

含参量分数阶微分系统的基本分岔分析^{*}

钱德亮^{1†} 陈阳泉^{2,3}

(1. 中原工学院数学系, 郑州 450007)

(2. 加利福尼亚大学默赛德分校工程学院, 机械电子、嵌入系统与自动化实验室, 加利福尼亚 95343 - 5200)

(3. 犹他州立大学电子与计算机工程系, 犹他 84322 - 4120)

摘要 本文中, 我们讨论了含参量分数阶微分系统的基本分岔, 即跨临界分岔、折叠分岔与音叉分岔。首先, 根据分数阶 Lyapunov 方法, 讨论了含参量分数阶微分系统的稳定性, 并给出了这些基本分岔的相图。其次, 根据 Taylor 展式与隐函数定理, 研究了分数阶微分系统的规范形, 从而求出这些基本分岔的拓扑规范形。

关键词 分数阶微分系统, Caputo 分数阶导数, 折叠分岔, 跨临界分岔, 音叉分岔

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-053

引言

分数阶微积分(分数阶微分和分数阶积分)经过三个多世纪的发展, 它受到越来越多的应用科学家及工程技术人员的重视。虽然人们在早期对它有一定的认识, 但是直到二十世纪七十年代后才得到广泛关注。

由于分数阶微分模型可以很好地描述物质的记忆和遗传性质, 克服了经典整数阶微分模型理论与实验结果吻合不好的缺陷, 并且仅需要使用较少几个参数就可获得较好的效果, 因此越来越多的学者对它产生了浓厚的兴趣, 从而使得在近年来, 分数阶微积分无论在理论上还是应用上都获得了飞速发展^[1-8], 其应用领域也越来越广泛。这其中在软物质、控制工程、反常扩散、流变学等方面都有长足的发展^[1,7-9]。

分岔是含参量非线性微分系统的主要研究内容。众所周知, 在含参量的非线性微分系统中, 当参量变化到某个值时, 系统相图也随之变化, 这就导致相图的拓扑结构发生变化, 在几何上表现为参数的某个值处相图发生突变, 这个值就是分岔发生的临界值。

由于分数阶微分系统的稳定性区域不同于整

数阶(经典)微分系统, 分数阶微分系统的稳定性区域与求导阶数有直接联系, 而经典微分系统的稳定性区域一般在负半平面, 因而在研究上, 这两者研究方法上有一定的差别。我们知道研究含参量微分系统的分岔主要从稳定性方面着手研究, 因此, 研究含参量分数阶微分系统的分岔要比经典微分系统的分岔复杂一些。

近来, Matignon^[10]讨论了带 Caputo 导数的线性分数阶微分系统的稳定性。之后, 一些学者研究了带 Riemann-Liouville 导数^[11]的分数阶微分系统的稳定性, 还有学者研究了带 Caputo 导数的时滞微分系统^[12]的稳定性。所有这些文献在分析分数阶微分系统的稳定性的时候, 基本上都是通过系统的解来讨论的。然而, 并不是所有的分数阶微分系统都能够求出解的, 所以这就需要应用其他有效的工具讨论零解的稳定性。近来, 李岩等人^[13-14]讨论了分数阶微分方程的 Lyapunov 直接法, 这种方法可以直接讨论分数阶微分系统, 特别是含参量的非线性分数阶微分系统的稳定性。有了这些分析分数阶微分系统稳定性的方法, 我们就可以讨论有关含参数分数阶微分系统的分岔问题。在讨论主要问题之前, 首先给出本文所需要的主要定义及相关性质。

2012-08-30 收到第 1 稿, 2012-10-16 收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目(10872119)、河南省自然科学基金(112300410022)、中国博士后基金(2012M510885)

† 通讯作者 E-mail: deliangqian@126.com

1 预备知识

在本节中, 我们首先给出本文所需的分数阶微积分的有关基本定义与基本性质.

Gamma 函数 $\Gamma(z)$ 是由第二类 Euler 积分定义

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, (\operatorname{Re}(z) > 0),$$

其中 $t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$.

Gamma 函数具有一个递推关系式

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

由此得到一个特殊的, 但是比较常用的递推关系式

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!,$$

其中 n 是任意非负整数, 且 $0! = 1$.

