

主动滑模控制时滞时空混沌星形网络的函数投影同步*

柴元¹ 陈立群^{1,2†}

(1. 上海大学应用数学与力学研究所, 上海 200072) (2. 上海大学力学系, 上海 200444)

摘要 研究了拓扑等价的多个时空混沌系统组成的星形网络, 提出了一种主动滑模控制时滞时空混沌星形网络的函数投影同步控制方法, 实现了多个时空混沌系统的同步. 在结合主动控制和滑模控制方法的基础上, 设计了主动滑模控制器的结构, 得到了网络函数投影同步的必要条件. 以 Gray—Scott 时空系统作为网络节点构成的星形网络为例进行了仿真模拟. 结果验证了主动滑模控制器的有效性.

关键词 时空混沌, 时滞函数投影同步, 星形网络, Lyapunov 稳定性定理, 主动滑模控制

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-058

引言

自从 Ott^[1] 和 Carroll^[2] 等人在 1990 年开创性地实现混沌同步以来, 由于其潜在的应用价值, 唤起了许多领域科研人员的研究兴趣. 随之, 很多同步控制方法被提出, 例如, 广义同步, 投影同步, 相同步, 滑模控制同步, 自适应同步等. 最近, 基于主动控制和滑模控制方法的优点, 提出了一种实现混沌同步的新方法“主动滑模控制方法”^[3]. 其同步机理分为两步: 首先选择适当的主动控制器, 然后设计滑模控制器来实现同步. 另一个有趣的同步现象被创建, 叫做函数投影同步^[4], 驱动和响应系统的状态变量同步到一个函数矩阵. 因为函数投影同步的多样性, 所以很多的学者进行了这方面的研究. 众所周知在神经元和保密通讯信息传递时, 时间延迟是不可避免的^[5]. 所以, 在一个系统与其他系统同步的过程中, 考虑时滞的影响是非常合理的.

通过对比我们发现, 在外部影响方面, 大多数的同步文献都没有考虑任何的外部扰动. 然而, 从实际的角度来看, 噪声干扰是不可避免的. 在不断变化的环境中^[6], 混沌系统总是被环境中的一些未知因素所干扰, 对时空混沌施加一个小扰动将导致该系统的混沌行为急剧变化. 由于混沌同步是不可避免地受到外部干扰, 人为增加干扰影响到混沌系

同步的理论已成为重要的研究课题. 在选取系统方面, 多数的科研人员选择时变混沌系统作为网络节点进行同步研究, 然而自然生态系统是由大量的时空混沌系统所构成. 时空混沌同步在许多领域有着广泛的应用价值^[7], 例如, 安全通信, 物理, 自动控制, 流体, 化学和生物系统. 因此, 时空混沌同步已经吸引了学者非常广泛的关注.

被上述讨论所激发, 本文中, 我们考虑了外部扰动对混沌同步的影响, 选取更符合实际的时空混沌系统作为网络节点, 通过主动滑模控制方法, 研究了时滞时空混沌星形网络的函数投影同步. 基于主动滑模控制技术, 给出了星形复杂网络同步必要条件, 以确保函数投影滞后同步发生, 并有效地消除了噪声的干扰. 数值模拟结果表明该方法的可行性和有效性.

1 同步原理

考虑一个由 N 个相同的时空混沌系统作为节点的星形复杂网络, 其中每个节点在 t 时刻的状态方程为:

$$\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = Au_i(x, t) + F(u_i(x, t)) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

以 N 个时空混沌系统(1)为网络节点, 构成一个单向连接的星形网络, 网络节点 i 满足以下状态

2012-06-27 收到第 1 稿, 2012-06-29 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11232009), 上海市优秀学科带头人计划(09XD1401700), 上海市重点学科建设资助项目(S30106)

† 通讯作者 E-mail: lqchen@staff.shu.edu.cn

方程:

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} = Au_i(x,t) + F(u_i(x,t)) + \sum_{j=1}^N g_{ij}u_j(x,t - \tau_j) + D_i(t) + U_i(x,t) \quad (2)$$

其中 $u_i(x,t) = [u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_n(x,t)]^T \in R^n$ 为节点 i 的状态变量, x, t 为系统的空间和时间变量. $A \in R^{n \times n}$ 代表系统线性部分的常数矩阵, $F: R^n \rightarrow R^n$ 是非系统的非线性部分. g_{ij} 表示耦合矩阵 G 的矩阵元, 它的具体表示因网络的连接类型而异, 并代表网络的拓扑结构. 本文采用单变量耦合连接, 内部耦合函数为 $u_j(x, t - \tau_j)$, $D_i(t)$ 是外部干扰, $U_i(x, t)$ 为控制器.

