

# 磁悬浮飞轮储能系统机电耦合非线性动力学研究

陈峻峰<sup>†1</sup> 刘昆<sup>2</sup> 梁文杰<sup>1</sup> 田英<sup>1</sup>

(1. 中国人民解放军 61769 部队装备处, 文水 032100) (2. 国防科技大学航天科学与工程学院, 长沙 410073)

**摘要** 针对磁悬浮飞轮储能系统的“磁悬浮飞轮-发电机”机电耦合非线性动力学特性进行研究. 通过推导磁悬浮飞轮储能系统在偏心条件下的动能、势能、发电机系统的磁场能以及系统的耗散函数, 由 Lagrange-Maxwell 方程建立磁悬浮飞轮系统和两相四极永磁发电机系统的机电耦合动力学方程. 采用数值法对 0.6 MW 磁悬浮飞轮储能系统进行了仿真分析, 研究表明, 系统机电耦合非线性方程存在稳定的与转速同频的基频和三倍频周期运动解, 且基频振动幅值比三倍频振动幅值大. 对于稳定的磁悬浮储能飞轮机电耦合系统, 飞轮转速增大, 或磁轴承系统刚度减小或阻尼增大, 或磁场能(电枢反应磁场能或永磁励磁磁场能)减小, 可使系统的非线性振动幅值减小. 而增大磁轴承系统的刚度, 或减小磁轴承系统的阻尼, 或增大系统的磁场能有可能破坏机电耦合系统的稳定性, 使飞轮失稳.

**关键词** 磁悬浮飞轮储能系统, 机电耦合, Lagrange-Maxwell 方程, 永磁发电机, 非线性动力学

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-062

## 引言

飞轮储能是具有广泛应用前景的机械储能方式, 它是由飞轮的升速和降速, 实现电能的存储和释放. 自上世纪 70 年代以来, 电磁轴承技术不断发展和成熟. 作为一种新型的轴承形式, 磁轴承利用可控电磁力使转子实现非接触悬浮, 与飞轮储能技术相结合, 消除了飞轮与传统机械轴承间的机械摩擦, 且具有低功耗和超高速运转等优点, 磁悬浮飞轮储能系统可被广泛应用于电力系统调峰、风力发电、大功率电焊机、车辆供能、不间断电源、低地轨道卫星储能等领域<sup>[1-4]</sup>.

由于磁悬浮储能飞轮本体与电机转子通常采用一体化设计, 在磁悬浮飞轮运行过程中, 飞轮质心通常被控制在安全气隙范围内运行, 与定子轴心之间存在偏心距, 该偏心距引起发电机系统参数不对称, 导致发电机不平衡磁力(或力矩)的产生, 不平衡磁力进而又影响磁轴承支承的飞轮转子的运动特性, 形成磁悬浮飞轮与发电机系统的相互耦合. 当发电机功率较小时, 由于磁悬浮飞轮的偏心较小, 引起的不平衡磁力对飞轮运动的影响也较小, 则机电耦合效应可以忽略; 当发电机功率较高

时, 磁悬浮储能飞轮系统的机电耦合效应不仅会引起转子动力学产生非线性特性, 甚至引起磁悬浮飞轮失稳, 此时, 对飞轮动力学特性分析则应该考虑机电耦合的影响.

目前, 对储能飞轮转子动力学的研究大多是基于转子质量分布不平衡引起的“轴承-转子”动力学分析, 如文献[5-6]等. 然而, 储能飞轮在放电应用背景下, 尤其是放电电流较大时, 对储能飞轮转子动力学的分析略去电机系统的影响, 回避发电机系统对飞轮系统的影响, 具有很大的近似性与片面性. 文献[7]在转子偏心条件下, 通过对磁感强度  $B$  的解析, 分析了磁场耦合效应对电机转子振动的影响, 但未对转子-电机的非线性振动特性进行具体讨论. 文献[8]提出机电耦合分析方法, 采用广义 Lagrange-Maxwell 方程, 对机械轴承支承的转子系统进行非线性动力学分析, 并应用于大型水轮、汽轮发电机的转子非线性动力学研究. 文献[9]运用机电耦合动力学分析方法, 针对 0.3KW 的永磁悬浮-机械动压轴承混合支承式飞轮储能系统, 分析了由于永磁无刷直流电机的电磁参数和转子系统的机械参数相互影响而引起的非线性动力学特性. 然而到目前为止, 在飞轮放电应用背景下, 针对磁

轴承支承的储能飞轮系统的“磁悬浮飞轮-发电机”机电耦合非线性动力学问题研究却很少。

本文针对实验室研制的0.6MW磁悬浮储能飞轮系统,通过建立磁悬浮储能飞轮系统的机电耦合动力学模型,采用数值法对磁悬浮储能飞轮系统和两相四极永磁发电机系统的机电耦合非线性动力学特性进行研究,该研究方法也适用于其它“磁轴承-电机系统”的机电耦合动力学分析。

### 1 磁悬浮飞轮储能系统机电耦合动力学模型

本文研究的磁悬浮飞轮储能系统采用外转子结构,系统主要包括一个用于高能发电的两相四极永磁发电机和两个用于拖动飞轮转动的永磁无刷直流电动机.两个磁轴承安装于电机两侧,采用永磁-电磁混合的五轴主动控制方式实现飞轮转子的稳定悬浮.永磁发电机的电枢线圈以无槽同心绕制方式粘固在定子表面,永磁体紧固在飞轮转子内沿;两个永磁无刷直流电动机安装在发电机外侧.系统结构如图1所示。

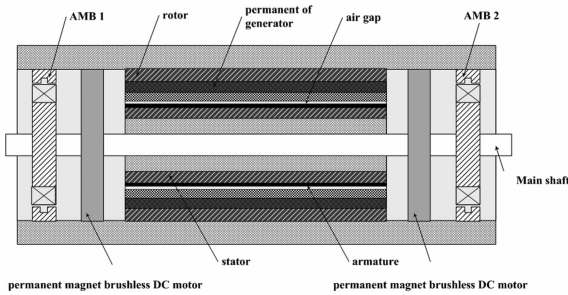


图1 系统机电耦合结构

Fig. 1 Electromechanical Coupling Structure of System

### 2 基于 Lagrange-Maxwell 的机电耦合动力学方程

本文仅研究磁悬浮飞轮储能系统的径向机电耦合动力学特性,对系统轴向的动力学不作讨论,且建模时作如下简化假设:

- 1) 相对于发电机而言,永磁无刷直流电机的功率较小,因此,忽略永磁无刷直流电机对系统机电耦合效应的影响,仅考虑永磁发电机与飞轮的机电耦合效应;
- 2) 忽略飞轮质量分布不均匀的影响,认为转子质心即在其几何中心处;
- 3) 转子偏心时,电机转子沿轴向方向的偏心