定义 1.1 对 $\forall t > 0$, 函数 $x(t)$ 的阶数为 $\alpha \in R^+$ 的分数阶积分定义为

$$D_{0,t}^{-\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau,$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是伽玛函数.

定义 1.2 对 $\forall t > 0$, 函数 $x(t)$ 的阶数为 $\alpha \in (n-1, n)$, $n \in Z^+$ 的 Riemann-Liouville 分数阶导数定义为

$${}_{RL}D_{0,t}^\alpha x(t) = \frac{d^n}{dt^n} D_{0,t}^{-(n-\alpha)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x(\tau) d\tau.$$

定义 1.3 对 $\forall t > 0$, 函数 $x(t)$ 的阶数为 $\alpha \in (n-1, n)$, $n \in Z^+$ 的 Caputo 分数阶导数定义为

$${}_{C}D_{0,t}^\alpha x(t) = D_{0,t}^{-(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau.$$

本文中, 我们主要讨论带 Caputo 导数的分数阶微分系统, 并且讨论导数阶数为 $\alpha \in (0, 1)$ 的情况.

定义 1.4 常数 x_0 是 Caputo 型分数阶微分系统

$${}_{C}D_{0,t}^\alpha x(t) = f(t, x), \quad (1)$$

的平衡点当且仅当对 $\forall t \geq t_0$, $f(t, x_0) = 0$.

定义 1.5 已知 Caputo 型分数阶微分系统

$${}_{C}D_{0,t}^\alpha x(t) = f(t, x),$$

及初值条件 $x(t_0) = x_0$, 称系统

i) 稳定当且仅当 $\forall x_0, \exists \delta, \forall t \geq t_0$, $\|x(t)\| \leq \delta$; 否则, 就称系统不稳定.

ii) 漐近稳定当且仅当是稳定的, 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$.

定义 1.6 如果连续函数 $\alpha: [0, t] \rightarrow [0, \infty)$, 并且是严格递增函数, $\alpha(0) = 0$, 那么就称它为 K -函数.

定理 1.1 令 $x=0$ 是非自治分数阶微分系统

$${}_{C}D_{0,t}^\alpha x(t) = f(t, x), \quad (2)$$

的平衡点. 假设存在 Lyapunov 函数 $V(t, x(t))$, 以及 K -函数 $\alpha_i (i=1, 2, 3)$, 并且满足

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

与

$${}_{C}D_{0,t}^\alpha V(t, x(t)) \leq -\alpha_3(\|x\|),$$

其中 $\alpha \in (0, 1)$. 那么系统(2)的平衡点是漐近稳定的.

定理 1.2 令 $x=0$ 是非自治分数阶微分系统(2)的平衡点. 假设存在 Lyapunov 函数 $V(t, x(t))$, 及 K -函数 $\alpha_i (i=1, 2, 3)$, 并且满足

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

与

$${}_{C}D_{0,t}^\alpha V(t, x) > 0.$$

那么, 分数阶微分系统(2)的平衡点 $x=0$ 不稳定.

证明 由于

$${}_{C}D_{0,t}^\alpha V(t, x(t)) > 0, V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|). \quad (3)$$

如果假设分数阶微分系统 ${}_{C}D_{0,t}^\alpha x(t) = f(t, x)$ 的平衡点 $x=0$ 稳定, 即对 $\forall \varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$, 且 $\|x_0\| < \delta$, 那么对 $\forall t \geq 0$, 就有 $\|x(t)\| < \varepsilon$. 另一方面, 由于当 $t \geq 0$ 时, ${}_{C}D_{0,t}^\alpha V(t, x) > 0$, 因此

$${}_{C}D_{0,t}^\alpha {}_{C}D_{0,t}^\alpha V(t, x) > 0,$$

由此得到

$$V(t, x) - V(0, x_0) \geq 0. \quad (4)$$

特别地, 设 $\|x_0\| < \delta, V(0, x_0) > 0$. 从(3)及(4)得到

$$\alpha_2(\|x(t)\|) \geq V(t, x) \geq V(0, x_0) > 0, \quad (5)$$

从(3)及(5), 并且由于函数 $\alpha_2(z)$ 的单调性, 当 $t > 0$ 时, 存在 $\xi > 0$, 并且有 $\|x(t)\| \geq \xi$, 因此, 存在一 K -类函数 φ_1 , 使得

$$\begin{aligned} {}_{C}D_{0,t}^\alpha V(t, x) &\geq \varphi_1(\|x(t)\|) \\ &\geq \varphi_1(\alpha_1^{-1}(V(t, x))) > 0. \end{aligned}$$

