

# 随机脉冲控制下超混沌复 Lü 系统的渐近稳定性\*

黄冬梅<sup>†</sup> 徐伟 王亮

(西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)

**摘要** 基于脉冲微分方程的稳定性理论,研究了具有随机信号的脉冲作用下,超混沌复 Lü 系统的渐近稳定性. 给出了确定性和随机脉冲作用下系统达到渐近稳定的判据. 并且提出了在等距脉冲间隔下,系统达到稳定的区域估计值. 通过数值算例,讨论了确定性脉冲和随机脉冲的异同点,并证实,此方法对于外界噪声是比较稳健的.

**关键词** 稳定性, 脉冲控制, 超混沌复 Lü 系统, 噪声

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-048

## 引言

1982 年, Fowler 等<sup>[1]</sup> 引入了复变量的 Lorenz 系统,并讨论了它在实际应用中的重要性<sup>[2]</sup>. 除了著名的复 Lorenz 系统,2007 年, Gamal M. Mahmoud 等<sup>[3]</sup> 引入了复 Chen 和 Lü 系统,并研究了它们的自适应控制和同步问题.

一个混沌吸引子如果至少有两个正的李雅普诺夫指数即为一个超混沌吸引子. 近 30 年,超混沌实变量动力系统已成为许多国内外学者研究的对象,在许多重要领域如非线性电路、同步、脉冲控制和神经网络等方面都有研究,如文献[4-6]. 2009 年,通过加状态反馈控制器和引入复周期激励, Mahmoud 等构造了新的超混沌复 Lü 系统<sup>[7]</sup>.

基于脉冲微分方程理论,确定性脉冲控制下实变量系统已经有了很多研究成果,如文献[8-13]. 众所周知现实生活中的系统总是或多或少受到各种随机噪声的影响的<sup>[14]</sup>,当然,对于脉冲控制的系统也不例外,因此研究随机因素扰动的脉冲控制系统是十分必要的. 近几年,徐、王等人<sup>[15-16]</sup> 讨论了随机脉冲作用下 Lorenz 和 Liu 系统的渐近稳定性. 但是,对于在随机脉冲作用下超混沌复系统的研究,目前尚未见有文献. 本文以超混沌复 Lü 系统为例,给出了确定性和随机脉冲作用下系统达到渐近稳定的充分条件,并给出了确定性和随机脉冲系统达到稳

定时稳定区域的估计值,通过数值算例,证实了该方法的有效性,同时说明此方法对于加性噪声和乘性噪声都是比较稳健的.

## 1 脉冲微分方程的基本理论

考虑如下所示的一般动力系统<sup>[9-10]</sup>

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{1}$$

其中  $f: S \times R^n \rightarrow R^n$  是连续的函数,  $x$  是系统状态变量且  $x \in R^n$ ,  $\dot{x}$  表示  $dx/dt$ . 假设有一个离散的时间集合  $\{t_i\}$ , 满足  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots$  并且  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ .

令  $U(i, x)$  表示状态变量在  $t_i$  时刻的改变量, 则有

$$U(i, x) = \Delta x \Big|_{t=t_i} \triangleq x(t_i^+) - x(t_i^-), \tag{2}$$

其中  $x(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} x(t)$ ,  $x(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} x(t)$ .

一般地,假设  $x(t_i^-) = x(t)$ ,  $U(i, x) = B_i x$ ,  $B_i$  是一个  $n \times n$  矩阵,  $i = 1, 2, \dots$ , 则在给定初始条件下,联立方程(1)和(2),就可得到一个脉冲微分系统,如下所示

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq t_i, \\ \Delta x = B_i x, & t = t_i \\ x(t_0^+) = x_0, & t_0 \geq 0, i = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{3}$$

2012-06-30 收到第 1 稿,2012-07-22 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11172233,10932009)、西北工业大学基础研究基金资助项目(JC20110228)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: huangdongmei123@mail.nwpu.edu.cn

