

Lurie 广义系统基于观测器的控制器设计*

周正[†]

(63817 部队, 西昌 615606)

摘要 研究了 Lurie 广义系统基于状态观测器的控制器设计问题. 通过使用 Lyapunov 稳定性理论, 线性矩阵不等式方法, 分别给出了状态反馈控制器和观测器的设计方法, 并建立了分离原理, 进而得到了基于观测器的控制器设计方法. 所得结论对广义系统理论本身的发展和实际应用都有非常重要的意义. 最后给出了仿真实例.

关键词 Lurie 广义系统(LDS), 观测器, 控制器, Lyapunov 函数, 线性矩阵不等式(LMI)

DOI: 10. 6052/1672-6553-2013-064

引言

随着科学技术的发展和大型工程技术的需要, 20 世纪 70 年代人们提出了比正常系统应用更为广泛的广义系统, 它大量应用在电力、航天、经济、生物等许多实际的系统模型中^[1]. 近年来, 非线性广义系统的研究引起了很多关注. Lurie 广义系统是一类典型的非线性广义系统, 许多非线性物理系统可以表示成 Lurie 广义系统的结构形式, 即一个线性系统和一个满足扇形条件的非线性单元的反馈连接. 自从 1944 年 Lurie 系统的绝对稳定性问题提出以来, 受到了广泛的关注, 形成了相对独立的理论体系^[2-5].

近年来非线性系统观测器及控制器的设计是非常活跃的研究领域, 取得了丰硕的成果: 文献[6]介绍了自适应状态观测器在非线性系统的自适应输出调节器设计中的应用; 文献[7]给出了一类具有非线性输出系统的观测器的设计方法; 文献[8]提出了一种非线性微分代数系统观测器的设计方法; 文献[9]对一类非线性系统观测器的设计进行了研究, 设计过程没有涉及到任何方程的分解. 研究 Lurie 广义系统的控制器设计问题对于进一步完善广义系统理论和揭示非线性广义系统的本质特征都具有非常重要的意义.

本文研究研究了 Lurie 广义系统基于状态观测

器的控制器设计问题. 分别给出了状态反馈控制器和观测器的设计方法, 并建立了分离原理, 进而解决了基于观测器的控制器设计问题以及相关的控制问题. 将进一步揭示非线性广义系统的本质与特征. 因此, 本文对广义系统的发展具有重要的理论意义和学术价值.

1 问题描述

考虑如下 LDS

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ u = \phi(y) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{m \times n}$, $rank(E) = r$. $\phi(y)$ 是一个时不变且充分光滑的函数, 满足 $\phi_i(0) = 0$ 以及

$$0 \leq \frac{\phi_i(y_a) - \phi_i(y_b)}{y_a - y_b} \leq k_i, i = 1, 2, \dots, m, \\ \forall y_a, y_b \in R^m, y_a \neq y_b \quad (2)$$

记 $K_0 = diag(k_1, k_2, \dots, k_m) > 0$.

引理 1 如果存在矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 满足

$$E^T P = P^T E \geq 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + P^T A & C^T K_0 + P^T B \\ K_0^T C + B^T P & -2I \end{bmatrix} < 0$$

则 LDS(1) 是强绝对稳定的^[10].

2012-09-17 收到第 1 稿, 2013-04-16 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(60904009)

[†] 通讯作者 E-mail: xchilang52851@126.com

由(2)可得, $0 \leq \phi_i(y_i)/y_i \leq k_i, i = 1, 2, \dots, m$
 从而

$$\phi^T(\phi - K_0 y) \leq 0$$

由 $y = Cx$ 可得

$$\phi^T \phi \leq \phi^T K_0 Cx \tag{3}$$

引理2 对任意 $x \neq 0$ 满足

$$\phi^T \phi \leq \phi^T K_0 Cx,$$

若

$$\dot{V}(X) |_{(1)} < 0,$$

则系统(1)是强绝对稳定的^[11].