于是, 存在一个非负函数 $m(t)$, 使得

$${}_{C}D_{0,t}^\alpha V(t, x) = \varphi_1(\alpha_1^{-1}(V(t, x))) + m(t),$$

及初值条件, 这个方程的解为

$$V(t, x) = V(0, x_0) E_{\alpha, 1}(\varphi_1(\alpha_1^{-1} t^\alpha)) + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\varphi_1(\alpha_1^{-1}(t - \tau)^\alpha)) m(\tau) d\tau.$$

从这个解可以得到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t, x) = +\infty$. 这与我们的假设条件 $V(t, x) \leq \alpha_2(\|x(t)\|) \leq \alpha_2(\varepsilon)$ 矛盾. 因此, 分数阶微分系统(2)的平衡点 $x=0$ 不稳定.

定理证毕.

由于含参数分数阶微分方程在应用科学领域受到越来越多的重视, 因此对含参数的分数阶微分方程的研究就越来越深入. 我们知道, 对含参数的系统而言, 当参数变化到某个值时, 系统的拓扑结构会发生变化, 这种拓扑结构的变化就会产生分岔, 这种现象在分析分数阶动力学模型时具有很重要的现实意义. 因此, 很有必要讨论含参数分数阶微分系统的分岔现象^[15-20].

2 基本分岔的相图

本节中, 我们对三种基本分岔的相图进行讨论, 即折叠分岔、跨临界分岔及音叉分岔的讨论.

2.1 折叠分岔的相图

本小节我们主要讨论折叠分岔的情况, 主要通过分析平衡点的稳定性, 得到分岔的分岔相图. 通过相应的命题与定理, 最后给出相应的相图.

命题 2.1 对分数阶微分系统

$${}_c D_{0,t}^\alpha x(t) = \mu - x^2(t), \quad (6)$$

其中 $\alpha \in (0, 1)$, 及初值条件 $x(0) \neq 0$. 当 $\mu > 0$ 时, 系统的平衡点为 $x = \pm \sqrt{\mu}$, 其中 $x = \sqrt{\mu}$ 渐近稳定, 而 $x = -\sqrt{\mu}$ 不稳定.

证明: 当 $\mu > 0$ 时, 此时系统有两个平衡点: $x = \pm \sqrt{\mu}$.

首先, 讨论平衡点 $x = \sqrt{\mu}$ 的稳定性, 此时系统(6)可以进行如下的变形

$$\begin{aligned} {}_c D_{0,t}^\alpha x(t) &= \mu - x^2(t) \\ &= -(x - \sqrt{\mu})^2 - 2\sqrt{\mu}(x - \sqrt{\mu}). \end{aligned}$$

令 $y = x - \sqrt{\mu}$. 那么

$$\begin{aligned} {}_c D_{0,t}^\alpha y(t) &= {}_c D_{0,t}^\alpha(x(t) - \sqrt{\mu}) \\ &= {}_c D_{0,t}^\alpha x(t) = -y^2 - 2y\sqrt{\mu}. \end{aligned} \quad (7)$$

因此, 在这里, 仅仅需要讨论系统(7)的稳定性就可以了. 我们可以证明, 当 $y(0) \neq 0$ 时, 对 $\forall t \in (0, +\infty)$, 有 $y(0)y(t) > 0$.