假设存在一个函数矩阵 $P(t) = \text{diag}\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)\}$, $P(t)$ 表示一个“函数矩阵”. 如果满足, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_1(x, t - \tau_1) - P(t)u_{i+1}(x, t - \tau_{i+1})\| = 0$, 则称星形网络实现了“函数投影滞后同步”, $\|D_1(t - \tau_1)\| < \delta_1$, $\|P(t)D_{i+1}(t - \tau_{i+1})\| < \delta_2$, 其中 δ_1, δ_2 为常数.

定义误差 $e_i(x, t) = u_1(x, t - \tau_1) - P(t)u_{i+1}(x, t - \tau_{i+1})$, 网络的误差可以被表示为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial u_1(x,t - \tau_1)}{\partial t} - \dot{P}(t)u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1}) - P(t)\frac{\partial u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1})}{\partial t} \\ &= Au_1(x,t - \tau_1) + F(u_1(x,t - \tau_1)) + D_1(t - \tau_1) - \dot{P}(t)u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1}) - P(t)(Au_{i+1}(x,t - \tau_{i+1}) + F(u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1}))) + (u_1(x,t - \tau_1) - u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1})) + D_{i+1}(t - \tau_{i+1}) + U_{i+1}(x,t) \\ &= Ae_i(x,t) - \dot{P}(t)u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1}) + F(u_1(x,t - \tau_1)) - P(t)F(u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1})) + D_1(t - \tau_1) - P(t)D_{i+1}(t - \tau_{i+1}) - P(t)(u_1(x,t - \tau_1) - u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1})) - P(t)U_{i+1}(x,t) \\ &= Ae_i(x,t) - \dot{P}(t)u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1}) + F_0(x,t) + D(t) - P(t)\Delta u(x,t) - P(t)U_{i+1}(x,t) \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$F_0(x,t) = F(u_1(x,t - \tau_1)) - P(t)F(u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1})), \Delta u(x,t) = u_1(x,t - \tau_1) - u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1}), D(t) = D_1(t - \tau_1) - P(t)D_{i+1}(t - \tau_{i+1}).$$

实现网络同步, 即要满足下式:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u_1(x,t - \tau_1) -$$

$$P(t)u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1})\| = 0 \quad (4)$$

依据主动控制设计方法, 我们选择如下的控制器 $U_i(x, t)$

$$U_i(x,t) = P^{-1}(t)(F_0(x,t) - \dot{P}(t)u_{i+1}(x,t - \tau_{i+1}) - P(t)\Delta u(x,t)) - P^{-1}(t)H_i(x,t) \quad (5)$$

式中, $i=2, 3, \dots, N$.

误差系统(3)改写为

$$\frac{\partial e_i(x,t)}{\partial t} = Ae_i(x,t) + H_i(x,t) + D(t) \quad (6)$$

等式(6)描述了一个新定义的控制输入 $H_i(x, t)$. 在主动滑模控制法则中, $H_i(x, t)$ 是基于滑模控制律设计的

$$H_i(x,t) = KW_i(x,t) \quad (7)$$

其中 $K = [K_1, K_2, \dots, K_n]^T \in R^n$ 是一个常数增益矩阵和 $W_i(x, t) \in R$ 是控制输入, 满足下式:

$$W_i(x,t) = \begin{cases} W_i^+(x,t) & S_i(e) \geq 0 \\ W_i^-(x,t) & S_i(e) < 0 \end{cases} \quad (8)$$

设 $S_i = S_i(e)$ 为滑模控制的切换函数, 于是有 $\dot{e}_i(x,t) = Ae_i(x,t) + KW_i(x,t) + D(t)$ (9)

滑模面的定义如下:

$$S_i(e) = Ce_i \quad (10)$$

其中 $C = [C_1, C_2, \dots, C_n]$ 是一个常数矩阵, 当滑模面满足下列条件:

$$\dot{S}_i(e) = 0 \quad \text{and} \quad S_i(e) = 0 \quad (11)$$

基于(9) - (11), 可以推断出如下结果:

$$\dot{S}_i(e) = C(Ae_i(x,t) + KW_i(x,t) + D(t)) \quad (12)$$

当系统发生滑模运动时, 需满足如下条件:

$$\dot{S}_i = -q\text{sgn}(S_i) - rS_i \quad (13)$$

其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数. 常数满足 $q > 0$ 和 $r > 0$.