## 2 脉冲控制下超混沌复 Lü 系统的渐近稳定性

取文献[7]中提出的超混沌复 Lü 系统,其中一种形式如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \theta_1(x_2 - x_1) + (1+i)x_4, \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 + \theta_2x_2, \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{2}(\bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2) - \theta_3x_3, \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{2}(\bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2) - \theta_4x_4, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $x_1 = y_1 + iy_2, x_2 = y_3 + iy_4, x_3 = y_5, x_4 = y_6$ , 则系统(4)对应的实变量系统可以用一个六维的实自治系统(5)来描述:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \theta_1(y_3 - y_1) + y_6, \\ \dot{y}_2 = \theta_1(y_4 - y_2) + y_6, \\ \dot{y}_3 = -y_1y_5 + \theta_2y_3, \\ \dot{y}_4 = -y_2y_5 + \theta_2y_4, \\ \dot{y}_5 = y_1y_3 + y_2y_4 - \theta_3y_5, \\ \dot{y}_6 = y_1y_3 + y_2y_4 - \theta_4y_6, \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  和  $\theta_4$  是实系数.

当系数取值  $\theta_1 = 42.0, \theta_2 = 25.0, \theta_3 = 6.0, \theta_4 = 10.0$ , 根据文献[7], 系统(5)有两个正的李亚普诺夫指数  $\lambda_1 = 2.7813, \lambda_2 = 0.4068$ , 因此系统有一个超混沌吸引子, 如图 1 所示.

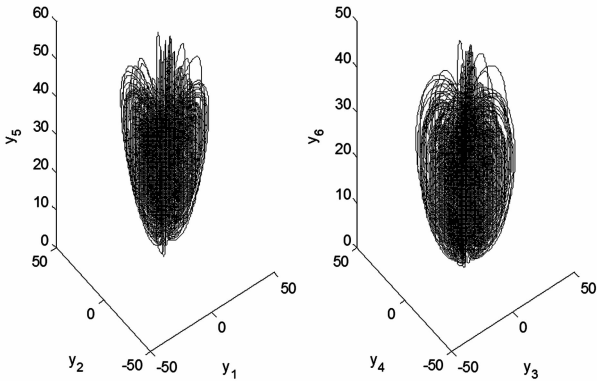


图 1 超混沌复 Lü 系统的超混沌吸引子在三维空间的投影

Fig.1 the projection of the chaotic attractors of the hyperchaotic complex Lü system in three-dimensional space

系统(5)也可以表示为如下形式:

$$\dot{y} = Ay + \Phi(y) \quad (6)$$

其中  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T$ ,  $Ay$  和  $\Phi(y)$  分别为系统的线性和非线性项部分, 即

$$A = \begin{bmatrix} -\theta_1 & 0 & \theta_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\theta_1 & 0 & \theta_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta_4 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_1y_5 \\ -y_2y_5 \\ y_1y_3 + y_2y_4 \\ y_1y_3 + y_2y_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

像许多实变量系统<sup>[4-6,9-13]</sup>, 此类复变量系统也会不可避免地受到脉冲的影响, 因此, 根据脉冲微分方程的基本理论, 可以得到脉冲控制下的超混沌复 Lü 系统如下:

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + \Phi(y), & t \neq t_i, \\ \Delta y = B_i y, & t = t_i, \\ y(t_0^+) = y_0, & t_0 \geq 0, i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (8)$$

$t_i$  代表施加脉冲的时刻.

