

# 多频简谐激励下裂纹梁的非线性振动响应\*

邹鸿翔<sup>1</sup> 魏克湘<sup>2†</sup> 杜荣华<sup>1</sup> 刘迎春<sup>2</sup>

(1. 长沙理工大学汽车与机械学院, 长沙 410004) (2. 湖南工程学院机械工程系, 湘潭 411101)

**摘要** 主要对含裂纹梁在振动与超声波联合激励下所出现的非线性动力响应的机理和特性进行研究. 将疲劳裂纹在外加激励下的状态简化为周期性张开-闭合的非线性过程, 基于圣维南原理, 采用有限元方法建立了含非对称疲劳裂纹梁的非线性数值分析模型. 利用非线性输出频率响应函数(NOFRFs)概念, 对裂纹梁在高-低频简谐激励下所出现的非线性动力响应特性的机理进行了解释. 具体以悬臂梁为例, 仿真分析了裂纹深度和裂纹位置等参数的变化对系统非线性动力响应特性的影响规律.

**关键词** 非线性特性, 裂纹检测, 多频激励, 非线性输出频率响应函数

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-035

## 引言

疲劳裂纹是结构损伤的主要方式之一, 发展实时可靠的结构疲劳裂纹早期无损检测方法, 以避免由于疲劳裂纹而引发的事故, 具有重要的工程应用价值. 目前国内外学者已提出了很多结构无损检测方法, 如声发射法<sup>[1]</sup>, 电涡流法<sup>[2]</sup>, 基于振动法<sup>[3]</sup>和超声检测技术<sup>[4]</sup>. 其中超声检测技术具有比较大的检测范围, 对小裂纹也有高灵敏度<sup>[5]</sup>, 获得了广泛关注.

传统超声检测技术主要利用声波传播过程中遇到缺陷时波的反射、散射和幅值变化等线性特征进行缺陷检测. 最近几年, 人们对利用非线性振动和声学现象进行裂纹检测产生了兴趣, 因为基于声学信号的非线性效应方法比其他基于线性效应的技术对裂纹更加敏感<sup>[6, 7]</sup>. 这种方法利用高频超声波和低频振动对结构进行联合激励, 当被检测结构出现裂纹时, 两种激励信号相互作用导致波的调制—“弱”的声波信号被“强”的振动信号调制, 出现非线性调制响应效应, 并且输出响应的幅值与裂纹大小和位置直接相关<sup>[8, 9]</sup>. 因此, 非线性调制响应可以作为结构中出现裂纹的象征, 用于结构裂纹的无损检测. 目前已有很多学者进行了这方面的研究. Donskoy 和 Sutin<sup>[10]</sup>利用超声波和振动的非线性调制作用在不同的结构中进行裂纹检测, 他们发

现, 非线性技术比传统线性声学技术有一定的优点, 特别是辨别能力强、敏感度高并适用于高度不均匀结构. Duffour 等人<sup>[6]</sup>研究了用于金属结构裂纹检测的振动调制方法, 研究证明了这种方法对裂纹分开和闭合的初始状态极其敏感. Parsons 和 Staszewski<sup>[8]</sup>利用高-低频激励对金属结构的疲劳裂纹进行检测. Ryles 等人<sup>[11]</sup>比较了非线性声波和 Lamb 波技术用于结构疲劳裂纹的检测, 结果表明两种方法对微疲劳裂纹有相似的敏感度. Hu<sup>[9]</sup>和 Aymerich<sup>[12]</sup>等人分别对非线性振动调制方法用于金属结构和复合材料结构的裂纹检测进行了研究. 但是从所参考的文献来看, 大部分研究工作主要是对非线性调制效应用于裂纹检测的定性分析很少有尝试对裂纹的定量评估. 同时, 尽管提出了不同的理论尝试去解释这些非线性效应, 但仍然没有很好揭示低频振动激励信号如何调制高频声波响应<sup>[9]</sup>.

本文主要拟对裂纹结构在受到高频超声波和低频振动混合激励下的非线性响应特征进行系统分析, 探讨裂纹梁在高-低频简谐激励下所出现的非线性动力响应特性的机理, 定量评估裂纹梁的非线性调制响应对裂纹尺寸的敏感度.