距是不同的,但为简化对磁场能的计算且不影响对问题本质的分析,认为发电机轴向方向的磁场能等于定子中心处的磁场能;

4) 转子偏心时,转子永磁体的空间角度在定子坐标系和转子坐标系是不同的,但考虑到偏心距相对于转子内径很小,该角度在两坐标系的偏差很小.为便于求解,假设转子永磁体的空间角度在两坐标系相同;

5) 由于系统结构左右对称,将系统简化在其质心所在的中心平面进行分析;

6) 电机铁心磁导率相对气隙为无穷大;

7) 忽略漏磁。

简化后得到的系统动力学简化模型如图2所示,图中,磁轴承支承等效为弹簧-阻尼器支承,且为便于分析,图中的坐标系定义如下:

定子坐标系  $O_s X_s Y_s$ —— $O_s$  为定子几何中心,  $X_s$  轴与地面平行,  $Y_s$  轴与地面垂直且与地球重力方向相反.由于定子连同基座固定在地面上,定子坐标系可看作惯性坐标系。

转子坐标系  $O_r X_r Y_r$ —— $O_r$  为转子几何中心,  $X_r$  轴和  $Y_r$  轴分别平行于  $X_s$  轴和  $Y_s$  轴.通常情况下,  $O_r$  与  $O_s$  不重合且  $O_r$  绕  $O_s$  旋转.该坐标系用来标定转子质心的位置。

转子旋转坐标系  $O_s X_r' Y_r'$ —— $O_s$  为定子几何中心,  $X_r'$  指向  $O_s O_r$  的延长线上,  $Y_r'$  垂直于  $X_r'$  轴.该坐标系在  $O_r$  旋转变化过程中,用来标定转子上点的位置。

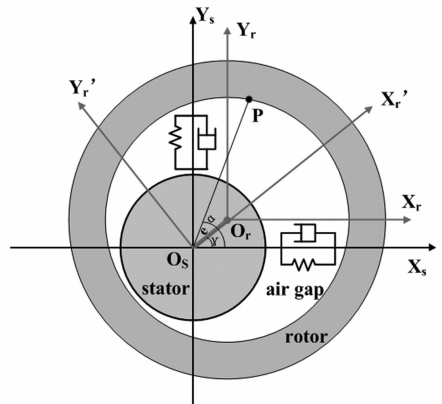


图2 动力学简化模型

Fig. 2 Simplified Model for Dynamics

磁悬浮飞轮储能系统的建模方法是根据文献[8]提出的机电分析动力学方法,由 Lagrange-Maxwell 方程建立本文研究对象的非线性动力学方程.假设

系统有  $N$  个自由度,则系统的 Lagrange-Maxwell 方程为:

$$\frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中,  $L = T - V + W$ ,  $L$  为 Lagrange-Maxwell 函数,  $T$  为系统动能,  $V$  为系统势能,  $W$  为发电机气隙磁场能,  $Z$  为系统的耗散函数,  $Q_i$  为广义坐标系的广义力。

以下分别对 Lagrange-Maxwell 方程中的各项进行推导,在定子坐标系下建立磁悬浮飞轮储能系统的机电耦合动力学模型。

## 2.1 动能

系统动能由转子的平动动能和转动动能组成,其表达式为

$$T = T_p + T_R = \frac{1}{2}m(X^2 + Y^2) + \frac{1}{2}J_p\omega^2 \quad (2)$$

其中,  $m$  为转子质量,  $(X, Y)$  为转子质心  $O_r$  在定子坐标系的坐标,  $J_p$  是转子极转动惯量,  $\omega$  为转子转速。

## 2.2 势能

系统势能主要由磁轴承等效弹簧的势能和转子质心的重力势能组成,其表达式为:

$$V = \frac{1}{2}K_x X^2 + \frac{1}{2}K_y Y^2 + mgY \quad (3)$$

其中,  $g$  为地球引力常数。  $K_x, K_y$  为简化在平面上的  $X, Y$  方向的综合等效刚度,且有  $K_x = 2k_x, K_y = 2k_y, k_x, k_y$  分别为单个磁轴承等效弹簧在  $X, Y$  方向的刚度。对于物理参数确定的磁轴承系统,磁轴承等效弹簧刚度由控制器参数决定,  $X$  和  $Y$  方向实际控制器参数不同,控制刚度因此也不同。由文献[4],可推得综合等效刚度为:

$$K_{x,y} = 2(-k_s + k_i K_p G_{power} G_{sensor})$$

其中,  $K_p$  为控制器比例系数,  $k_s$  是磁轴承力-位移刚度系数,  $k_i$  是磁轴承力-电流刚度系数,且  $k_s > 0, k_i > 0$ 。  $G_{power}$  和  $G_{sensor}$  分别为磁轴承系统的功放和传感器环节。

## 2.3 磁场能

本文系统的磁场能是忽略永磁无刷直流电动机后的高能永磁发电机的磁场能,对其求解是基于对发电机偏心条件下的磁势和磁导的解析得出。

### 2.3.1 两相四极永磁发电机的磁势

由多相绕组理论和磁势谐波分析方法<sup>[8,10,11]</sup>,对两相四极永磁发电机的磁势进行解析,发电机的磁势主要考虑电枢反应磁势和永磁体励磁磁势,且仅考虑其基波项。为使电枢线圈产生最大电流,设定子电枢电主轴方向为初始  $0^\circ$  方向,则转子初始角度为  $\pi/2$ ,逆时针方向为正方向。

#### 2.3.1.1 电枢反应磁势

电枢采用单层绕组和四端出线方式,则  $A, B$  两相绕组函数的空间谐波基波表达式为:

$$N_A(\alpha) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{N}{2} \right) \cos(\alpha - \psi) \quad (4)$$

$$N_B(\alpha) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{N}{2} \right) \cos(\alpha - \psi - \pi)$$

$A, B$  两相绕组电流谐波的基波表达式为:

$$i_A = \frac{4}{\pi} I_m \cos(\omega t) \quad (5)$$

$$i_B = \frac{4}{\pi} I_m \cos(\omega t - \pi)$$

且由:

$$F_a = k_{w1} [N_A(\alpha) \cdot i_A + N_B(\alpha) \cdot i_B] \quad (6)$$

可推导电枢反应基波磁势为:

$$F_a = k_{w1} \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \left( \frac{NI_m}{2} \right) [\cos \cdot \omega t (\alpha - \psi) + \cos(\omega t - \pi) \cdot \cos(\alpha - \psi - \pi)] \quad (7)$$

其中,  $F_a$  为电枢反应基波磁势;  $k_{w1}$  为基波磁动势的绕组因数;  $N$  为单相绕组匝数;  $I_m$  为电枢线圈有效电流,  $I_m = \sqrt{2}I_s/2$ ,  $I_s$  为放电瞬时值;  $\alpha$  为转子空间角度;  $\psi$  为内功率因数角,与负载性质有关(感性、容性或阻性)。