2 主要结果

考虑如下广义系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1\phi(y) + B_2u(t) \tag{4}$$

$$y = Cx, \quad Ex(0) = Ex_0 \tag{5}$$

其中, $x(t) \in R^n$ 是系统的 n 维状态变量, $u(t) \in R^m$ 是输入, $E, A \in R^{n \times n}$ 且 $\text{rank}(E) = r \leq n, B_1, B_2 \in R^{n \times m}, C \in R^{m \times n}$, 并且 $\phi(\cdot): R^m \rightarrow R^m$ 是连续函数, 满足(2)式.

设计如下控制器

$$u = Kx(t) + F\phi(y)$$

代入(4)式可得如下闭环系统

$$E\dot{x}(t) = (A + B_2K)x(t) + (B_1 + B_2F)\phi(y) \tag{6}$$

定理1 若存在矩阵

$$X \in R^{n \times n}, Y \in R^{m \times n}, F \in R^{m \times m}$$

满足

$$X^T E^T = EX \geq 0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} X^T A^T + Y^T B_2^T + AX + B_2 Y & X^T C^T K_0 + B_1 + B_2 F \\ K_0^T C X + (B_1 + B_2 F)^T & -2I \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

则存在控制器使系统(4) - (5)强绝对稳定.

证明: 由引理1可知, 系统(6)强绝对稳定的一个充分条件是存在矩阵满足

$$E^T P_1 = P_1^T E \geq 0 \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} A_k^T P_1 + P_1^T A_k & C^T K_0 + P_1^T B_k \\ K_0^T C + B_k^T P_1 & -2I \end{bmatrix} < 0$$

其中, $A_k = A + B_1 K, B_k = B_1 + B_2 F$.

即

$$\begin{bmatrix} (A + B_2 K)^T P_1 + P_1^T (A + B_2 K) & C^T K_0 + P_1^T (B_1 + B_2 F) \\ K_0^T C + (B_1 + B_2 F)^T P_1 & -2I \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

对(9)式左乘 P_1^{-T} 右乘 P_1^{-1} , 对(10)式左乘 $H = \text{diag}\{P_1^{-T}, I\}$ 右乘 H^T , 则上两式等价于

$$P_1^{-T} E^T = EP_1^{-1} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} P_1^T (A + B_2 K)^T + (A + B_2 K) P_1^{-1} & P_1^T C^T K_0 + (B_1 + B_2 F) \\ K_0^T C P_1^{-1} + (B_1 + B_2 F)^T & -2I \end{bmatrix} < 0.$$

令 $P_1^{-1} = X, KP_1^{-1} = Y$, 则上面两式等价于

$$X^T E^T = EX \geq 0 \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} X^T A^T + Y^T B_2^T + AX + B_2 Y & X^T C^T K_0 + B_1 + B_2 F \\ K_0^T C X + (B_1 + B_2 F)^T & -2I \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

则定理1得证.

对系统(4-5)设计全维状态观测器如下

$$E \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_1\phi(\hat{y}) + B_2u(t) + L(y - \hat{y}) \tag{13}$$

$$\hat{y} = C\hat{x}, E\hat{x}(0) = E\hat{x}_0 \tag{14}$$

其中, 矩阵 $L \in R^{n \times m}$ 是需要设计的部分.

定义状态估计误差为:

$$e = x - \hat{x},$$

记

$$\varphi(e) = \phi(y) - \phi(\hat{y}),$$

由(2)式可知满足

$$\|\varphi(e)\| \leq \|K_0 e\|, \quad \forall e \in R^n,$$

亦即满足不等式

$$\varphi^T(e)\varphi(e) \leq \varphi^T(e)K_0 C e, \quad \forall e \in R^n \tag{15}$$

由(4)式及(13)式可得误差方程为

$$E\dot{e} = (A - LC)e + B_1\varphi(e) \tag{16}$$

由引理1给出定理2, 证明从略.