取 Lyapunov 函数

$$V(t, y) = y(0)y(t).$$

那么

$$\begin{aligned} {}_c D_{0,t}^\alpha V(t, y) &= {}_c D_{0,t}^\alpha y(0)y(t) \\ &= -y(0)y(t)(y + 2\sqrt{\mu}). \end{aligned}$$

由于 $x(t) = -\sqrt{\mu}$ 是系统的平衡点, 因此 ${}_c D_{0,t}^\alpha V(t, y) < 0$. 于是, 根据定理 1.1 得到系统(7)的平衡点 $y=0$ 渐近稳定, 也就是说, 系统(6)的平衡点 $x = \sqrt{\mu}$ 渐近稳定.

其次, 讨论系统的平衡点 $x = -\sqrt{\mu}$ 的稳定性.

$$\begin{aligned} \text{令 } y &= x + \sqrt{\mu}. \text{ 那么系统可以变换为如下系统} \\ {}_c D_{0,t}^\alpha y(t) &= {}_c D_{0,t}^\alpha(x(t) + \sqrt{\mu}) = {}_c D_{0,t}^\alpha x(t) \\ &= -y^2 + 2y\sqrt{\mu}. \end{aligned} \quad (8)$$

选取 Lyapunov 函数为 $V(t, y) = y(0)y(t)$. 那么得到

$$\begin{aligned} {}_c D_{0,t}^\alpha V(t, y) &= {}_c D_{0,t}^\alpha y(0)y(t) \\ &= -y(0)y(t)(y - 2\sqrt{\mu}). \end{aligned}$$

由于 $x(t) = \sqrt{\mu}$ 是系统的平衡点, 因此 ${}_c D_{0,t}^\alpha V(t, y) > 0$. 因此根据定理 1.2 得到结论: 系统(8)的平衡点 $y=0$ 不稳定. 从而, 分数阶微分系统(6)的平衡点 $x = -\sqrt{\mu}$ 不稳定.

命题证毕.

命题 2.2 当 $\mu = 0$ 时, 系统(6)为

$${}_c D_{0,t}^\alpha x(t) = \mu - x^2(t) = -x^2(t), \quad (9)$$

此时方程的解 $x_1(t)$. 当 $x(0) = x_0 > 0$ 时及当 $t \rightarrow \infty$ 时, 方程的解 $x_1(t) \rightarrow 0$; 而当 $x(0) = x_0 < 0$ 时及当 $t \rightarrow \infty$ 时, 方程的解 $x_1(t) \rightarrow \infty$. 即分数阶微分系统的平衡点不稳定.

证明: 由

$${}_c D_{0,t}^\alpha x(t) = -x^2(t),$$

有

$$D_{0,t}^{-\alpha} {}_c D_{0,t}^\alpha x(t) = -D_{0,t}^{-\alpha} x^2(t),$$

于是

$$x(t) - x(0) = -D_{0,t}^{-\alpha} x^2(t),$$

因此 $x(t) < x(0)$.

构造微分方程

$${}_c D_{0,t}^\alpha x(t) = -x(0)x(t),$$

及初值 $x(0) = x_0$. 此方程的解为

$$x(t) = x_0 E_{\alpha, 1}(-x(0)t^\alpha).$$

由此得到当 $x(0) = x_0 > 0$ 时, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 方程的解 $x(t) \rightarrow 0$; 而当 $x(0) = x_0 < 0$ 时, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 方

程的解 $x(t) \rightarrow \infty$.

于是, 当 $x(0) = x_0 > 0$ 时, 由于 $x(0)x(t) > 0$, 而 $x(t) < x(0)$, 因此

$$x(0)x(t) > x^2(t).$$

同理可以得到当 $x(0) = x_0 < 0$ 时,

$$x(0)x(t) < x^2(t).$$

因此, 根据分数阶微分方程的比较定理得到方程

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = -x^2(t),$$

及初值 $x(0) = x_0$ 的解为 $x_1(t)$. 于是当 $x(0) = x_0 > 0$ 时及当 $t \rightarrow \infty$ 时, 方程的解 $x_1(t) \rightarrow 0$; 而当 $x(0) = x_0 < 0$ 时及当 $t \rightarrow \infty$ 时, 方程的解 $x_1(t) \rightarrow \infty$.

命题证毕.

综合以上两个命题得到如下定理, 并由定理给出折叠分岔的相图.