## 1 裂纹梁的有限元模型

考虑如图 1 所示的横向闭合裂纹梁结构. 设梁

2012-07-15 收到第 1 稿, 2012-07-18 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(51075138)和湖南省科学技术厅科技计划项目(2012GK3081)

† 通讯作者 E-mail: wei\_kx@163.com

的长度为  $L$ , 高度为  $h$ , 宽度为  $b$ , 有一深度为  $a$  的裂纹, 距离左端为  $L_c$ .

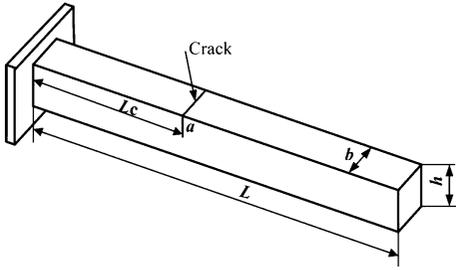


图1 裂纹梁结构示意图

Fig.1 Cantilever beam with an edge crack

假设当梁振动时, 裂纹会周期性开一合, 且梁的刚度随着裂纹状态的变化而改变 (如图2所示). 则裂纹可以采用改变梁的刚度来建模. 目前有很多裂纹梁的建模方法, 一般可以归纳为以下三类<sup>[13]</sup>: 局部刚性降低模型、离散弹簧模型和二维或三维复合模型. 本文采用参考文献[14]中所提出的有限元方法对裂纹进行建模.

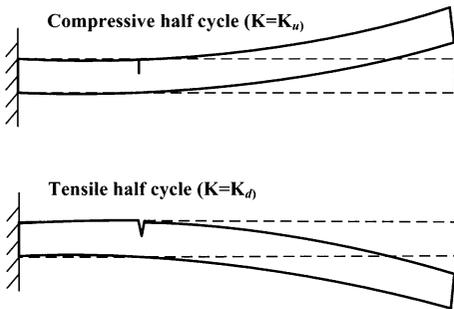


图2 裂纹开一合过程

Fig.2 Crack opening - closing process

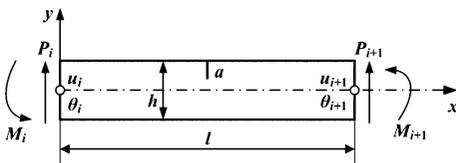


图3 裂纹单元示意图

Fig.3 Schematic of a crack element

### 1.1 单元矩阵

基于圣维南原理, 假设应力场仅在裂纹邻近区域受到影响, 则当单元尺寸在一定范围内时, 可以认为除裂纹单元之外的其他单元, 其刚度矩阵不变. 对图3所示的裂纹单元, 假设只考虑弯曲变形, 则其应变能可以表达为

$$W = W^{(0)} + W^{(1)} \quad (1)$$

其中,  $W^{(0)}$  是无裂纹单元的应变能

$$W^{(0)} = \frac{1}{2EI} \int_0^l (M + Px)^2 dx \quad (2)$$

而  $W^{(1)}$  是因为裂纹而增加的应变能, 可以通过以下给出

$$W^{(1)} = b \int_0^a [(K_{IM} + K_{IP})^2 + K_{IIP}^2] / E' da \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{IM} &= (6M/bh^2) \sqrt{\pi a} F_1(s) \\ K_{IP} &= (3Pl/bh^2) \sqrt{\pi a} F_1(s) \\ K_{IIP} &= (P/bh) \sqrt{\pi a} F_{II}(s) \end{aligned} \quad (4)$$

且

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \sqrt{(2/\pi s) \tan(\pi s/2)} [0.923 + 0.199(1 - \sin(\pi s/2))^4] (\pi s/2) \\ F_{II}(s) &= (3s - 2s^2)(1.122 - 0.561s + 0.085s^2 + 0.18s^3) / \sqrt{1-s} \end{aligned} \quad (5)$$

在以上等式中,  $E' = E/(1 + \nu)$  为平面应变,  $E$  是弹性模量,  $\nu$  是泊松比,  $I$  是横向截面的惯性力矩,  $s = a/h$  是相对裂纹大小,  $a$  是裂纹深度,  $h$  和  $b$  分别是横截面的高度和宽度, 而  $K_I$  和  $K_{II}$  分别为裂纹分开和闭合时的应力强度因子.