#### 2.3.1.2 永磁体励磁磁势

采用傅里叶级数将永磁体励磁磁势在空间展开,永磁体励磁磁势如图3所示,其表达式为:

$$F_p = \begin{cases} -Hl_m, & -\frac{\pi}{4} + \omega t + \gamma \leq \alpha < \frac{\pi}{4} + \omega t + \gamma \\ Hl_m, & \frac{\pi}{4} + \omega t + \gamma \leq \alpha < \frac{3\pi}{4} + \omega t + \gamma \end{cases} \quad (8)$$

$F_p$  是周期为  $\pi$  的周期函数,将其展开成傅里叶级数形式为:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4} + \omega t + \gamma}^{\frac{\pi}{4} + \omega t + \gamma} (-Hl_m) \cdot \cos 2n\alpha d\alpha +$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}+\omega t+\gamma}^{\frac{3\pi}{4}+\omega t+\gamma} (Hl_m) \cdot \cos 2n\alpha d\alpha \\
 &= \frac{Hl_m}{n\pi} \left[ \sin 2n\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\
 & \quad \left. 2\sin 2n\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2n\left(\omega t + \gamma + \frac{3\pi}{4}\right) \right] \\
 & \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \\
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}+\omega t+\gamma}^{\frac{\pi}{4}+\omega t+\gamma} (-Hl_m) \cdot \sin 2n\alpha d\alpha + \\
 & \quad \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}+\omega t+\gamma}^{\frac{3\pi}{4}+\omega t+\gamma} (Hl_m) \cdot \sin 2n\alpha d\alpha \\
 &= \frac{Hl_m}{n\pi} \left[ \cos 2n\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\
 & \quad \left. 2\cos 2n\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 2n\left(\omega t + \gamma + \frac{3\pi}{4}\right) \right] \\
 & \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

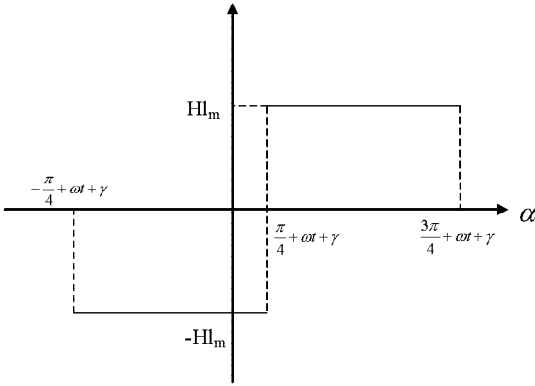


图3 永磁体励磁磁势

Fig. 3 Excitation Magnet Potential of Permanent Magnet

取磁势的基波分量,得:

$$a_0 = 0; a_1 = -\left(\frac{4}{\pi}\right)(Hl_m) \cdot \cos 2(\omega t + \gamma);$$

$$b_1 = -\left(\frac{4}{\pi}\right)(Hl_m) \cdot \sin 2(\omega t + \gamma)$$

则永磁体励磁基波磁势为:

$$\begin{aligned}
 F_p &= -k_{w2} \left(\frac{4}{\pi}\right)(Hl_m) [\cos 2(\omega t + \gamma) \cdot \cos 2\alpha + \\
 & \quad \sin 2(\omega t + \gamma) \cdot \sin 2\alpha] \quad (9)
 \end{aligned}$$

其中,  $F_p$  为永磁体励磁基波磁势;  $k_{w2}$  为永磁体等效基波磁势的绕组因数;  $H$  为永磁体磁场强度;  $l_m$  为单边永磁体厚度;  $\gamma$  为转子质心的偏心角度。

### 2.3.1.3 合成总磁势

电枢反应基波磁势  $F_a$  和永磁体励磁基波磁势  $F_p$  的合成磁势  $F(\alpha, t)$  为:

$$\begin{aligned}
 F(\alpha, t) &= F_a(\alpha, t) + F_p(\alpha, t) \\
 &= f_1 \cdot \cos(\alpha - \psi + \omega t) + \\
 & \quad f_1 \cdot \cos(\alpha - \psi - \omega t) + \\
 & \quad f_2 \cdot \cos 2(\alpha - \gamma - \omega t) \quad (10)
 \end{aligned}$$

其中,

$$f_1 = k_{w1} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left(\frac{NI_m}{2}\right);$$

$$f_2 = -k_{w2} \left(\frac{4}{\pi}\right)(Hl_m).$$

### 2.3.2 偏心气隙的磁导

定转子间的偏心气隙磁导  $\Lambda$  的表达式为<sup>[8]</sup>:

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \Lambda_0 \left[ \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{3\varepsilon^4}{8}\right) + \left(\varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{4}\right) \cdot \cos(\alpha - \right. \\
 & \quad \left. \gamma) + \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{2}\right) \cdot \cos 2(\alpha - \gamma) + \right. \\
 & \quad \left. \frac{\varepsilon^3}{4} \cdot \cos 3(\alpha - \gamma) + \frac{\varepsilon^4}{8} \cdot \cos 4(\alpha - \gamma) \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中,  $\Lambda_0 = \frac{\mu_0}{k_\mu \delta_0}$ ,  $\Lambda_0$  为单位面积均匀气隙磁导,  $\mu_0$  为空气磁导系数,  $k_\mu$  为饱和度,  $\delta_0$  为均匀气隙大小;  $\varepsilon = \frac{e}{k_\mu \delta_0}$ ,  $\varepsilon$  为有效相对偏心,  $e$  为转子质心相对于定子质心的偏心距;  $\sigma = k_\mu \delta_0$ .

对式(11)进行化简,得到定子坐标系下的偏心磁导表达式为:

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \Lambda_0 \left\{ \left[ 1 + \frac{X^2 + Y^2}{2\sigma^2} + \frac{3}{8\sigma^4}(X^2 + Y^2)^2 \right] + \right. \\
 & \quad \left[ \frac{1}{\sigma} + \frac{3}{4\sigma^3}(X^2 + Y^2) \right] \cdot X \cdot \cos \alpha + \\
 & \quad \left[ \frac{1}{\sigma} + \frac{3}{4\sigma^3}(X^2 + Y^2) \right] \cdot Y \cdot \sin \alpha + \\
 & \quad \left[ \frac{X^2 - Y^2}{2\sigma^2} + \frac{X^4 - Y^4}{2\sigma^4} \right] \cdot \cos 2\alpha + \\
 & \quad \left[ \frac{XY}{\sigma^2} + \frac{X^3 Y + XY^3}{\sigma^4} \right] \cdot \sin 2\alpha + \\
 & \quad \frac{3}{4\sigma^3}(X^3 - 3XY^2) \cdot \cos 3\alpha + \\
 & \quad \frac{3}{4\sigma^3}(3X^2 Y - Y^3) \cdot \sin 3\alpha + \\
 & \quad \frac{1}{8\sigma^3}(X^4 - 6X^2 Y^2 + Y^4) \cdot \cos 4\alpha +
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\sigma^4}(X^3Y - XY^3) \cdot \sin 4\alpha \} \quad (12)$$