定理 2.1 考虑如下分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu - x^2(t).$$

当参数 $\mu > 0$ 时, 系统有两个平衡点: $x = \pm \sqrt{\mu}$. 其中平衡点 $x = \sqrt{\mu}$ 渐近稳定, 而平衡点 $x = -\sqrt{\mu}$ 不稳定. 当 $\mu = 0$ 时, 系统仅有唯一的平衡点: $x = 0$. 此时系统的平衡点不稳定. 当 $\mu < 0$ 时, 系统没有平衡点.

基于以上定理的结论, 我们得到如下分数阶微分系统的折叠分岔的相图. 参看图 1.

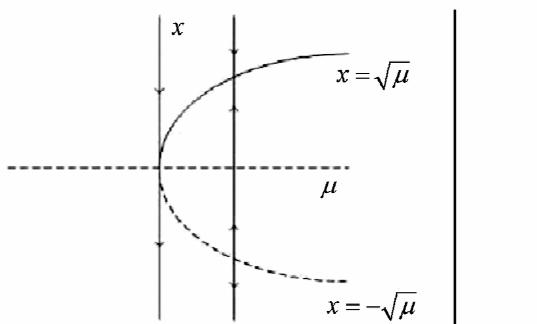


图 1 相参数空间的折叠分岔

Fig. 1 Fold bifurcation in the phase-parameter space

注 2.1. 用类似的分析方法, 我们可以讨论分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu + x^2(t).$$

2.2 跨临界分岔的相图

类似于第 2.1 节, 我们这一小节主要讨论分数阶微分系统的跨临界分岔的一些内容.

命题 2.3 对分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) - x^2(t), \quad (10)$$

其中 $\alpha \in (0, 1)$, 及初值条件 $x(0) \neq 0$. 当 $\mu < 0$ 时, 系统的平衡点 $x = 0$ 与 $x = \mu$, 其中 $x = 0$ 渐近稳定, 而 $x = \mu$ 不稳定.

证明: 当 $\mu < 0$ 时, 系统有两个平衡点: $x = 0$ 及 $x = \mu$. 首先讨论平衡点 $x = 0$ 的稳定性. 同理可以证明, 当 $x(0) \neq 0$ 时, 对 $\forall t \in (0, +\infty)$, 可以得到 $x(0)x(t) > 0$.

下面, 我们证明命题的结论. 令 Lyapunov 函数为 $V(x) = x(0)x(t)$. 由此得到

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha V(t, x) &= {}_cD_{0,t}^\alpha x(0)x(t) \\ &= \mu x(0)x(t) - x(0)x^2(t) \end{aligned}$$

因为 $x(0)x(t) > 0$, 而 $x(t) = \mu$ 是平衡点, 所以 ${}_cD_{0,t}^\alpha V(t, x) < 0$. 因此系统(10)渐近稳定.

下面, 讨论平衡点 $x = \mu$ 的稳定性, 此时系统(10)可以进行如下的变形

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) - x^2(t) = -(x - \mu)^2 - \mu(x - \mu).$$

令 $y = x - \mu$. 那么

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha y(t) &= {}_cD_{0,t}^\alpha (x(t) - \mu) = {}_cD_{0,t}^\alpha x(t) \\ &= -y^2 - \mu y. \end{aligned} \quad (11)$$

因此, 在这里, 仅仅需要讨论系统(11)的稳定性就可以了. 根据前面命题的证明有, 当 $y(0) \neq 0$ 时, 对 $\forall t \in (0, +\infty)$, 可以如下的结论 $y(0)y(t) > 0$. 取 Lyapunov 函数 $V(t, y) = y(0)y(t)$. 那么

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha V(t, y) &= {}_cD_{0,t}^\alpha y(0)y(t) = \\ &= -y(0)y(t)(y + \mu). \end{aligned}$$

由于 $x(t) = 0$ 是系统的平衡点, 因此 ${}_cD_{0,t}^\alpha V(t, y) > 0$. 于是, 根据定理 1.1 得到系统(11)的平衡点 $y = 0$ 渐近稳定, 也就是说, 系统(10)的平衡点 $x = \mu$ 不稳定.

命题证毕.