### 2.1 确定性脉冲控制下系统的渐近稳定性

**定理 1:** 设  $\lambda_{\max}, \beta_i$  是矩阵  $(A + A^T)$  和  $(I + B_i)^T (I + B_i)$  的最大特征值,  $P = \max(|y_6|)$ , 如果存在一个常数  $\alpha > 1$ ,

- (i) 当  $\lambda_{\max} + P \geq 0$  时, 满足
 
$$\ln(\alpha \beta_{2i-2} \beta_{2i-1}) + (\lambda_{\max} + P)(t_{2i} - t_{2i-2}) \leq 0,$$

$$i = 2, 3, \dots,$$
 且  $\sup_i \beta_i \exp[(\lambda_{\max} + P)(t_{i+1} - t_{i-1})] = \eta < \infty,$ 

$$i = 1, 2, \dots,$$
- (ii) 当  $\lambda_{\max} + P < 0$  时, 满足
 
$$\ln(\alpha \beta_{2i} \beta_{2i-1}) + (\lambda_{\max} + P)(t_{2i} - t_{2i-2}) \leq 0,$$

$$i = 1, 2, 3, \dots,$$
 且  $\sup_i \beta_i = \eta < \infty, i = 1, 2, \dots,$

则确定性脉冲控制下系统(8)的原点是渐近稳定的.

**证明:** 设  $V(y) = y^T y$ , 则  $V(y)$  对时间  $t$  求导, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= (Ay + \Phi(y))^T y + y^T (Ay + \Phi(y)) \\ &= y^T (A + A^T) y + y^T \Phi(y) + \Phi(y)^T y \\ &= y^T (A + A^T) y + 2y^T \Phi(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \lambda_{\max} V(y(t)) + P(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \\ &\leq (\lambda_{\max} + P)V(y(t)), \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} V(y(t)) &\leq V(y(t_{i-1}^+)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_{i-1})) \\ t &\in (t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

另一方面

$$\begin{aligned} V(y(t_i^+)) &= [(I + B_i)y(t_i)]^T [(I + B_i)y(t_i)] \\ &= y(t_i)^T [(I + B_i)^T (I + B_i)] y(t_i) \\ &\leq \beta_i y(t_i)^T y(t_i) = \beta_i V(y(t_i)), \end{aligned} \quad (10)$$

由(9)和(10),可以得到下列结果:

对于  $t \in (t_0, t_1]$ ,

$$\begin{aligned} V(y(t)) &\leq V(y(t_0^+)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_0)) \\ &= V(y_0) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_0)), \end{aligned}$$

且  $V(y(t_1)) \leq V(y_0) \exp((\lambda_{\max} + P)(t_1 - t_0))$ ,

对于  $t \in (t_1, t_2]$ ,

$$\begin{aligned} V(y(t)) &\leq V(y(t_1^+)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_1)) \\ &\leq \beta_1 V(y(t_1)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_1)) \\ &\leq \beta_1 V(y(t_0)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_0)), \end{aligned}$$

一般地,对于  $t \in (t_{i-1}, t_i]$ ,

$$\begin{aligned} V(y) &\leq V(y(t_{i-1}^+)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_{i-1})) \\ &\leq \beta_{i-1} V(y(t_{i-1})) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_{i-1})) \\ &\leq \beta_{i-1} V(y(t_{i-2}^+)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_{i-2})) \\ &\leq \beta_{i-1} \beta_{i-2} V(y(t_{i-2})) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_{i-2})) \\ &\quad \vdots \\ &\leq \beta_{i-1} \beta_{i-2} \cdots \beta_1 V(y(t_0)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_0)), \end{aligned}$$

(i) 当  $\lambda_{\max} + P \geq 0$  时, 对于  $t \in (t_{2i-2}, t_{2i-1}]$ ,

$$\begin{aligned} V(y) &\leq \beta_{2i-2} \beta_{2i-3} \cdots \beta_1 V(y(t_0)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_0)) \\ &\leq \beta_{2i-2} \beta_{2i-3} \cdots \beta_1 V(y(t_0)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t_{2i-1} - t_0)) \\ &\leq V(y(t_0)) \beta_{2i-2} \exp((\lambda_{\max} + P)(t_{2i-1} - t_{2i-2})) \beta_{2i-3} \beta_{2i-4} \exp((\lambda_{\max} + P)(t_{2i-2} - t_{2i-4})) \\ &\quad \cdots \beta_2 \beta_3 \exp((\lambda_{\max} + P)(t_4 - t_2)) \times \beta_1 \exp((\lambda_{\max} + P)(t_2 - t_0)) \\ &\leq V(y(t_0)) \eta^2 \frac{1}{\alpha^{i-1}}, \end{aligned} \quad (11)$$