依据等式(9), (10), (13), 我们有

$$W_i(x,t) = -(CK)^{-1}[CAe_i(x,t) + CD(t) + q\text{sgn}(S_i) + rS_i] \quad (14)$$

在实际工程应用中干扰是未知的. 因此, 控制输入 $W_i(x, t)$ 被改写如下:

$$W_i(x,t) = -(CK)^{-1}[CAe_i(x,t) + q\text{sgn}(S_i) + rS_i] \quad (15)$$

定理 1 通过添加控制输入 $W_i(x, t)$, 满足不等式 $\|C\|(\delta_1 + \delta_2) < q$, 可实现星形网络函数滞后投影同步, 也就是说, 误差的状态轨迹沿着滑模面收敛到零.

证明 考虑如下的 Lyapunov 函数:

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} S_i^2 \quad (16)$$

等式(16)的时间导数是

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^N S_i \dot{S}_i = \sum_{i=1}^N S_i C \{ A e_i(x, t) - \\ & K(CK)^{-1} [CA e_i(x, t) + q \operatorname{sgn}(S_i) + r S_i] + \\ & D(t) \} = \sum_{i=1}^N (- S_i q \operatorname{sgn}(S_i) - r S_i^2 + \\ & S_i C D_1(t - T_1) - S_i C P(t) D_{i+1}(t - \tau_{i+1})) \leq \\ & \sum_{i=1}^N (- \| S_i \| q \operatorname{sgn}(S_i) - r S_i^2 + \\ & \| S_i C \| \| D_1(t - T_1) \| + \\ & \| S_i C \| \| P(t) D_{i+1}(t - \tau_{i+1}) \|) \leq \\ & \sum_{i=1}^N (- \| S_i \| q \operatorname{sgn}(S_i) - r S_i^2 + \| S_i C \| \delta_1 + \\ & \| S_i C \| \delta_2) = \sum_{i=1}^N (\| S_i \| [\| C \| (\delta_1 + \\ & \delta_2) - q] - r S_i^2) \quad (17) \end{aligned}$$

当满足不等式 $\| C \| (\delta_1 + \delta_2) < q$, 即. 根据 Lyapunov 稳定性理论, 误差系统是渐近稳定的. 定理 1 证明完毕.

2 数值模拟

为了说明上述的同步原理, 以拓扑等价 Gray - Scott 时空混沌系统作为星型网络的节点进行同步模拟.

Gray - Scott 时空混沌系统, 其动力学方程如下描述^[8]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -u_1 u_2^2 + a(1 - u_1) + d_1 \Delta^2 u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = u_1 u_2^2 - (a + b) u_2 + d_2 \Delta^2 u_2 \end{cases} \quad (18)$$

其中参量 $a = 0.028, b = 0.053, d_1 = 2 \times 10^{-5}, d_2 = 10^{-5}$. 周期性边界条件取 $u_1(0, t) = u_1(L, t) = 1, u_2(0, t) = u_2(L, t) = 0$. 选取时间步长 $\Delta t = 1$, 空间步长 $\Delta L = 0.01$. 系统状态变量的时空演化呈现混沌行为, 其相图如图 1、2 所示. 单向连接星形网络的耦合矩阵 G 为

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} U_i(x, t) &= \begin{bmatrix} U_{i1}(x, t) \\ U_{i2}(x, t) \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -(a + b) \end{bmatrix} \\ F(u_i(x, t)) &= \begin{bmatrix} -u_{i1}(x, t) u_{i2}(x, t)^2 + a + d_{i1} \nabla^2 u_{i1}(x, t) \\ u_{i1}(x, t) u_{i2}(x, t)^2 + d_{i2} \nabla^2 u_{i2}(x, t) \end{bmatrix} \\ D_i(t) &= \begin{bmatrix} d_{i1}(t) \\ d_{i2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^i 0.0001 \cos(20t) \\ (-1)^i 0.0001 \cos(10t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中 $P_1(t) = \operatorname{diag}\{60 + 2\sin(t), 60 + 2\cos(t)\}, P_2(t) = \operatorname{diag}\{40 + 2\sin(t), 40 + 2\cos(t)\}, P_3(t) = \operatorname{diag}\{20 + 2\sin(t), 20 + 2\cos(t)\}$ 并且 $U_1(x, t) = 0$. 控制参数 $C = [1, 1], K = [1, 1]^T, r = 0.2, q = 0.008$. 根据定理 1, 得到控制输入 $W_i(x, t)$

$$W_i(x, t) = [-0.172 \quad -0.119] e_i - 0.008 \operatorname{sgn}(S_i) = \begin{cases} -0.172 e_{i1} - 0.119 e_{i2} - 0.008 & S_i > 0 \\ -0.172 e_{i1} - 0.119 e_{i2} + 0.008 & S_i < 0 \end{cases} \quad (20)$$