命题 2.4 当 $\mu = 0$ 时, 系统(10)变形为

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) - x^2(t) = -x^2(t), \quad (12)$$

此时方程的解 $x_2(t)$. 当 $x(0) = x_0 > 0$ 时及当 $t \rightarrow \infty$ 时, 方程的解 $x_2(t) \rightarrow 0$; 而当 $x(0) = x_0 < 0$ 时及当 $t \rightarrow \infty$ 时, 方程的解 $x_2(t) \rightarrow \infty$. 即系统的平衡点不稳定.

证明: 本命题的证明与命题 2.2 类似, 在此略.

命题 2.5 当 $\mu > 0$ 时, 系统(10)为

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) - x^2(t), \quad (13)$$

此时, 系统有两个平衡点: $x = 0$ 及 $x = \mu$. 其中平衡点 $x = \mu$ 漐近稳定, 而平衡点 $x = 0$ 不稳定.

证明: 当 $\mu > 0$ 时, 系统仍然有两个平衡点: $x = 0$ 及 $x = \mu$. 首先讨论平衡点 $x = 0$ 的稳定性.

同理, 当 $x(0) \neq 0$ 时, 对 $\forall t \in (0, \infty)$, 可以得到 $x(0)x(t) > 0$.

令 Lyapunov 函数为 $V(x) = x(0)x(t)$. 把这个函数与系统(10)结合得到

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha V(t, x) &= {}_cD_{0,t}^\alpha x(0)x(t) = \\ &= \mu x(0)x(t) - x(0)x^2(t) = \\ &= x(0)x(t)(\mu - x(t)), \end{aligned}$$

因为 $x(0)x(t) > 0$, 而 $x(t) = \mu$ 是平衡点, 因此 ${}_cD_{0,t}^\alpha V(t, x) > 0$. 因此系统(13)不稳定.

下面, 讨论平衡点 $x = \mu$ 的稳定性, 此时系统(10)可以进行如下的变形

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha x(t) &= \mu x(t) - x^2(t) = \\ &= -(x - \mu)^2 - \mu(x - \mu). \end{aligned}$$

令 $y = x - \mu$. 那么

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha y(t) &= {}_cD_{0,t}^\alpha(x(t) - \mu) = \\ &= {}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = -y^2 - \mu y. \end{aligned} \quad (14)$$

因此, 在这里, 仅仅需要讨论系统(14)的稳定性就可以了. 同理, 当 $y(0) \neq 0$ 时, 对 $\forall t \in (0, +\infty)$, 可以如下的结论 $y(0)y(t) > 0$. 取 Lyapunov 函数 $V(t, y) = y(0)y(t)$. 那么

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha V(t, y) &= {}_cD_{0,t}^\alpha y(0)y(t) = \\ &= -y(0)y(t)(y + \mu). \end{aligned}$$

由于 $x(t) = 0$ 是系统的平衡点, 因此 ${}_cD_{0,t}^\alpha V(t, y) < 0$. 于是, 根据定理 1.1 得到系统(14)的平衡点 $y = 0$ 漉近稳定, 也就是说, 系统(10)的平衡点 $x = \mu$ 漉近稳定.

命题证毕.

综合以上命题得到如下定理.

定理 2.2 考虑如下分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) - x^2(t).$$

当参数 $\mu > 0$ 时, 系统有两个平衡点: $x = 0$ 及 $x = \mu$. 其中平衡点 $x = \mu$ 漉近稳定, 而平衡点 $x = 0$ 不稳定. 当 $\mu < 0$ 时, 系统仍然有两个平衡点: $x = 0$ 及 $x = \mu$. 其中平衡点 $x = \mu$ 不稳定, 而平衡点 $x = 0$ 漉近稳定. 当 $\mu = 0$ 时, 系统也仅有一个平衡点: $x = 0$, 此时方程的平衡点不稳定.

基于如上定理的结论, 我们得到如下关于分

数阶微分系统的跨临界分岔的相图. 参看图 2.