### 2.3.3 发电机磁场能

由式(10),(12)可得两相四极永磁发电机偏心气隙的磁场能为:

$$\begin{aligned} W &= \frac{Rh}{2} \int_0^{2\pi} \Lambda(\alpha, t) \cdot F(\alpha, t)^2 d\alpha \\ &= \frac{\Lambda_0 Rh}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ 1 + \frac{X^2 + Y^2}{2\sigma^2} + \frac{3}{8\sigma^4}(X^2 + Y^2)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left[ \frac{1}{\sigma} + \frac{3}{4\sigma^3}(X^2 + Y^2) \right] \cdot X \cdot \cos\alpha + \\ &\quad \left[ \frac{1}{\sigma} + \frac{3}{4\sigma^3}(X^2 + Y^2) \right] \cdot Y \cdot \sin\alpha + \\ &\quad \left[ \frac{X^2 - Y^2}{2\sigma^2} + \frac{X^4 - Y^4}{2\sigma^4} \right] \cdot \cos 2\alpha + \\ &\quad \left[ \frac{XY}{\sigma^2} + \frac{X^3Y + XY^3}{\sigma^4} \right] \cdot \sin 2\alpha + \\ &\quad \frac{3}{4\sigma^3}(X^3 - 3XY^2) \cdot \cos 3\alpha + \\ &\quad \frac{3}{4\sigma^3}(3X^2Y - Y^3) \cdot \sin 3\alpha + \\ &\quad \frac{1}{8\sigma^3}(X^4 - 6X^2Y^2 + Y^4) \cdot \cos 4\alpha + \\ &\quad \left. \frac{1}{2\sigma^4}(X^3Y - XY^3) \cdot \sin 4\alpha \right\} \cdot F(\alpha, t)^2 d\alpha \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $R$  为定子半径,  $h$  为电枢有效长度.

将(12)代入(13)进行积分,化简后得:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\Lambda_0 Rh}{2} \left\{ \pi a_1 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \right. \\ &\quad \pi a_2 b_1 [b_2 \cos(2\omega t - \psi) - b_3 \sin(2\omega t - \psi)] + \\ &\quad \pi a_3 b_1 [b_2 \sin(2\omega t - \psi) + b_3 \cos(2\omega t - \psi)] + \\ &\quad \frac{1}{2} \pi b_1^2 (a_4 \cos 2\psi + a_5 \sin 2\psi) + \\ &\quad \pi a_6 b_1 [b_2 \cos(2\omega t + \psi) - b_3 \sin(2\omega t + \psi)] + \\ &\quad \left. \pi a_7 b_1 [b_2 \sin(2\omega t + \psi) + b_3 \cos(2\omega t + \psi)] \right\} \\ a_2 &= \left[ \frac{1}{\sigma} + \frac{3}{4\sigma^3}(X^2 + Y^2) \right] \cdot X \end{aligned} \quad (14)$$

其中,

$$a_1 = 1 + \frac{X^2 + Y^2}{2\sigma^2} + \frac{3}{8\sigma^4}(X^2 + Y^2)^2;$$

$$a_2 = \left[ \frac{1}{\sigma} + \frac{3}{4\sigma^3}(X^2 + Y^2) \right] \cdot X;$$

$$a_3 = \left[ \frac{1}{\sigma} + \frac{3}{4\sigma^3}(X^2 + Y^2) \right] \cdot Y;$$

$$a_4 = \frac{X^2 - Y^2}{2\sigma^2} + \frac{X^4 - Y^4}{2\sigma^4}; \quad a_5 = \frac{XY}{\sigma^2} + \frac{X^3Y + XY^3}{\sigma^4};$$

$$a_6 = \frac{3}{4\sigma^3}(X^3 - 3XY^2); \quad a_7 = \frac{3}{4\sigma^3}(3X^2Y - Y^3);$$

$$b_1 = 2f_1 \cos \omega t; \quad b_2 = f_2 \left( 2 \frac{X^2}{\sigma^2} - 1 \right); \quad b_3 = f_2 \left( 2 \frac{XY}{\sigma^2} \right).$$

### 2.3.4 发电机电磁转矩方程

对于本文研究的两相四极发电机,转矩平衡方程为:

$$T_e = J_p \frac{d\omega_e}{dt}$$

且电磁转矩由下式得到:

$$T_e = \frac{pE}{\Omega_r} \left[ i_1 \sin \omega_e t + i_2 \sin \left( \omega_e t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (15)$$

若考虑电机负载为常值感性和阻性负载,则两相电枢电流为:

$$L \frac{di_1}{dt} = E \sin \omega_e t - i_1 R \quad (16)$$

$$L \frac{di_2}{dt} = E \sin \left( \omega_e t - \frac{\pi}{2} \right) - i_2 R$$

其中,  $T_e$  为电磁转矩,  $p$  为极对数,  $E$  为单相空载电压值,  $J_p$  为转子极转动惯量,  $\Omega_r$  为额定电机转速,  $\omega_e$  为转子电角度,  $L$  和  $R$  分别为电机负载的电感值和电阻值,  $i_1$  和  $i_2$  分别为两线圈的电流值.

### 2.4 耗散函数

磁轴承等效阻尼器的耗散函数为:

$$Z_1 = \frac{1}{2} c_x X^2 + \frac{1}{2} c_y Y^2 \quad (17)$$

其中,  $c_x$  和  $c_y$  为磁轴承等效阻尼器的阻尼,且:

$$c_{x,y} = 2k_r K_D G_{power} G_{sensor}$$

其中,  $K_D$  为控制器微分系数.

发电机气隙磁场耗散函数为

$$Z_2 = \frac{1}{2} \mu_1 (X^2 + Y^2) \quad (18)$$

其中,  $\mu_1$  为电磁阻尼系数.

