现象在文献中有所报道. 比如在双摆、压杆等粘弹性连续体模型中都有类似的现象. 本文有关粘系阻

尼层对复合材料壁板颤振影响的研究尚属首次。

## 4 结论

1) 粘弹性对颤振现象的两个因素产生影响,第一是能量,第二是固有频率. 其中吸收能量有助于延后颤振产生,降低其固有频率则使颤振提前发生.

2) 在粘性阻尼比较小时,其对系统频率的降低比较明显,从而使得临界马赫数有所降低;当粘性阻尼较大时,其对系统频率的降低开始减慢而对能量的吸收开始成为影响系统特性的主要方面,从而临界马赫数又开始回升.

3) 在航空航天工程应用中,粘弹性阻尼材料的一个重要作用是减振. 根据本文的研究,粘性阻尼层粘性系数对颤振的影响具有双重性,因此在设计中需要提前预算颤振抑制效果.

## 参 考 文 献

- 1 J·R·赖特, J·E·库珀, 崔尔杰(译). 飞机气动弹性力学及载荷导论. 上海:上海交通大学出版社, 2010 (Wright J R, Cooper J E. Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads. Wiley - Blackwell. 2007)
- 2 杨晓东, 金基铎. 输流管道流-固耦合振动的固有频率分析. 振动与冲击, 2008, 27(3): 80 ~ 82 (Yang X D, Jin J D. Comparison of Galerkin method and complex mode method in natural frequency analysis of tube conveying fluid. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(3): 80 ~ 82 (in Chinese))
- 3 齐欢欢, 许鉴. Galerkin 模态截断对计算悬臂输液管道固有频率的影响. 振动与冲击, 2011, 30(1): 148 ~ 151 (Qi H H, Xu J. Effect of Galerkin modal truncation on natural frequency analysis of a cantilevered pipe conveying fluid. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, 30(1): 148 ~ 151 (in Chinese))
- 4 Mead D J, Markus S. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 1969, 10(2): 163 ~ 175
- 5 邓年春, 邹振祝, 杜华军, 黄文虎. 约束阻尼板的有限元动力分析. 振动工程学报, 2003, 16(4): 489 ~ 492 (Deng N C, Zou Z Z, Du H J, Huang W H. A finite element dynamic analysis of constrained plates. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(4): 489 ~ 492 (in Chinese))
- 6 胡明勇, 王安稳, 章向明. 约束阻尼悬臂梁瞬态响应近似解析解与实验分析. 应用数学和力学, 2010, 31(11): 1287 ~ 1296 (Hu M Y, Wang A W, Zhang X M. Approximate analytical solutions and experimental analysis of transient response of constrained damping cantilever beam. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, 31(11): 1287 ~ 1296. (in Chinese))
- 7 任志刚, 卢哲安, 楼梦麟. 复合夹层结构频率及损耗因子的计算. 地震工程与工程振动, 2004, 24(2): 101 ~ 106 (Ren Z G, Lu Z A, Lou M L. Calculation of frequency and loss factor of composite sandwich structures. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2004, 4(2): 101 ~ 106 (in Chinese))
- 8 Gabriel A. Oyibo. Unified panel flutter theory with viscous damping effects. *AIAA Journal*, 1983, 21(5): 767 ~ 773
- 9 Tang S J, Lumsdaine A. Analysis of constrained damping Layers, including normal-strain effects. *AIAA Journal*, 2008, 46(12): 2998 ~ 3011
- 10 Fei L, Mohan D. Vibration analysis of a multiple-layered viscoelastic structure using the biot damping model. *AIAA Journal*, 2010, 48(3): 624 ~ 634
- 11 叶献辉. 壁板非线性气动弹性颤振及稳定性研究[博士学位论文]. 四川:西南交通大学, 2008 (Ye X H. Study on nonlinear flutter and its stability of panel aeroelasticity system[PhD Thesis]. Sichuan: Southwest Jiaotong University. 2008 (in Chinese))
- 12 肖艳平, 杨翎仁, 叶献辉. 三维粘弹性壁板颤振分析. 振动与冲击, 2011, 30(1): 82 ~ 86 (Xiao Y P, Yang Y R, Ye X H. Flutter analysis for a three-dimensional viscoelastic panel. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, 30(1): 82 ~ 86 (in Chinese))
- 13 李丽丽, 赵永辉. 超音速下热壁板的颤振分析. 动力学与控制学报, 2012, 10(1): 67 ~ 70 (Li L L, Zhao Y H. The flutter analysis of thermal panel under supersonic flow. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, 10(1): 67 ~ 70 (in Chinese))
- 14 Langthjem M A, Sugiyama Y. Dynamic stability of columns subjected to follower loads: a survey. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 238: 809 ~ 851
- 15 Bolotin V V, Zhinzher N I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, 5: 965 ~ 989
- 16 Herrmann G, Jong I C. On the destabilizing effect of damping in nonconservative systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1965, 32: 592 ~ 597

# THE FLUTTER ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL SANDWICH PANEL BASED ON COMPLEX MODAL METHOD\*

Yang Xiaodong<sup>1,2†</sup> Bian Qingfeng<sup>1</sup>

(1. College of Aerospace Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China )

(2. College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China )

**Abstract** The flutter of two-dimensional sandwich panel with supersonic aerodynamic loading on one side is studied. The flutter critical Mach number and the effect of viscous damping are studied by using the Galerkin method and the complex modal method. The results show that the flutter occurs when the first and the second mode natural frequency coalesce, where the vibration energy accumulation starts to be positive. Considering the viscoelasticity of the mid-layer, the results show that with the increase of viscous damping, the critical flutter Mach number and the corresponding critical flutter frequency of the system will decrease at first and then increase. It is concluded that the reason for this phenomenon is due to the dual effect of the viscous damping. The viscous damping can reduce the natural frequency to make the system less stable at one hand, and absorb energy which enhances the stability at the other hand. The system appears complex phenomenon as the result of dual effects of the viscous damping. The conclusions of this research will be meaningful in the design of composite panels in supersonic flow.

**Key words** sandwich panel, flutter, viscous damping, complex modal method