利用线性弹性范围的卡氏定理, 裂纹单元  $C_e$  的柔度矩阵的向量  $c_{ik}$  可以阐述为

$$c_{ik} = \frac{\partial^2 W}{\partial P_i \partial P_k} = c_{ki}, i, k = 1, 2 \quad P_1 = P, P_2 = M \quad (6)$$

而无裂纹单元的柔度矩阵  $C_e^{(0)}$  中的向量  $c_{ik}^{(0)}$  可以写作

$$c_{ik}^0 = \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial P_i \partial P_k} = c_{ki}^0, i, k = 1, 2 \quad P_1 = P, P_2 = M \quad (7)$$

利用虚功原理, 无裂纹单元的刚度矩阵可以写作

$$K_{ue} = TC_e^{(0)-1} T^T \quad (8)$$

而裂纹单元的刚度矩阵为

$$K_{de} = TC_e^{-1} T^T \quad (9)$$

其中  $T$  为从转换矩阵, 且为

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -l & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

假设裂纹只对梁的刚度产生影响且对质量和阻尼没有影响, 因此可以得到单元质量矩阵

$$M_e = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中  $m$  是梁每一单位长度的质量.

基于比例阻尼模型<sup>[15]</sup>, 阻尼矩阵  $D$  可以通过与无裂纹结构相关的模态矩阵转换计算得到

$$D = (\Phi^T)^{-1} d \Phi^{-1} \quad (12)$$

且

$$d = 2 \begin{bmatrix} \zeta_1 \omega_1 M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta_2 \omega_2 M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_n \omega_n M_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中  $\zeta_i$  是第  $i$  个阻尼比,  $\omega_i$  是第  $i$  个固有频率,  $M_i$  是第  $i$  个与无裂纹梁相关的模态质量.

## 1.2 运动方程

考虑在激励力  $F$  作用下裂纹截面分开和闭合的变化状态. 当裂纹分开时, 它影响局部裂纹单元的刚度. 当裂纹闭合时, 它对梁刚度的影响可以忽略不计. 因此裂纹梁的运动方程可以通过以下两种不同等式给出, 一种描述裂纹闭合时的状态, 而另一种表示裂纹分开时的状态.

$$M\ddot{u} + D\dot{u} + K_u u = PF(t), \delta = 0$$

$$M\ddot{u} + D\dot{u} + K_d u = PF(t), \delta = 1 \quad (14)$$

其中, 参数  $\delta$  确定梁的裂纹状态 ( $\delta = 0$  代表裂纹闭合,  $\delta = 1$  代表裂纹张开),  $u$  为位移向量,  $M$  为质量矩阵,  $D$  为阻尼矩阵,  $K_u$  和  $K_d$  分别为裂纹闭合和张开时的刚度矩阵,  $P$  为力向量, 而  $F(t)$  为激励力函数.

## 2 高低频调制机理

方程(14)描述的裂纹梁是一个双线性特性的非线性系统. 许多研究已经表明, 当双线性特性的非线性系统受到单谐波输入时, 在输出响应中可以观察到超谐波成分. 而当受到多个谐波输入, 在系统响应中一些新的频率成分以输入谐波的“耦合项”产生<sup>[18]</sup>. 这些现象称为非线性效应, 已经证明其对结构中的裂纹非常敏感. 这种现象可以通过 Volterra 级数理论来解释<sup>[17]</sup>.

众所周知, Volterra 级数方法是通过一系列初次和高次频率响应函数 (FRFs)<sup>[16, 17]</sup> 来表示一个非线性系统, 是分析非线性系统的有力工具. 基于

Volterra 级数, Lang 等人<sup>[19]</sup> 提出了非线性输出频率响应函数 (NOFRFs) 的概念, 并且发现结构裂纹可以通过观察 NOFRFs 中的各种谐波波峰进行检测. 这个概念可以认为是线性系统的 FRFs 在非线性领域的推广. 在本节中, 我们采用 NOFRFs 的概念来解释多频激励下裂纹梁的非线性响应.