系统的耗散函数包括磁轴承等效阻尼器耗散函数和电机气隙磁场耗散函数,其表达式为:

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 \\ &= \frac{1}{2} c_x X^2 + \frac{1}{2} c_y Y^2 + \frac{1}{2} \mu_1 (X^2 + Y^2) \end{aligned} \quad (19)$$

### 2.5 Lagrange-Maxwell 动力学方程

将式(2),(3),(14),(19)代入 Lagrange-Max-

well 方程,整理得磁悬浮飞轮储能系统的机电耦合动力学方程为:

$$\begin{aligned} m\dot{X} + (c_x + \mu_1)X + (g_7X^7 + g_6X^6 + g_5X^5 + g_4X^4 + g_3X^3 + g_2X^2 + g_1X) + g_0 &= 0 \\ m\dot{Y} + (c_y + \mu_1)Y + (h_7Y^7 + h_6Y^6 + h_5Y^5 + h_4Y^4 + h_3Y^3 + h_2Y^2 + h_1X) + h_0 &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\Lambda_0 Rh}{2}; g_7 = -\Gamma \frac{3\pi f_2^2}{\sigma^8}; g_6 = 0; \\ g_5 &= -\Gamma \frac{3\pi f_2^2 (3Y^2 + \sigma^2)}{\sigma^8}; \\ g_4 &= -\Gamma \pi [15f_1 f_2 (\cos \omega t + \cos 3\omega t) \cos \psi] / 2\sigma^5; \\ g_3 &= -\Gamma \pi [f_2^2 (9Y^4 + 6Y^2 \sigma^2 + 4\sigma^4) + 2f_1^2 \sigma^4 (3 + 2\cos 2\psi) \cos^2(\omega t) + 3f_1 f_2 Y \sigma^3 \sin(4\omega t) \cos(\omega t) \sin(\psi)] / \sigma^8; \\ g_2 &= -\Gamma \pi [3f_1 f_2 (3Y^2 + 2\sigma^2) \cos(2\omega t - \psi) \cdot \cos(\omega t) + 9f_1 f_2 Y^2 \cos(2\omega t + \psi) \cos(\omega t) + 6f_1^2 Y \sigma \cos^2(\omega t) \sin(2\psi)] / \sigma^5; \\ g_1 &= k_{xs} - \Gamma \pi [f_2^2 Y^2 (3Y^4 + 3Y^2 \sigma^2 + 4\sigma^4) + 2f_1^2 \sigma^4 (3Y^2 + 2\sigma^2 + \sigma^4 2\psi) \cos^2(\omega t) + 2f_1 f_2 Y \sigma^3 \cos(\omega t) [-(3Y^2 + 2\sigma^2) \sin(2\omega t - \psi) + 3Y^2 \sin(2\omega t + \psi)]] / \sigma^8; \\ g_0 &= -\Gamma \pi \cdot f_1 Y \cos(\omega t) [f_2 Y (3Y^2 + 4\sigma^2) \cdot \cos(2\omega t - \psi) + 3Y^3 f_2 \cos(2\omega t + \psi) + 4f_1 \sigma (\sigma^2 + Y^2) \cos \omega t + \sin 2\psi] / 2\sigma^5; \\ h_7 &= -\Gamma \frac{12\pi f_2^2}{\sigma^8}; h_6 = 0; \\ h_5 &= -\Gamma \frac{3\pi f_2^2 (9X^2 + \sigma^2)}{\sigma^8}; \\ h_4 &= -\Gamma \pi [15f_1 f_2 (\cos \omega t + \cos 3\omega t) \sin \psi] / \sigma^5; \\ h_3 &= -\Gamma \pi [f_2^2 (36X^4 + 8X^2 \sigma^2 + 19\sigma^4) - 4f_1^2 \sigma^4 (-3 + 2\cos 2\psi) \cos^2(\omega t) + 48f_1 f_2 X \sigma^3 \cos \omega t \cos(2\omega t + \psi)] / 2\sigma^8; \\ h_2 &= -\Gamma \pi [-3f_1 \cos(\omega t)] [f_2 (12X^2 + 5\sigma^2) \cdot \sin(2\omega t - \psi) + 3f_2 \sigma^2 \sin(2\omega t + \psi) - 4f_1 X \sigma \cos(\omega t) \sin(2\psi)] / 2\sigma^5; \\ h_1 &= k_{ys} - \Gamma \pi [f_2^2 (6X^6 + 2X^4 \sigma^2 + 11X^2 \sigma^4 - 14\sigma^6) + 4f_1^2 \sigma^4 (3X^2 + 2\sigma^2 - \sigma^2 \cos 2\psi) \cos^2(\omega t) + \end{aligned}$$

$$6f_1 f_2 X \sigma^3 \cos(\omega t) [ (4X^2 - 3\sigma^2) \cos(2\omega t + \psi) + \sigma^2 \cos(2\omega t - \psi) ] / 2\sigma^8;$$

$$\begin{aligned} h_0 &= mg - \Gamma \pi \cdot f_1 \cos(\omega t) [ -f_2 (6X^4 + 5X^2 \sigma^2 - 4\sigma^4) \cdot \sin(2\omega t - \psi) + 3X^2 f_2 (-2X^2 + 3\sigma^2) \sin(2\omega t + \psi) + 4X f_1 \sigma (\sigma^2 + X^2) \cos \omega t + \sin 2\psi ] / 2\sigma^5. \end{aligned}$$

引入“机电耦合等效刚度” $K_{ix}, K_{iy}$ 和“机电耦合等效激振力” $F_{ix}, F_{iy}$ , 定义为:

$$\begin{aligned} K_{ix} &= \frac{g_7 X^7 + g_6 X^6 + g_5 X^5 + g_4 X^4 + g_3 X^3 + g_2 X^2 + g_1 X}{X}; \\ K_{iy} &= \frac{h_7 Y^7 + h_6 Y^6 + h_5 Y^5 + h_4 Y^4 + h_3 Y^3 + h_2 Y^2 + h_1 Y}{Y}; \\ F_{ix} &= -g_0; F_{iy} = -h_0. \end{aligned}$$

则式(20)可化为:

$$\begin{aligned} m\dot{X} + (c_x + \mu_1)X + K_{ix}X &= F_{ix} \\ m\dot{Y} + (c_y + \mu_1)Y + K_{iy}Y &= F_{iy} \end{aligned} \quad (21)$$

由式(21)可以看出,对于控制参数确定的磁悬浮飞轮储能系统,其阻尼为常数,系统机电耦合的“刚度”项和“激振力”项是时变的非线性项,系统动力学的非线性特性主要是由“刚度”项和“激振力”项的非线性引起的.

### 3 仿真分析

对式(21)的非线性方程组,本文采用“数值法”分析其非线性特性. 对非线性方程组的数值求解采用标准四阶 Runge-Kutta 法. 由于初始条件和仿真步长对计算结果和计算的快速性都有重要影响,考虑计算的截断误差以及仿真的快速性,本文选用仿真步长  $\Delta t = T/256$ , 其中,  $T = 2\pi/\omega$ , 表示仿真当前转速条件下的周期值, 仿真总时间为 300T. 同时,考虑计算结果的快速收敛性,设初值为:

$$X_0 = Y_0 = 1 \times 10^{-7} \text{ m}, \dot{X}_0 = \dot{Y}_0 = 0$$

仿真中的其它参数见表 1.