对于  $t \in (t_{2i-1}, t_{2i}]$ ,

$$\begin{aligned} V(y) &\leq \beta_{2i-1} \beta_{2i-2} \cdots \beta_1 V(y(t_0)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_0)) \\ &\leq \beta_{2i-1} \beta_{2i-2} \cdots \beta_1 V(y(t_0)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t_{2i-1} - t_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq V(y(t_0)) \beta_{2i-1} \beta_{2i-2} \exp((\lambda_{\max} + P)(t_{2i-1} - t_{2i-2})) \cdots \beta_2 \beta_3 \exp((\lambda_{\max} + P)(t_4 - t_2)) \times \beta_1 \exp((\lambda_{\max} + P)(t_2 - t_0)) \\ &\leq V(y(t_0)) \eta \frac{1}{\alpha^{i-1}}, \end{aligned} \quad (12)$$

(ii) 当  $\lambda_{\max} + P < 0$  时, 对于  $t \in (t_{2i-2}, t_{2i-1}]$ ,

$$\begin{aligned} V(y) &\leq \beta_{2i-2} \beta_{2i-3} \cdots \beta_1 V(y(t_0)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_0)) \\ &\leq \beta_{2i-2} \beta_{2i-3} \cdots \beta_1 V(y(t_0)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t_{2i-2} - t_0)) \\ &\leq V(y(t_0)) \beta_{2i-2} \beta_{2i-3} \exp((\lambda_{\max} + P)(t_{2i-2} - t_{2i-4})) \cdots \beta_2 \beta_1 \exp((\lambda_{\max} + P)(t_2 - t_0)) \\ &\leq V(y(t_0)) \frac{1}{\alpha^{i-1}}, \end{aligned} \quad (13)$$

对于  $t \in (t_{2i-1}, t_{2i}]$ ,

$$\begin{aligned} V(y) &\leq \beta_{2i-1} \beta_{2i-2} \cdots \beta_1 V(y(t_0)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t - t_0)) \\ &\leq \beta_{2i-1} \beta_{2i-2} \cdots \beta_1 V(y(t_0)) \exp((\lambda_{\max} + P)(t_{2i-1} - t_0)) \\ &\leq V(y(t_0)) \beta_{2i-1} \exp((\lambda_{\max} + P)(t_{2i-1} - t_{2i-2})) \beta_{2i-2} \beta_{2i-3} \exp((\lambda_{\max} + P)(t_{2i-2} - t_{2i-4})) \cdots \beta_2 \beta_1 \exp((\lambda_{\max} + P)(t_2 - t_0)) \\ &\leq V(y(t_0)) \eta \frac{1}{\alpha^{i-1}}, \end{aligned} \quad (14)$$

由方程(11) ~ (14), 可以看到确定性脉冲控制下系统(8)的原点是渐近稳定的.

考虑到实际应用中控制器的可实现性与可操作性, 脉冲间距和控制矩阵常选为常数, 于是根据定理1可获得如下结果.

**推论1:** 设脉冲间隔  $t_{i+1} - t_i = \tau_i = \tau > 0$ ,  $B_i = B$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ),  $P = \max(|y_6|)$ ,  $\lambda_{\max}$  和  $\beta$  是矩阵  $(A + A^T)$  和  $(I + B_i)^T (I + B_i)$  的最大特征值, 若存在  $\alpha > 1$  满足

$$0 \leq \tau \leq -\frac{\ln(\alpha \beta^2)}{2(\lambda_{\max} + P)} \quad (15)$$

则确定性脉冲控制下系统(8)的原点是渐近稳定的.