在方程(14)中, 单元节点位移  $u_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) 和输入力  $F(t)$  的关系可以用 Volterra 级数进行描述<sup>[18]</sup>

$$u_i(t) = \sum_{l=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_l(t) (\tau_1, \dots, \tau_l) \prod_{k=1}^l F(t - \tau_k) d\tau_k \quad (15)$$

其中  $h_l(t) (\tau_1, \dots, \tau_l)$  是第  $l$  阶 Volterra 级数, 而  $N$  表示系统非线性的最大阶数. 在频域中, 公式(15) 可以表示为

$$U_i(j\omega) = \sum_{l=1}^N U_{(i,l)}(j\omega) = \sum_{l=1}^N G_l(j\omega) F_l(j\omega), \quad (i = 1, \dots, 2n) \quad (16)$$

上式中,  $G_l(j\omega)$  是第  $l$  阶非线性输出频率响应函数 (NOFRF), 它被 Lang 和 Billings<sup>[19]</sup> 定义为

$$G_l(j\omega) = \frac{\int_{\omega_1 + \dots + \omega_l = \omega} H_l(j\omega_1, \dots, j\omega_l) \prod_{k=1}^l F(j\omega_k) d\sigma_{l\omega}}{\int_{\omega_1 + \dots + \omega_l = \omega} \prod_{k=1}^l F(j\omega_k) d\sigma_{l\omega}} \quad (17)$$

其中

$$F_l(j\omega) = \frac{1/\sqrt{l}}{(2\pi)^{l-1}} \int_{\omega_1 + \dots + \omega_l = \omega} \prod_{k=1}^l F(j\omega_k) d\sigma_{l\omega} \neq 0 \quad (18)$$

而方程

$$H_l(j\omega_1, \dots, j\omega_l) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_l(\tau_1, \dots, \tau_l) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_l\tau_l)} d\tau_1 \cdots d\tau_l \quad (19)$$

定义了广义频率响应函数 (GFRF), 它是  $h_l(\tau_1, \dots, \tau_l)$  的多维傅里叶变换, 而

$$\int_{\omega_1 + \dots + \omega_l = \omega} H_l(j\omega_1, \dots, j\omega_l) \prod_{k=1}^l F(j\omega_k) d\sigma_{l\omega} \quad (20)$$

代表  $\int_{\omega_1 + \dots + \omega_l = \omega} H_l(j\omega_1, \dots, j\omega_l) \prod_{k=1}^l F(j\omega_k) d\sigma_{l\omega}$  在  $l$  维超平面的积分.

当非线性系统受到谐波力输入

$$f(t) = A \cos(\omega_f t + \beta) \quad (21)$$

则输出谱  $U_i(j\omega)$  可以描述为<sup>[19]</sup>

$$U_i(j\omega) = \sum_{l=1}^N U_{(i,l)}(j\omega) = \sum_{l=1}^N G_l^H(j\omega) A_l(j\omega) \quad (22)$$

且

$$G_l^H(j\omega) = \frac{(1/2^l) \sum_{\omega_{k_1} + \dots + \omega_{k_l} = \omega} H_l(j\omega_{k_1}, \dots, j\omega_{k_l}) A(j\omega_{k_1}) \dots A(j\omega_{k_l})}{(1/2^l) \sum_{\omega_{k_1} + \dots + \omega_{k_l} = \omega} A(j\omega_{k_1}) \dots A(j\omega_{k_l})} \quad (23)$$

和

$$A_l(j\omega) = \frac{1}{2^l} \sum_{\omega_{k_1} + \dots + \omega_{k_l} = \omega} A(j\omega_{k_1}) \dots A(j\omega_{k_l}) \neq 0 \quad (24)$$

定义系统的第  $l$  阶输出频率响应为  $\Omega_l$ , 由公式(22)可以得到

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n \quad (25)$$

而  $\Omega_l$  由一系列频率确定

$$\{\omega = \omega_{k_1} + \dots + \omega_{k_l} \mid \omega_{k_i} = \pm \omega_F, i = 1, \dots, l\} \quad (26)$$

从方程(26)可知, 如果所有的  $\omega_{k_1}, \dots, \omega_{k_l}$  都取等于  $-\omega_F$ , 则  $\omega = -l\omega_F$ ; 如果其中的第  $k$  个也取等于  $\omega_F$ , 则  $\omega = (-l + 2k)\omega_F$ .  $k$  最大可设为  $l$ . 因此  $U_l(j\omega)$  可能包含的频率组成为

$$\Omega_l = \{(-l + 2k)\omega_F, k = 0, 1, \dots, l\} \quad (27)$$

而且, 容易推出

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n = \{k\omega_F, k = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N\} \quad (28)$$

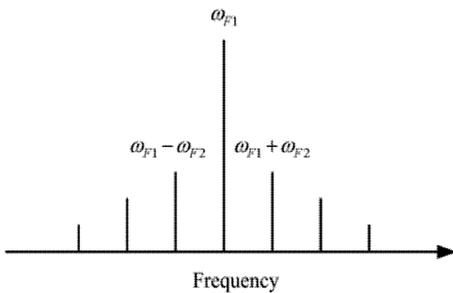


图4 多频激励的傅里叶频谱

Fig. 4 Fourier spectrum of the high-low frequency modulation response

由上面的结果可以明显得出, 当一个非线性系统受到一个谐波激励时会产生超谐波分量.