定理2 若存在矩阵 $P_2 \in R^{n \times n}, Z \in R^{n \times n}$

满足

$$E^T P_2 = P_2^T E \geq 0 \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} A^T P_2 + P_2^T A + C^T Z + Z^T C & C^T K_0 + P_2^T B_1 \\ K_0^T C + B_1^T P_2 & -2I \end{bmatrix} < 0 \tag{18}$$

则对于系统(4)存在一个形如(13)式的全维状态观测器. 其中, $L = -P_2^{-T} Z^T$ 可以保证估计误差是以指数收敛的.

基于控制器的观测器闭环系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + B_1\phi(y) + B_2u \\ E \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_1\phi(\hat{y}) + B_2u + L(y - \hat{y}) \\ u = K\hat{x} + F\phi(\hat{y}) \\ y = Cx \end{cases}$$

由 $e = x - \hat{x}, \varphi(e) = \phi(y) - \phi(\hat{y})$ 可得

$$\hat{x} = x - e, \phi(\hat{y}) = \phi(y) - \varphi(e),$$

从而

$$\begin{aligned}
 u &= K(x - e) + F[\phi(y) - \varphi(e)] \\
 \begin{cases} E\dot{x} = (A + B_2K)x - B_2Ke + (B_1 + B_2F)\phi(y) - B_2F\varphi(e) \\ E\dot{e} = (A - LC)e + B_1\varphi(e) \end{cases} & \quad (19)
 \end{aligned}$$

定理 3 若定理 1 以及定理 2 中的线性矩阵不等式均满足, 则基于观测器的控制器可以使系统(19)稳定.

证明: 令 $V(x, e) = V_1(x) + \alpha V_2(e) =$

$$x^T E^T P_1 x + \alpha e^T E^T P_2 e$$

考虑(19)式

记 $\Pi_1 =$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}|_{(19)} \leq & x^T [P_1^T(A + B_2K) + (A + B_2K)^T P_1]x - x^T P_1^T B_2 K e - e^T K^T B_2^T P_1 x + \phi^T K_0^T C x + x^T C^T K_0 \phi - 2\phi^T \phi + \\
 & x^T P_1^T (B_1 + B_2F)\phi + \phi^T (B_1 + B_2F)^T P_1 x - x^T P_1^T B_2 F \varphi - \varphi^T F^T B_2^T P_1 x + \alpha e^T [P_2^T(A - LC) + \\
 & (A - LC)^T P_2]e + \alpha \varphi^T B_1^T P_2 e + \alpha e^T C^T K_0 \varphi + \alpha \varphi^T K_0^T C e - 2\alpha \varphi^T \varphi =
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \phi \\ e \\ \varphi \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1^T(A + B_2K) + (A + B_2K)^T P_1 & C^T K_0 + P_1^T(B_1 + B_2F) & P_1^T B_2 K & P_1^T B_2 F \\ K_0^T C + (B_1 + B_2F)^T P_1 & -2I & 0 & 0 \\ K^T B_2^T P_1 & 0 & \alpha P_2^T(A - LC) + (A - LC)^T P_2 & \alpha(C^T K_0 + P_2^T B_1) \\ F^T B_2^T P_1 & 0 & \alpha(K_0^T C + B_1^T P_2) & -2\alpha I \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \phi \\ e \\ \varphi \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \Pi_1 & P_1^T B_2 K & P_1^T B_2 F \\ K^T B_2^T P_1 & 0 & 0 \\ F^T B_2^T P_1 & 0 & \alpha \Pi_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \phi \\ e \\ \varphi \end{pmatrix}$$

显然, 定理 1 和定理 2 可以分别保证 $\Pi_1 < 0, \Pi_2 < 0$, 对于充分大的 $\alpha > 0$, 可知

$$\dot{V}|_{(19)} < 0.$$

由引理 2 知, 系统(19)是强绝对稳定的.

3 仿真算例

首先研究定理的不等式条件的求解问题.

令 $U = [U_1 \ U_2]$ 和 $V = [V_1 \ V_2]$ 是正交矩阵,

满足

$$E = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T.$$

容易验证 $EV_2 = 0, U_2^T E = 0$. 其中, $\Sigma_r \in R^{r \times r}$ 是对角正定矩阵.