## 2.2 随机脉冲控制下系统的渐近稳定性

如果  $B_i$  是一个随机矩阵, 则  $(I + B_i)^T (I + B_i)$  的最大特征值  $\beta_i$  仍是随机变量. 记  $\beta_i = E(\beta_i)$ , 这里  $E(\cdot)$  表示对对应的随机变量取数学期望. 可得到如下结果.

注1: 令随机变量  $\bar{\beta}_i$  表示随机矩阵  $(I+B_i)^T(I+B_i)$  的最大特征值,  $\beta_i = E(\bar{\beta}_i)$ ,  $\lambda_{\max}$  是矩阵  $(A+A^T)$  的最大特征值, 若存在  $\alpha > 1$  满足

$$0 \leq \tau_i \leq -\frac{\ln(\alpha \beta_i^2)}{2(\lambda_{\max} + P)} \quad (16)$$

则随机脉冲控制下系统(8)的原点是渐近稳定的.

注2: 脉冲间距  $\tau_i$  和控制矩阵  $B_i (i=1, 2, \dots)$  分别取为常数  $\tau$  和  $B$  时, 随机变量  $\bar{\beta}$  表示随机矩阵  $(I+B)^T(I+B)$  的最大特征值,  $\beta = E(\bar{\beta})$ ,  $\lambda_{\max}$  是矩阵  $(A+A^T)$  的最大特征值, 若存在  $\alpha > 1$  满足

$$0 \leq \tau \leq -\frac{\ln(\alpha \beta^2)}{2(\lambda_{\max} + P)} \quad (17)$$

则随机脉冲控制下系统(8)的原点是渐近稳定的.

注1、注2的证明类似定理1, 这里就不在阐述.

注3: 定理1、推论1、注1、注2给出系统(8)原点渐近稳定条件是充分的, 而非必要的. 也就是说, 可能在某些情况下, 定理1、推论1、注1和注2的条件并不满足, 然而系统(8)的原点仍然是渐近稳定的. 在后面的数值模拟中, 将进一步直观地阐述这种现象.

### 3 数值模拟

系统(5)的参数取值同2节, 则有

$$A + A^T = \begin{bmatrix} -84 & 0 & 42 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -84 & 0 & 42 & 0 & 1 \\ 42 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix},$$

此时  $A + A^T$  的最大特征值为  $\lambda_{\max} = 62.0778$ .

从图1所示的超混沌吸引子, 可以取  $P$  为 45.0, 则  $\lambda_{\max} + P = 107.0778$ .

取控制矩阵  $B_i = B = \text{diag}(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6)$ , 取  $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = K_6 = K$  是一个随机变量, 对于加性噪声的情形,  $K = k + \sigma N$ ; 对于乘性噪声的情形,  $K = k(1 + \sigma N)$ . 此时  $N$  表示服从于标准正态分布的随机噪声,  $\sigma$  代表其强度,  $k$  为一个常数.

当  $\sigma = 0$  时, 系统(8)退化为确定性脉冲控制下的系统, 可以得到  $\beta_i = \beta = (K + 1)^2$ . 当  $\sigma \neq 0$  时, 若取加性噪声, 则有  $\beta = E(\bar{\beta}) = (K + 1)^2 + \sigma^2$ ; 若取乘性噪声, 则有  $\beta = E(\bar{\beta}) = (K + 1)^2 + (\sigma K)^2$ . 根

据推论1和注2, 图2给出了控制矩阵  $B$  中控制参数  $K$  变化时, 使得系统稳定的等距脉冲间隔  $\tau$  的估计区域. 由图2可以看出, 两个随机脉冲控制系统的稳定区域都比确定性脉冲控制系统的稳定区域要小, 也就是说不管是加性噪声还是乘性噪声, 它们在某种程度上都会影响原确定性系统稳定性.