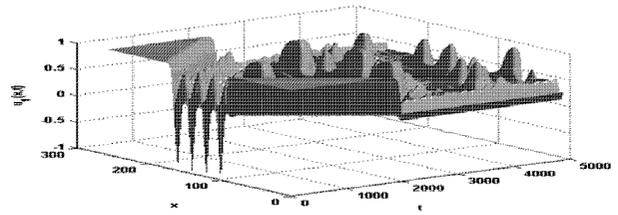


图 1 变量 $u_1(x, t)$ 的时空演化

Fig. 1 The spatiotemporal evolution of $u_1(x, t)$

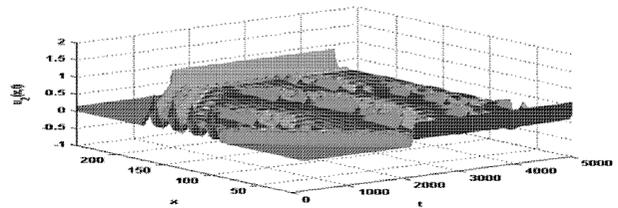


图 2 变量 $u_2(x, t)$ 的时空演化

Fig. 2 The spatiotemporal evolution of $u_2(x, t)$

从如图 3 - 8 所示的误差演化图样中可以看出, 误差值在演化初始未加控制阶段振荡还存在, 在 $t = 2300$ 施加控制后, 经过很短的时间序列后, 节点与节点之间相应状态变量的运动轨迹趋于一致, 即误差变量趋于零, 网络同步得以实现. 模拟仿

真我们还发现,无论节点数 N 取何值,无论节点是任何的时间或时空混沌系统,整个复杂网络的混沌同步均可实现.