由表 1 中的初始条件,对系统机电耦合动力学特性进行仿真,结果如图 4 所示. 由于 X 通道与 Y 通道的受力不同,以及磁轴承在两通道的刚度值和阻尼值略有不同,两通道的机电耦合振动特性也略有不同,但本质规律是相同的. 去除仿真初始阶段的过渡过程,飞轮转子变为稳定周期运动,飞轮转子稳定周期运行的转子位移曲线如图 4(a)所示,可以看出,飞轮在两轴方向的机电耦合振动幅值在 50 $\mu\text{m}$  附近,且 Y 方向的振动幅值稍大于 X 方向的振动幅值. 图 4(b)为其 Poincaré 图. 对稳定周期运

表 1 系统的机械和电磁参数

Table 1 Mechanism Parameters and Electromagnetism

Parameters of The System

Systems	Parameters
Flywheel	mass of rotor $m = 149.4 \text{ Kg}$
	pole moment of inertia $J_p = 2.61 \text{ Kg m}^2$
	radius of stator $R = 0.1 \text{ m}$
AMBs	discharging speed $\omega = 10000 \text{ RPM}$
	equal stiffness $k_x = 1.75 \times 10^7 \text{ N/m}$ $k_y = 1.95 \times 10^7 \text{ N/m}$
	equal damping $c_x = 990.2 \text{ Ns/m}$ $c_y = 1120.7 \text{ Ns/m}$
	discharging current $1 \text{ KA}$
	air-gap length $0.01 \text{ m}$
Generator	armature length $0.15 \text{ m}$
	coil number $10$
	radial length of excitation magnet $0.006 \text{ m}$
	magnet flux density of permanent magnet $H = 900 \text{ KA/m}$
	saturation $k_\mu = 1.2$
Others	coil factor $k_{w1} = k_{w2} = 0.9$
	angle of internal power factor $10^\circ$
	inductance of load $L = 20 \times 10^{-6} \text{ H}$
	resistance of load $R = 25 \times 10^{-3} \Omega$
	coefficient of air magnetic conductance $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$
coefficient of electromagnetic damping $\mu_1 = 0.8$	

动进行频域分析,如图 4(c)所示,飞轮转子存在两个主要振动频率:166.7Hz,500Hz. 可以明显看出,系统机电耦合振动的主振频率 166.7Hz 是转速 10000RPM 的同频振动频率,在不存在飞轮转子质量不平衡假设条件下,该同频振动产生的物理本质是由于转子质心与定子质心偏心使发电机产生与转速同频的不平衡电磁力(矩),进而激发系统产生机电耦合同频振动. 同时,系统还存在 3 倍频振动分量,该振动分量是由偏心气隙磁导引起的气隙磁场能的非线性导致的,其振动幅值与主频振动幅值相比较小.

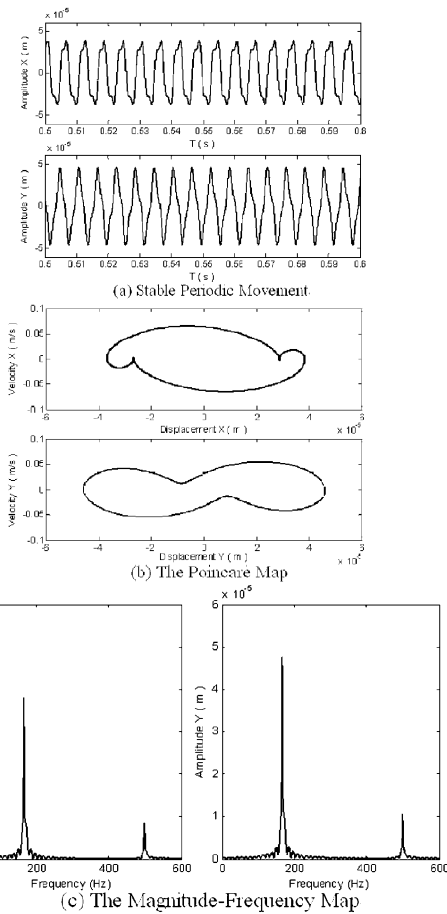


图 4 10000RPM 的机电耦合振动特性

Fig.4 The characteristics of electromechanical coupling at 10000RPM

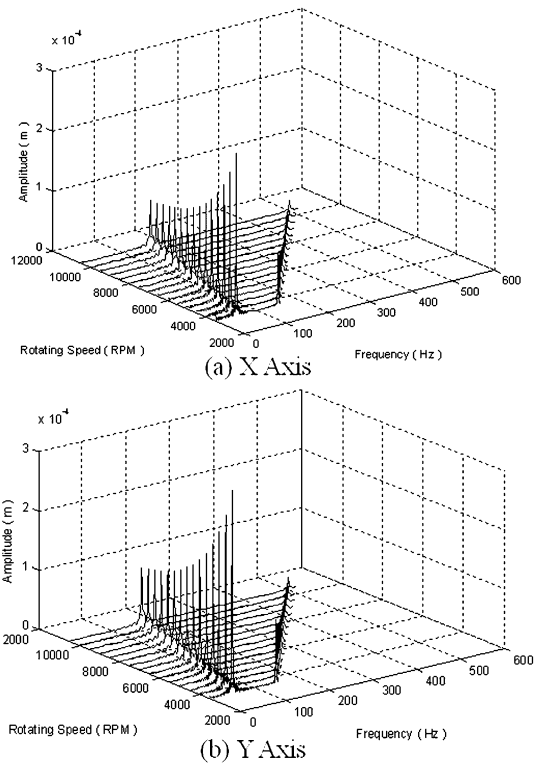


图 5 不同转速条件下的振动幅频特性

Fig.5 The Magnitude-Frequency Characteristics of Vibration at different speeds

在不改变其它仿真条件下,不同转速的振动幅频特性如图 5 所示. 可以看出,随着转速升高,飞轮机电耦合的基频和 3 倍频振动幅值逐渐降低. 对于一般线性的单自由度强迫振动,以欠阻尼系统为例,振幅的大小与激振力、刚度、阻尼和转速值有固定数学关系,且飞轮转速“小于共振频率(转速)时,振幅随转速升高而变大,大于共振频率(转速)时,振幅随转速升高而减小”. 然而,本文研究的机电耦合振幅的大小与非线性“机电耦合等效刚度”项和“机电耦合等效激振力”项的大小相关,可采用