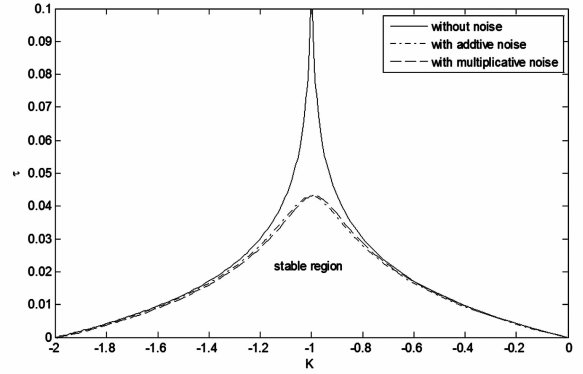


图2 脉冲控制下超混沌复 Lü 系统稳定区域的估计  
Fig. 2 The estimates of the asymptotic stable regions for the hyperchaotic complex Lü system under impulsive control

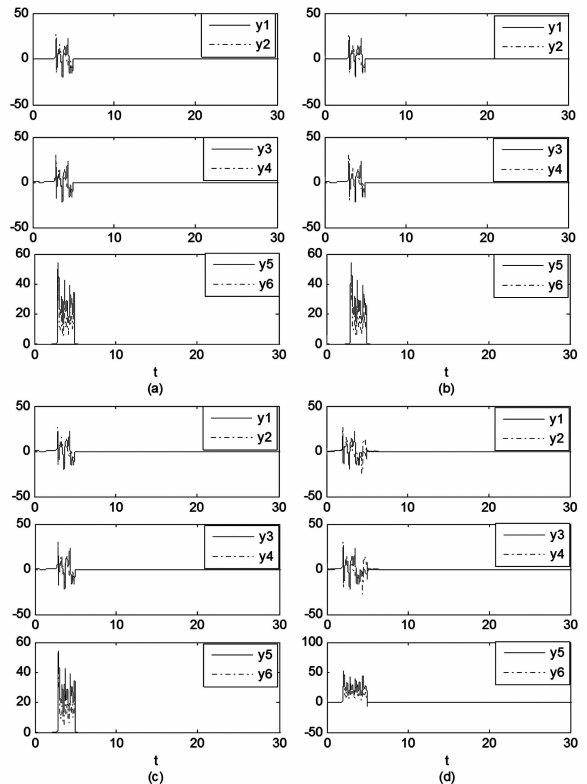
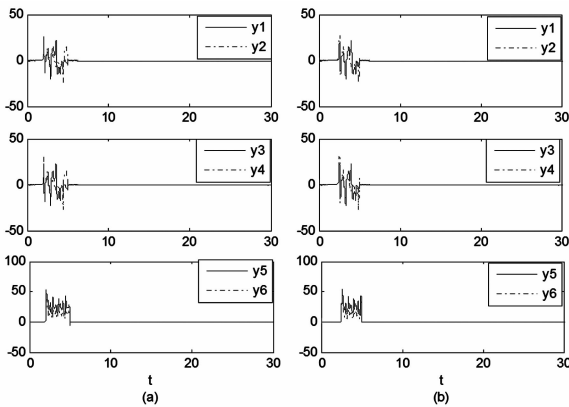


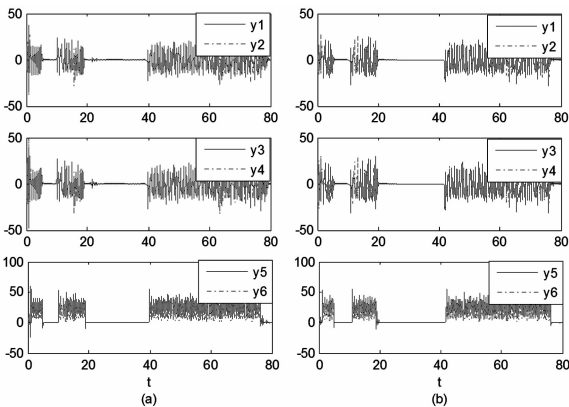
图3 渐近稳定结果 (a)  $\tau=0.02, \sigma=0.0$ ; (b) (c) 分别是  $\tau=0.02, \sigma=0.1$  时加性噪声和乘性噪声的情形; (d)  $\tau=0.025, \sigma=0.0$   
Fig. 3 Asymptotically stable results with (a)  $\tau=0.02, \sigma=0.0$ ; (b) (c) are  $\tau=0.02, \sigma=0.1$  with additive noise and multiplicative noise; (d)  $\tau=0.025, \sigma=0.0$