根据文献[11]的结果, $Y_1 = Y_2$.

其中,

$$\begin{bmatrix} (A + B_2K)^T P_1 + P_1^T(A + B_2K) & C^T K_0 + P_1^T(B_1 + B_2F) \\ K_0^T C + (B_1 + B_2F)^T P_1 & -2I \end{bmatrix} < 0$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} (A - LC)^T P_2 + P_2^T(A - LC) & C^T K_0 + P_2^T B_1 \\ K_0^T C + B_1^T P_2 & -2I \end{bmatrix} < 0$$

则

$$\begin{aligned}
 \dot{V}|_{(19)} &= (E\dot{x})^T P_1 x + x^T P_1^T E\dot{x} + \alpha (E\dot{e})^T P_2 e + \\
 & \alpha e^T P_2^T E\dot{e} = [(A + B_2K)x - B_2Ke + (B_1 + B_2F)\phi(y) - B_2F\varphi(e)]^T P_1 x + x^T P_1^T [(A + B_2K)x - B_2Ke + (B_1 + B_2F)\phi(y) - B_2F\varphi(e)] + \\
 & \alpha [(A - LC)e + B_1\varphi(e)]^T P_2 e + \\
 & \alpha e^T P_2^T [(A - LC)e + B_1\varphi(e)]
 \end{aligned}$$

又由(3)、(15)两式可得,

$$Y_1 = \{X \in R^{n \times n} \mid X^T E^T = EX\},$$

$$Y_2 = \{X = P_1 E^T + V_2 S \mid P_1 \in R^{n \times n},$$

$$P_1 = P_1^T, S \in R^{(n-r) \times n}\}.$$

于是, 在不增加保守性的前提下, 定理 1 的条件可以分别归结为如下算法.

3.1 算法

状态反馈控制器设计算法:

寻找矩阵

$$P_1 \in R^{n \times n}, P_1 > 0$$

$$S \in R^{(n-r) \times n}, Y \in R^{m \times n}, F \in R^{m \times m}$$

满足

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}$$

其中,

$$T_1 = EP_1^T A^T + S^T V_2^T A^T + Y^T B_2^T + AP_1 E^T +$$

$$\begin{aligned} & AV_2S + B_2Y, \\ T_2 &= T_3^T, \\ T_3 &= K_0^T CP_1 E^T + K_0^T CV_2S + B_1^T + F^T B_2^T, \\ T_4 &= -2I \end{aligned}$$

其中, $K = Y(P_1 E^T + V_2 S)^{-1}$.

注释: LMI 的可行性问题. LMI 的可行性问题可以用内点法等全局收敛的算法进行求解. 因此, 上述算法都是收敛的.

根据文献[11], 观测器设计算法设计为寻找矩阵

$$\begin{aligned} X &\in R^{n \times n}, X > 0, \\ S &\in R^{(n-r) \times n}, Z \in R^{m \times n} \end{aligned}$$

满足

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix}$$

其中,

$$\begin{aligned} W_1 &= A^T(XE + U_2S) + (XE + U_2S)^T A + \\ & C^T Z + Z^T C, \\ W_2 &= W_3^T, \\ W_3 &= K_0^T C + B_1^T(XE + U_2S), \\ W_4 &= -2I, \end{aligned}$$

其中, $L = -(XE + U_2S)^{-T} Z^T$.

3.2 算例

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(y) = 2\sin y + 3y,$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

显然有 $U = V = I$,

即

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由状态反馈控制器设计算法可得

$$K = \begin{bmatrix} -134.3067 & -35.3984 \\ -0.4448 & 2.1573 \\ -1.7970 & 1.6758 \\ 4.3547 & 1.5419 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} -64.0944 & -8.7849 \\ 1.7637 & 2.7842 \end{bmatrix},$$

由观测器设计算法可得

$$L = \begin{bmatrix} 13.7189 & 94.9443 \\ 32.9707 & -21.5682 \\ 0.0851 & 1.2800 \\ 47.1012 & -397.6661 \end{bmatrix},$$

如图所示闭环系统稳定.