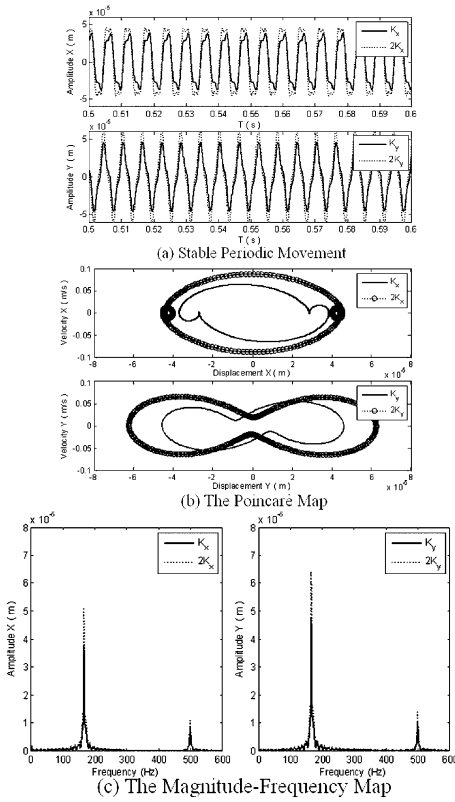


图6  $K_x \times 2, K_y \times 2, 10000\text{RPM}$  的机电耦合振动特性  
 Fig. 6 The characteristics of electromechanical coupling at  $10000\text{RPM}, K_x \times 2, K_y \times 2$

相关非线性解析法对系统的振动特性进行更深入分析,本文仅给出转速变化对振幅影响的定性结论,不对其进行解析分析。

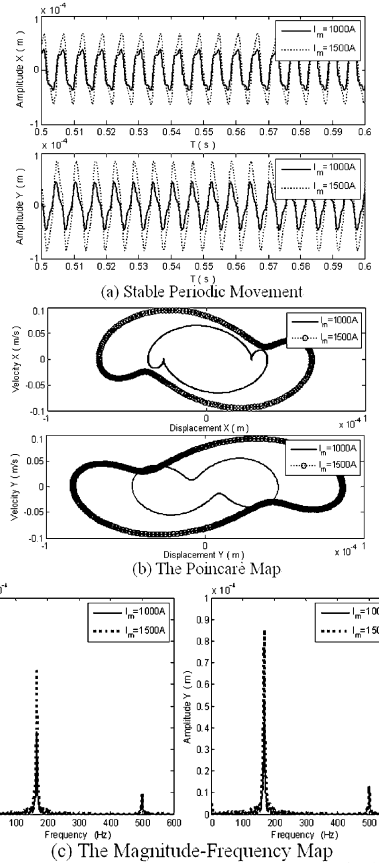


图8 电流由  $1000\text{A}$  增大到  $1500\text{A}, 10000\text{RPM}$  的机电耦合振动特性  
 Fig. 8 The characteristics of electromechanical coupling at  $10000\text{RPM}$ , the currents increase from  $1000\text{A}$  to  $1500\text{A}$

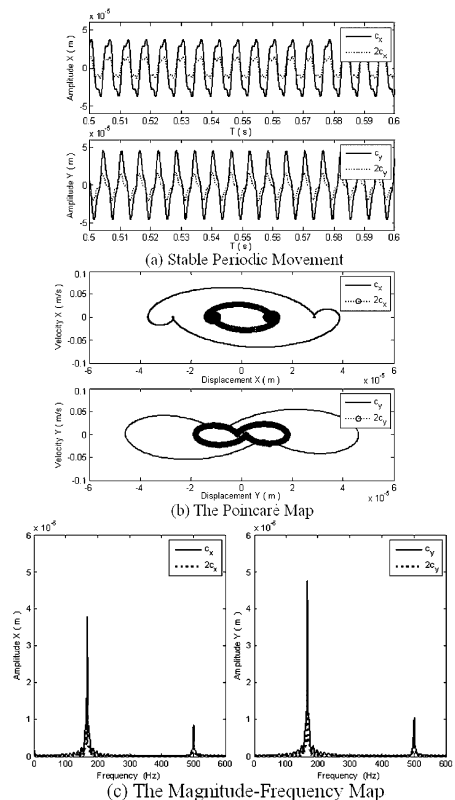


图7  $c_x \times 2, c_y \times 2, 10000\text{RPM}$  的机电耦合振动特性  
 Fig. 7 The characteristics of electromechanical coupling at  $10000\text{RPM}, c_x \times 2, c_y \times 2$

对于通常的磁悬浮储能飞轮系统,通过调节磁轴承的控制参数对磁轴承的支承刚度和阻尼进行调节.在其它仿真条件不变条件下,磁轴承提供的系统刚度  $K_x, K_y$  和阻尼  $c_x, c_y$  变化对机电耦合振动特性的影响见图6和图7.与图4的仿真结果相比较,增大刚度 ( $K_x \times 2, K_y \times 2$ ),系统机电耦合振幅相应增大;增大阻尼 ( $c_x \times 2, c_y \times 2$ ),系统机电耦合振幅相应减小.从能量观点来看,增大刚度使系统势能得到增强,系统能量的增加使飞轮稳定振动的幅值得到增大;同理,阻尼的增大使系统能量耗散变大,系统能量的减小使飞轮稳定振动的幅值减小.磁悬浮储能飞轮系统磁场能的大小对机电耦合振动特性的影响见图8~图10.图8为放电电流增大到  $1500\text{A}$  的机电耦合振动特性,与图4仿真结果相比,可以看出,放电电流的增大使系统的机电耦合振动幅值显著增强,表明电枢反应磁场能的增强使机电耦合振动呈增强趋势.图9为永磁体厚度增



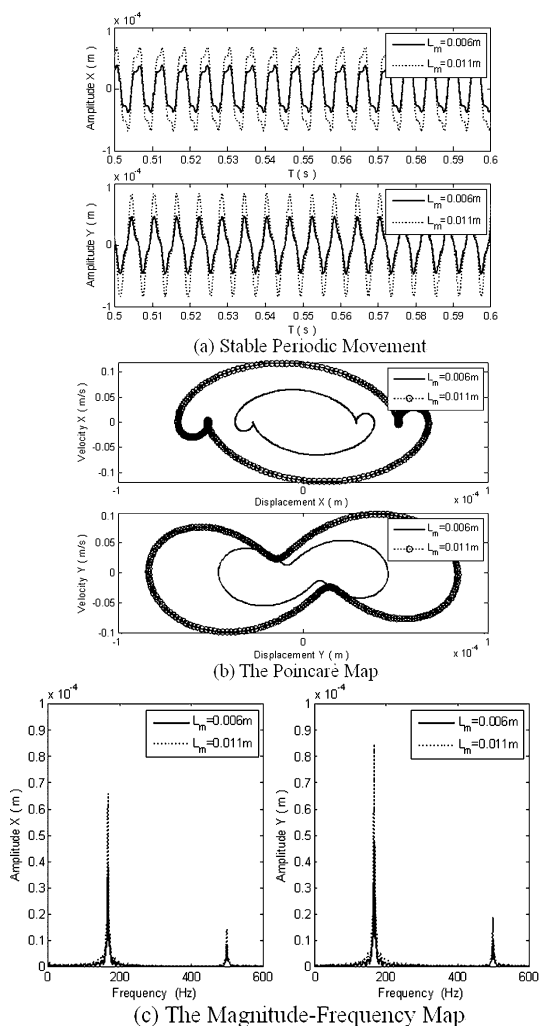


图9 永磁体厚度由0.006m增大到0.011m, 10000RPM的机电耦合振动特性

Fig. 9 The characteristics of electromechanical coupling at 10000RPM, the thickness of permanent magnet increases from 0.006m to 0.011m