图4 渐近稳定结果  $\tau = 0.025, \sigma = 0.1$ 

(a) 加性噪声的情形; (b) 乘性噪声的情形

Fig. 4 Asymptotically stable results with  $\tau = 0.025, \sigma = 0.1$ 

(a) with additive noise; (b) with multiplicative noise

图5 不稳定结果  $\tau = 0.05, \sigma = 0.1$ ,

(a) 加性噪声的情形; (b) 乘性噪声的情形

Fig. 5 Unstable results with  $\tau = 0.05, \sigma = 0.1$ ,

(a) with additive noise; (b) with multiplicative noise

取  $K = -0.75$ , 由 (15) 式  $0 \leq \tau \leq 0.0259$ ; 取噪声强度  $\sigma = 0.1$ , 由 (17) 式, 在加性噪声下  $0 \leq \tau \leq 0.0245$ , 乘性噪声下  $0 \leq \tau \leq 0.0251$ . 取脉冲间隔  $\tau = 0.02$ , 图 3(a) 是在初始条件  $y = (1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0)^T$  下确定性脉冲的控制结果, 可以看到系统很快渐近稳定到原点. 图 3(b)(c) 是在随机脉冲控制下系统 (8) 的控制结果, 从图 3 可以看出, 系统经过短暂的波动会很快稳定到原点, 并且系统的运动性质和确定性脉冲控制下相比, 没有发生本质性的变化, 也就是说, 这种控制方法对于加性噪声和乘性噪声都是比较稳健的.

取  $K = -1.3$ , 此时, 由 (15) 和 (17) 式可以得到等距脉冲间隔  $\tau$  的最大值, 对于确定性脉冲控制系统,  $\tau_{\max} = 0.0225$ , 对于具有加性噪声和乘性噪声的随机脉冲控制系统,  $\tau_{\max}$  分别为 0.0215 和

0.0209, 令  $\tau = 0.025$ , 即这时推论 1 和注 2 的条件是不满足的, 但是, 此时系统却是渐近稳定的, 如图 3(d), 图 4 所示.

但是脉冲间隔也不能太大, 当  $K = -1.3$  时取脉冲间隔  $\tau = 0.05$ , 如图 5 所示, 系统很难达到渐近稳定. 即使可以达到稳定状态, 也需要花费很长的时间, 而且在达到稳定之前, 系统状态变量会有较大的波动. 实际中, 可能会给系统带来一定的损害和影响, 因此, 尽管定理 1、推论 1 中的条件是充分的, 脉冲间隔仍然不能太大.

## 4 结论

针对近几年提出的超混沌复 Lü 系统, 利用脉冲微分方程理论, 给出了确定性和随机脉冲控制下系统达到渐近稳定的一个充分条件; 并给出了系统达到渐近稳定时稳定区域的估计值; 模拟结果证实了, 该方法的有效性与可行性, 并进一步说明该方法对于加性噪声和乘性噪声都是稳健的. 虽然上述所做的各种数值模拟都是针对等距脉冲而进行的, 但是, 对于非等距脉冲的各种理论结果也应该是正确的. 进一步的数值模拟还显示, 对于系统取其他参数或控制矩阵取其他形式时, 由这种控制方法所得到的结论是同样有效的.