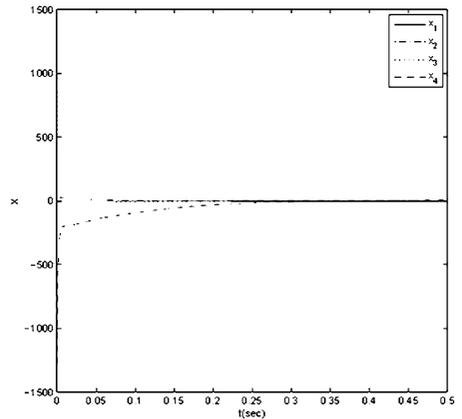


图1 状态轨迹

Fig.1 Trajectory of state

4 小结

本文已经考虑了 Lurie 广义系统基于状态观测器的控制器设计问题, 根据 Lurie 广义系统已有的结论, 给出了状态反馈控制器和观测器的设计方法. 证明了分离原理, 进而得到了基于观测器的控制器设计方法. 证明过程中没有使用模型变换, 降低了结果的保守性. 值得说明的是, 文中的结果都是以线性矩阵不等式的形式给出的, 很容易进行数值求解, 但其一般只是充分条件. 因此, 线性矩阵不等式的可解性问题是需要进一步研究的内容.

参 考 文 献

- 1 Dai L. Singular control systems. New York: Springer-Verlag, 1989
- 2 Gao H J, Chen T W, Lam J. A new delay system approach to network-based control. *Automatica*, 2008, 44(1): 39 ~ 52
- 3 Zhang W A, Yu L. Output feedback stabilization of networked control systems with packet dropout. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(9): 1705 ~ 1710
- 4 王炜,王珏. 一类具有扇区非线性的时变时滞系统的绝对稳定性. *动力学与控制学报*, 2011, 9(2): 158 ~ 161 (Wang wei, Wang ju. Absolute stability for a class of time-varying delay systems with sector-bounded nonlinearity. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(2): 158 ~ 161 (in Chinese))
- 5 Han Q L, Yue D. Absolute stability of Lurie systems with time-varying delay. *IET Control Theory and Applications*, 2007, 1(3): 854 ~ 859
- 6 Delli, Priscoli F, Marconi L, Isidori A. Adaptive observers as nonlinear internal models. *System & Control letters*, 2006, 55(13): 640 ~ 649
- 7 Andreas J, Alexander M. An observer for systems with nonlinear output map. *Automatic*, 2003, 39(14): 909 ~ 918
- 8 Jan A, Erik F. An observer for nonlinear differential algebraic system. *Automatic*, 2006, 42(12): 959 ~ 965
- 9 Farza M, Msaad M, Rossignol L. Observer design for a class of MIMO nonlinear systems. *Automatic*, 2004, 40(14): 135 ~ 143
- 10 杨春雨. 若干类非线性广义系统的稳定性分析与设计 [博士学位论文]. 沈阳: 东北大学, 2009 (Yang C Y. Stability analysis and design for some classes of nonlinear descriptor systems [PhD Thesis]. Shenyang: Northeastern University, 2009(in Chinese))
- 11 Yang C Y, Zhang Q L, Zhou L N. Strongly absolute stability problem of descriptor systems. *Informatica*, 2007, 18(2): 305 ~ 320

OBSERVER BASED CONTROLLER DESIGN FOR LURIE DESCRIPTOR SYSTEMS *

Zhou Zheng[†]

(Xichang Satellite Launch Center, Xichang 615606, China)

Abstract Observer based controller design for Lurie descriptor systems was investigated. By using Lyapunov stability theory and linear matrix inequality (LMI), the state – feedback controller and observer were designed independently. Then by establishing a separation principle, an observer based controller design method was proposed. . Finally, a numerical example was given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words Lurie descriptor systems(LDS), observer, controller, Lyapunov function, linear matrix inequality (LMI)