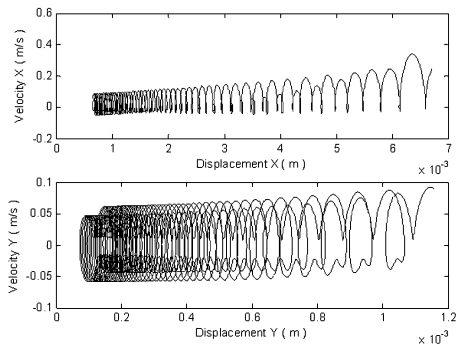


图10 放电电流为1730A,系统失稳的Poincaré图

Fig. 10 The Poincaré map of unstable system, the discharge current is 1730A

悬浮储能飞轮系统会变为不稳定系统,图10为放电电流增大到1730A时系统失稳的情况. 仿真研究发现,导致系统失稳的主要因素还包括:过分增大磁轴承系统的刚度或减小磁轴承系统的阻尼,限于文章篇幅,不再列举其仿真结果.

### 4 结论

本文针对磁悬浮储能飞轮系统的“磁悬浮飞轮-永磁发电机”机电耦合非线性动力学特性进行研究,采用Lagrange-Maxwell方程推导其机电耦合动力学模型,采用数值法对非线性动力学方程进行分析. 仿真结果表明:

- 1) 系统存在稳定的机电耦合非线性振动,分别为与转速同频的基频振动和三倍频振动,且基频振动幅值比三倍频振动幅值大.
- 2) 对于稳定的磁悬浮储能飞轮机电耦合系统,飞轮转速增大,磁轴承系统刚度减小,磁轴承系统阻尼增大,或磁场能(电枢反应磁场能或永磁励磁磁场能)减小,都能使系统的非线性振动幅值得到减小.
- 3) 增大磁轴承系统的刚度,减小磁轴承系统的阻尼,或增大系统的磁场能都有可能破坏机电耦合非线性系统的稳定性,使飞轮失稳.

### 参 考 文 献

- 1 Bitterly Jack G. Flywheel technology past, present, and 21St century projections. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 1998,13(8): 13 ~ 16
- 2 Beach R, Christopher D A. Flywheel technology development program for aerospace applications. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 1998,15: 9 ~ 14
- 3 Ralph J, Timothy D. G2 flywheel module design. In: Proceedings of 2nd International Energy Conversion Engineering Conference, 2004, 2:683 ~ 695
- 4 Schweitzer G, Bleuler H, Traxler A, Active magnetic bearings-basics, properties and application of active magnetic bearings. ETH,Switzerland; Hochschulverlag AG, 1994
- 5 Wang H C, Jiang S Y, Shen Z P. The dynamic analysis of an energy storage flywheel system with hybrid bearing support. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*. 2009,131: 0510061 ~ 0510069
- 6 Zhang K, Dai X J, Zhang X Z. Dynamic analysis and con-

大到0.011m的机电耦合振动特性,可以得到类似的结论—增强励磁永磁体的磁场能使系统的机电耦合振动幅值变大. 当磁场能增大到一定程度,磁

- trol of an energy storage flywheel rotor with active magnetic bearings. In: Proceedings of International Conference on Digital Manufacturing and Automation, 2010; 573 ~ 576
- 7 Kim T J, Hwang S M, Park N G. Analysis of vibration for permanent magnet motors considering mechanical and magnetic coupling effects. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2000, 36(4): 1346 ~ 1350
- 8 邱家俊. 机电分析动力学. 北京: 科学出版社, 1992: 308 ~ 320 (Qiu J J. Electromechanical dynamics. Beijing: The Science Press, 1992: 308 ~ 320 (in Chinese)).
- 9 鞠立华, 蒋书运. 飞轮储能系统机电耦合非线性动力学分析. 中国科学 E 辑 技术科学, 2006, 36(1): 68 ~ 83 (Ju L H, Jiang S Y. Analysis on nonlinear dynamics of electromechanical coupling in flywheel energy storage system. *Science China E Series on Technology*, 2006, 36(1): 68 ~ 83 (in Chinese))
- 10 Klingshirn E A. High phase order induction motors-Part I-Description and theoretical considerations. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1983, 1: 47 ~ 53
- 11 Fitzgerald A E, Charles K J, Stephen D U. Electric machinery (6th ed). New York: McGraw-Hill, 2003

## STUDY ON NONLINEAR DYNAMICS OF ELECTROMECHANICAL COUPLING IN FLYWHEEL ENERGY STORAGE SYSTEM BASED ON ACTIVE MAGNETIC BEARINGS

Chen Junfeng<sup>1†</sup> Liu Kun<sup>2</sup> Liang Wenjie<sup>1</sup> Tian Ying<sup>1</sup>

(1. Equipment Department, Troop 61769 of People's Liberation Army, Wenshui 032100, China)

(2. Institute of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** This paper studied the nonlinear dynamics of electromechanical coupling between the flywheel and the generator in the flywheel energy storage system (FESS) based on active magnetic bearings (AMBs). By deducing the functions of the kinetic energy, the potential energy, the magnetic field energy in the air gap of the generator and the energy dissipation of the whole system with rotor eccentricity, the dynamical equations of the coupled system between the flywheel system with AMBs and the two-phase-four-pole permanent magnet generator were established by using the Lagrange-Maxwell equation. Then, the numerical method was adopted to analyze the nonlinear dynamical characters of the 0.6MW FESS based on AMBs, and the analytical results of the example show that the stable rotating-synchronous harmonic solution and triple-harmonic solution exist in the nonlinear equations of the coupled system, and the amplitude of the synchronous vibration is higher than that of triple-harmonic vibration. Furthermore, when the FESS based on AMBs is stable, the nonlinear vibration can be weakened by increasing rotational speed of flywheel, the damping of AMBs or by decreasing the stiffness of AMBs, the magnetic field energy which includes the armature reaction energy and the permanent magnet excitation energy. As for decreasing the damping of AMBs or by increasing the stiffness, magnetic field energy, the flywheel may get unstable.

**Key words** flywheel energy storage system based on active magnetic bearings, electromechanical coupling, Lagrange-Maxwell equations, permanent magnet generator, nonlinear dynamics