若考虑两种不同频率简谐力的激励输入

$$F(t) = A_1 \sin(\omega_{F1}t) + A_2 \sin(\omega_{F2}t) \quad (29)$$

其中,  $A_1$  和  $A_2$  是输入的幅值,  $\omega_{F1}$  和  $\omega_{F2}$  是不同的

激励频率, 且满足  $\omega_{F1} \leq \omega_{F2}$ , 频率组成部份  $\Omega_l$  可以采用同样的方法得到<sup>[18]</sup>

$$\Omega_l = \bigcup_{n_1 + n_2 = l} \{(-n_1 + 2k_1)\omega_{F1} + (-n_2 + 2k_2)\omega_{F2}; k_1 = 0, 1, \dots, n_1, k_2 = 0, 1, \dots, n_2\} \quad (30)$$

故当裂纹梁受到两种不同频率的谐波激励时, 在响应谱的主频  $\omega_{F1}$  周围可以观察到边频  $\omega_{F1} \pm n\omega_{F2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) (如图4所示).

### 3 仿真结果分析

对如图1所示的裂纹悬臂梁, 取如下参数: 长度  $L = 0.3\text{m}$ , 宽度  $b = 0.02\text{m}$ , 高度  $h = 0.02\text{m}$ , 质量密度  $\rho = 7850\text{kg/m}^3$ , 弹性模量  $E = 206\text{GPa}$ , 裂纹位置  $L_c = 0.15\text{m}$ , 裂纹深度  $a = 0.002\text{m}$ . 利用4阶 Runge-Kutta 方法对方程(14)所描述的裂纹梁进行时域仿真, 可以得到系统的响应特性. 在仿真过程中, 裂纹状态(即分开还是闭合)可以通过裂纹单元节点  $i$  和  $i+1$  的变形响应斜度  $\theta_i$  和  $\theta_{i+1}$  之间的关系来描述. 对于一个处于梁上半部的裂纹, 当裂纹闭合时, 满足  $\theta_i < \theta_{i+1}$ . 在本研究中, 假设激励输入点离梁固定端的距离为  $0.4L$ , 并且只考虑梁自由端横向位移的输出响应. 取高频激励和低频激励的频率分别为  $15\text{kHz}$  和  $0.92\text{kHz}$ , 且激励力强度选为  $A_1 = A_2 = 0.05\omega_1$ .

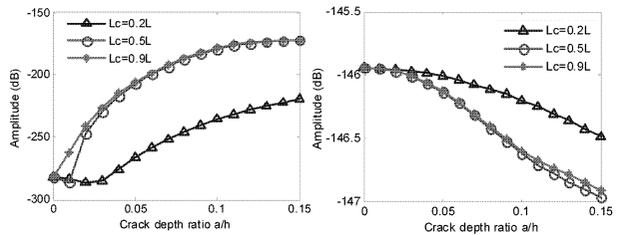


图5 不同裂纹位置下裂纹深度对结构非线性响应幅值的影响:

Fig. 5 The effect of crack depth on the nonlinear response amplitudes of the system

不同裂纹位置下裂纹深度对结构非线性响应幅值的影响规律如图5所示, 其中假设裂纹深度  $a$  小于  $0.15h$ . 由图可以看出, 对于不同的裂纹位置, 第一对边频的平均幅值都随着裂纹深度的增加而增大, 而高频载波响应幅值却随之减小. 这点与先前相关文献的理论和试验研究结果一致<sup>[6-12]</sup>. 从图中还可以看出, 系统响应幅值的变化程度在不同的裂纹位置是不同的. 例如, 对于裂纹位于  $L_c = 0.5L$  和  $0.9L$  时, 其响应幅值的变化基本一致, 其中第一对边频平均幅值从  $-280\text{dB}$  增加到大约

180dB,但对于裂纹位置  $L_c = 0.2L$  的情况,其响应的平均幅值仅增加了大约 60dB. 这说明裂纹尺寸的非线性效应敏感度与裂纹位置的非线性效应敏感度并不一致.