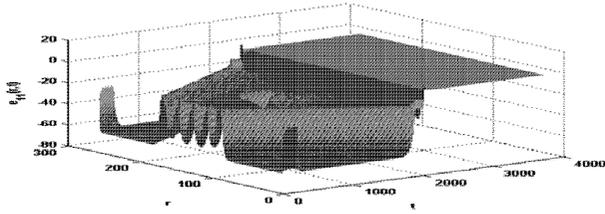


图3 误差变量 $e_{11}(x,t)$ 的时空演化

Fig. 3 The spatiotemporal evolution of error $e_{11}(x,t)$

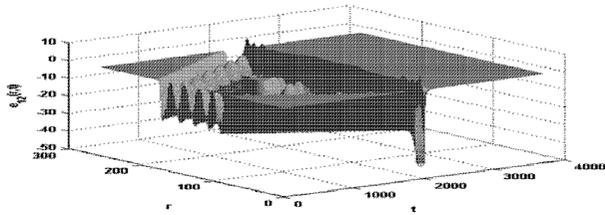


图4 误差变量 $e_{12}(x,t)$ 的时空演化

Fig. 4 The spatiotemporal evolution of error $e_{12}(x,t)$

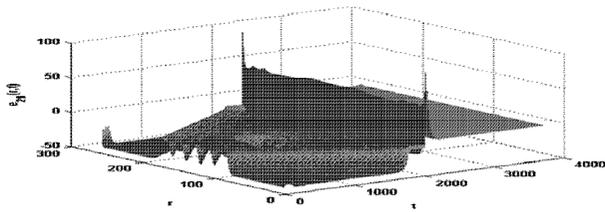


图5 误差变量 $e_{21}(x,t)$ 的时空演化

Fig. 5 The spatiotemporal evolution of error $e_{21}(x,t)$

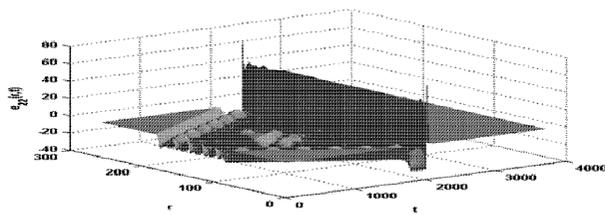


图6 误差变量 $e_{22}(x,t)$ 的时空演化

Fig. 6 The spatiotemporal evolution of error $e_{22}(x,t)$

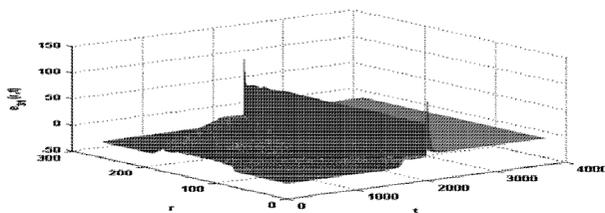


图7 误差变量 $e_{31}(x,t)$ 的时空演化

Fig. 7 The spatiotemporal evolution of error $e_{31}(x,t)$

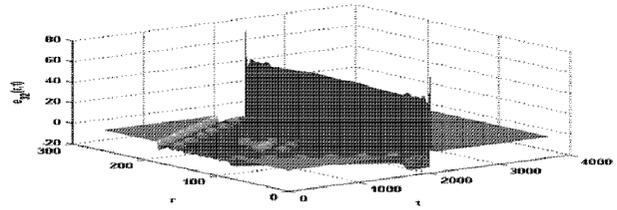


图8 误差变量 $e_{32}(x,t)$ 的时空演化

Fig. 8 The spatiotemporal evolution of error $e_{32}(x,t)$

3 结论

本文通过以 Gray - Scott 时空系统作为网络节点构成的星形网络为例进行了仿真模拟,得到如下结论:任选网络一个节点的 Gray - Scott 时空混沌系统作为目标系统,整个星形网络将同步于这个指定的网络节点的时空混沌状态.无论星形网络的节点数如何递增以及何时开始施加网络耦合,经过短暂的时间序列,整个星形网络所有节点相应的误差变量随时间的演化均迅速地趋于零.

参 考 文 献

- Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos. *Physical Review Letter*, 1990, 64 (11): 1196 ~ 1199
- Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letter*, 1990, 64 (8): 821 ~ 824
- Bowong S, Kakmeni, F M M, Tchawoua C. Controlled synchronization of chaotic systems with uncertainties via a sliding mode control design. *Physical Review E*, 2004, 70 (6): 066217
- Sudheer K S, Sabir M. Function projective synchronization in chaotic and hyperchaotic systems through open-plus-closed-loop coupling. *Chaos*, 2010, 20: 013115
- Selivanov A A, Lehnert J, Dahms T, Hövel P, Fradkov A L, Schöll E. Adaptive synchronization in delay-coupled networks of Stuart-Landau oscillators. *Physical Review E*, 2012, 85 (1): 016201
- Behzad M, Salarieha H, Alasty A. Chaos synchronization in noisy environment using nonlinear filtering and sliding mode control. *Chaos Solitons Fractals*, 2008, 36 (5): 1295 ~ 1304
- Lü L, Meng L. Parameter identification and synchronization of spatiotemporal chaos in uncertain complex network. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 66 (4): 489 ~ 495
- Pearson J E. Complex patterns in a simple system. *Sci-*

ence, 1993, 261 (5118): 189 ~ 192

FUNCTION PROJECTIVE LAG SYNCHRONIZATION OF SPATIOTEMPORAL CHAOS IN STAR NETWORK VIA ACTIVE SLIDING MODE CONTROL *

Chai Yuan¹ Chen Li Qun^{1,2†}

(1. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China*)

(2. *Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, China*)

Abstract This paper investigated function projective lag synchronization of spatiotemporal chaos in star network. A control scheme was designed via active sliding mode approach. Based on the combination of active control and sliding mode control method, the structure of the active sliding mode controllers was designed, and the necessary conditions of star network function projective lag synchronization were obtained. The control law was applied to spatiotemporal Gray – Scott systems. Numerical simulations were presented to demonstrate the effectiveness of the proposed active sliding mode controllers.

Key words spatiotemporal chaos, function projective lag synchronization, star network, Lyapunov stability theory, active sliding mode control

Received 27 June 2012, revised 29 June 2012.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11232009), Shanghai Subject Chief Scientist Project (09XD1401700), Shanghai Leading Talent Program, Shanghai Leading Academic Discipline Project (S30106)

† Corresponding author E-mail: lqchen@staff.shu.edu.cn