## 参 考 文 献

- 1 Fowler A C, McGuinness M J, Gibbon J D. The complex Lorenz equations. *Physica D*, 1982, 4: 139 ~ 163
- 2 Fowler A C, Gibbon J D, McGuinness M J. The real and complex Lorenz equations and their relevance to physical systems. *Physica D*, 1983, 7: 126 ~ 134
- 3 Mahmoud G M, Bountis T, Mahmoud E E. Active control and global synchronization of the complex Chen and Lü systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17(12): 4295 ~ 4308
- 4 Cafagna D, Grassi G. New 3D-scroll attractors in hyperchaotic Chua's circuits forming a ring. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2003, 13: 2889 ~ 2903
- 5 Li C D, Liao X F. Complete and lag synchronization of hyperchaotic systems using small impulses. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22: 857 ~ 867
- 6 Wang X Y, Wang M J. Impulsive synchronization of hyperchaotic Lü system. *International Journal of Modern*

- Physics B*, 2011, 27:3671 ~ 3678
- 7 Gamal M. Mahmoud, Emad E. Mahmoud, Mansour E. Ahmed. On the hyperchaotic complex Lü system. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 58: 725 ~ 738
  - 8 Mahmoud G M, Ahmed M E, Mahmoud E E. Analysis of hyperchaotic complex Lorenz systems. *International Journal of Modern Physics C*, 2008, 19: 1477 ~ 1494
  - 9 Yang T, Chua L O. Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 1997, 44: 976 ~ 988
  - 10 Yang T, Yang L, Yang C. Impulsive control of Lorenz system. *Physics Letters A*, 1997, 110: 18 ~ 24
  - 11 Yang T, Yang C M, Yang L B. Control of Rössler system to periodic motions using impulsive. *Physics Letters A*, 1997, 232: 356 ~ 361
  - 12 罗润梓. 一个新混沌系统的脉冲控制与同步. 物理学报, 2007, 10: 5655 ~ 5660 (Luo R Z. Impulsive control and synchronization of a new chaotic system. *Acta Physica Sinica*, 2007, 10: 5655 ~ 5660)
  - 13 Luo R Z. Impulsive control and synchronization of a new chaotic system. *Physics Letters A*, 2008, 372: 648 ~ 653
  - 14 孙中奎, 徐伟, 杨晓丽. 谐和激励与随机噪声作用下具有势的 Duffing 振子的混沌运动. 动力学与控制学报, 2005, 3: 13 ~ 22 (Sun Z K, Xu W, Yang X L. Effect of random noise on chaotic motion of a particle in a potential. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3: 13 ~ 22 (in Chinese))
  - 15 Xu W, Wang L, Rong H W, Li D X, Niu Y J. Analysis for the stabilization of impulsive control Liu's system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 42: 1143 ~ 1148
  - 16 Wang L, Zhao R, Xu W, Zhang Y. Stochastic impulsive control for the stabilization of Lorenz system. *Chinese Physics B*, 2011, 20: 020506

## STOCHASTIC IMPULSIVE CONTROL FOR THE ASYMPTOTIC STABILIZATION OF HYPERCHAOTIC COMPLEX LÜ SYSTEM\*

Huang Dongmei<sup>†</sup> Xu Wei Wang Liang

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract** Based on the theory of impulsive differential equations, this paper studied the asymptotic stability of hyperchaotic complex Lü system under the stochastic impulsive signal. Some criteria were derived for the stabilization of the complex system via an impulsive method. And we also presented the estimate of the stable regions for the equal impulsive intervals. Numerical simulations demonstrated the effectiveness of the theoretical results and also showed that the method was robust against the noise.

**Key words** stability, impulsive control, hyperchaotic complex Lü system, noise

Received 30 June 2012, revised 22 July 2012.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11172233, 10932009) and NPU Foundation for Fundamental Research (JC20110228)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: huangdongmei123@mail.nwpu.edu.cn