图6为对应不同裂纹深度的结构非线性响应谱.由图6a可以看出,当结构没有裂纹出现时,响应谱只有1个高频载波的响应波峰.一旦出现裂纹(如图6b所示),在高频载波响应波峰的两边就会对称出现一组边频.而且,随着裂纹深度的增大,响应谱中边频的数量和幅值也随之增加.故可以通过测量响应谱中的边频数量和幅值来确定裂纹的大小.

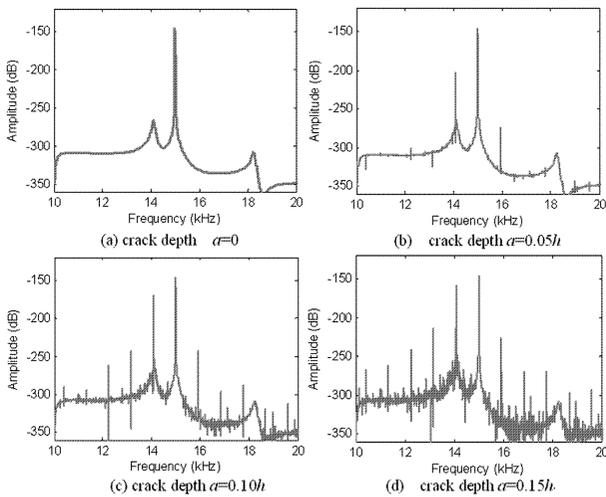


图6 对应不同裂纹尺寸的结构非线性响应谱

Fig. 6 Response spectra of the system for different crack size

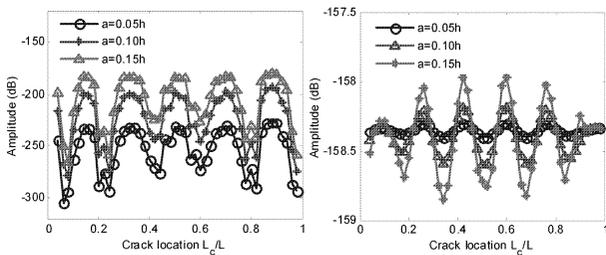


图7 裂纹尺寸及裂纹位置对结构非线性响应幅值的影响规律:

Fig. 7 The effect of crack position on the nonlinear response amplitudes of the system

图7为对应不同裂纹深度下,裂纹位置对结构高频载波响应频率和边谱响应频率幅值的影响规律,其中裂纹深度分别取为0.05h,0.1h和0.15h.由图可以看到,响应幅值随着裂纹位置周期性的变化.但是应该注意到对于不同的裂纹尺寸,裂纹位置的响应幅值有很大的变化.在某些点响应幅值很强且很容易被观测到,而在其他一些点可能太微弱以至于不能被发现.这种现象的原因可以被解释如

下:对于某些裂纹点,激励力的位置仅位于节点,所以不能引起足够大的响应.这意味裂纹位置的非线性效应敏感度比裂纹大小的非线性效应敏感度要更加复杂.

## 4 结论

本文对含裂纹梁在振动与超声波联合激励下所出现的非线性动力响应的机理和特性进行了研究.研究结果显示,结构的非线性响应特性受裂纹深度和位置的影响,故可以采用多频简谐激励下的非线性响应来检测结构裂纹.但是裂纹位置的非线性效应敏感度比裂纹大小的非线性效应敏感度要更加复杂,表明利用多频激励的非线性响应检测裂纹尺寸大小比用它检测裂纹位置更为合适.

## 参考文献

- 刘素贞,杨庆新,金亮,张闯.电磁声发射技术在无损检测中的应用.电工技术学报,2009,24(1):23~27(Liu S Z, Yang Q X, Jin L, Zhang C. Application of electromagnetic acoustic emission technology in non-destructive testing. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2009, 24(1):23~27(in Chinese))
- Zenzinger G, Bamberg J, Satzger W, Carl V. Thermographic crack detection by eddy current excitation. *Nondestructive Testing and Evaluation*, 2007,22(2-3):101~111
- Loutridis S, Douka E, Hadjileontiadis L. J. Forced vibration behaviour and crack detection of cracked beams using instantaneous frequency. *NDT and E International*, 2005, 38(5):411~419
- 周正干,刘斯明.非线性无损检测技术的研究、应用和发展.机械工程学报,2011,47(8):2~11(Zhou Z G, Liu S M. Nonlinear ultrasonic techniques used in nondestructive testing:A review. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, 47(8):2~11(in Chinese))
- Dutta D, Sohn H, Harries K, Rizzo P. A nonlinear acoustic technique for crack detection in metallic structures. *Structural Health Monitoring*, 2009, 8(3):251~262
- Duffour P, Morbidini M, awley P. A study of the vibro-acoustic modulation technique for the detection of cracks in metals. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2006, 119(3):1463~1475
- Zaitsev V, Nazarov V, Gusev V, Castagnede B. Novel nonlinear-modulation acoustic technique for crack detec-

- tion. *NDT and E International*, 2006, 39(3):184~194
- 8 Parsons Z, Staszewski W J. Nonlinear acoustics with low-profile piezoceramic excitation for crack detection in metallic structures. *Smart Materials and Structures*, 2006, 15(4): 1110~1118
- 9 Hu H F, Staszewski W J, Hu N Q, Jenal R B, Qin G J. Crack detection using nonlinear acoustics and piezoceramic transducers-instantaneous amplitude and frequency analysis. *Smart Materials and Structures*, 2010, 19(6): 65017~65026
- 10 Donskoy D M, Sutin A. M. Vibro-acoustic modulation non-destructive evaluation technique. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1998, 9(9): 765~771
- 11 Ryles M, Ngau F H, McDonald I, Staszewski W J. Comparative study of nonlinear acoustic and Lamb wave techniques for fatigue crack detection in metallic structures. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2008, 31(8): 674~683
- 12 Aymerich F, Staszewski W J. Impact damage detection in composite laminates using nonlinear acoustics. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2010, 41(9): 1084~1092
- 13 Friswell M I, Penny J E T. Crack modeling for structural health monitoring. *Structural Health Monitoring*, 2002, 1(2): 139~148
- 14 Ruotolo R, Surace C, Crespo P, Storer D. Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack. *Computers and Structures*, 1996, 61(6): 1057~1074
- 15 Bovsunovsky A P, Surace C. Considerations regarding super harmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 288(4-5): 865~886
- 16 Chatterjee A. Structural damage assessment in a cantilever beam with a breathing crack using higher order frequency response functions. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(16): 3325~3334
- 17 Peng Z K, Lang Z Q, Billings S A. Crack detection using nonlinear output frequency response functions. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 301(3-5): 777~788
- 18 Peng Z K, Lang Z Q, Chu F L, Meng G. Locating nonlinear components in periodic structures using nonlinear effects. *Structural Health Monitoring*, 2010, 9(5): 401~411
- 19 Lang Z Q, Billings S A. Output frequency characteristics of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 1996, 64(6): 1049~1067

## NONLINEAR DYNAMIC RESPONSE OF A CRACK BEAM UNDER HIGH-LOW FREQUENCIES CO-EXCITATION\*

Zou Hongxiang<sup>1</sup> Wei Kexiang<sup>2†</sup> Du Ronghua<sup>1</sup> Liu Yingchun<sup>2</sup>

(1. Department of Automotive and Mechanical Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410004, China)

(2. Department of Mechanical Engineering, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411101, China)

**Abstract** The nonlinear response characteristics of a crack beam subjected to a high-frequency acoustic wave simultaneously with a low-frequency vibration excitation were discussed. A finite element model of the crack beam was developed to perform the investigation, in which a closing crack model, fully open or fully closed, was employed to represent the damaged element. Based on the concept of nonlinear output frequency response functions (NOFRFs), the occurrence of the nonlinear response of a cracked beam subjected to high-low frequencies co-excitation was explained. The dependences of the nonlinear response amplitudes on the crack depth and position were analyzed by using the finite element model to simulate the time domain response of the crack beam. The results show that the high-low frequency excitation method is suitable for crack detection based on the nonlinear effect.

**Key words** nonlinear effect, crack detection, high-low frequency modulation, nonlinear output frequency response functions

Received 15 July 2012, revised 18 July 2012.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(51075138) and Science and technology Plan Projects of Hunan Province Science and technology Department(2012GK3081)

† Corresponding author E-mail:wei\_kx@163.com