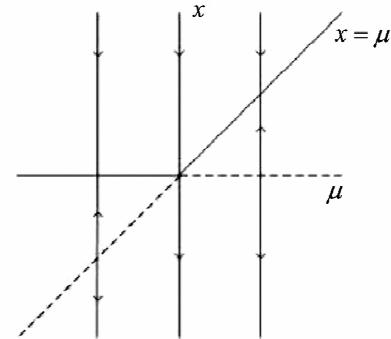


图 2 相参数空间的跨临界分岔

Fig. 2 Transcritical bifurcation in the phase - parameter space

注 2.2 用类似的方法, 我们可以讨论分數阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) + x^3(t).$$

2.3 音叉分岔的相图

在本小节中, 我们主要讨论含参量分数阶微分系统的音叉分岔的情况.

命题 2.6 对分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) - x^3(t), \quad (15)$$

其中 $\alpha \in (0, 1)$, 及初值条件 $x(0) \neq 0$. 当 $\mu < 0$ 时, 系统的平衡点 $x = 0$ 漉近稳定.

证明: 当 $\mu < 0$ 时, 系统仅有一个平衡点: $x = 0$. 同理, 当 $x(0) \neq 0$ 时, 对 $\forall t \in (0, +\infty)$, 可以得到 $x(0)x(t) > 0$.

当 $\forall t \geq 0$ 时, 可以证明 $x(0)x(t) \leq x^2(0)$, 当且仅当 $t = 0$ 时, 等号成立. 我们给出如下简单的证明.

设 $x(0) > 0$, 由结论 $x(0)x(t) > 0$, 可以得到 $x(t) > 0$, 从而 $x^3(t) > 0$. 由

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) - x^3(t),$$

一方面有

$$D_{0,t}^{-\alpha} {}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = x(t) - x(0),$$

另一方面有

$$D_{0,t}^{-\alpha} {}_cD_{0,t}^\alpha x(t) =$$

$$D_{0,t}^{-\alpha}(\mu x(t) - x^3(t)) < 0,$$

因此可以得到结论 $x(t) < x(0)$. 因而 $x^2(t) \leq x(0)x(t) \leq x^2(0)$, 其中当且仅当 $t = 0$ 时, 等号成立. 对 $x(0) < 0$ 的情况, 可以应用与 $x(0) > 0$ 相同的方法证明. 因此, 上述结论成立.

令 Lyapunov 函数为 $V(x) = x(0)x(t)$. 把这个函数与系统(15)结合得到

$${}_cD_{0,t}^\alpha V(t,x) = {}_cD_{0,t}^\alpha x(0)x(t) =$$

$$\mu x(0)x(t) - x(0)x^3(t),$$

因为 $x(0)x(t) > 0$, 所以 $x(0)x^3(t) > 0$. 而 $\mu < 0$, 因此

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha V(t,x) &= \mu x(0)x(t) - \\ &x(0)x^3(t) \leq \mu x(0)x(t) = \\ &- (\mu)x(0)x(t) = -(-\mu)V(t,x). \end{aligned}$$

因而 ${}_cD_{0,t}^\alpha V(t,x) \leq -\alpha_3 V(t,x)$, 其中 $\alpha_3 = -\mu > 0$.

根据定理 1.1, 系统(15)渐近稳定.

命题证毕.

命题 2.7 当 $\mu = 0$ 时, 系统(15)变形为

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) - x^3(t) = -x^3(t), \quad (16)$$

这个系统仅有一个平衡点 $x = 0$, 该平衡点渐近稳定.

证明: 本命题的证明与命题 2.6 类似, 在此略.

命题 2.8 当 $\mu > 0$ 时, 系统(15)为

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) - x^3(t), \quad (17)$$

此时, 系统有三个平衡点: $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{\mu}$. 其中平衡点 $x = \pm\sqrt{\mu}$ 渐近稳定, 而平衡点 $x = 0$ 不稳定.

证明: 首先, 讨论平衡点 $x = \sqrt{\mu}$ 的稳定性, 此时系统(17)可以进行如下的变形

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha x(t) &= \mu x(t) - x^3(t) = \\ &-(x - \sqrt{\mu})^3 - 3\sqrt{\mu}(x - \sqrt{\mu})^2 - \\ &2\mu(x - \sqrt{\mu}). \end{aligned}$$

令 $y = x - \sqrt{\mu}$. 那么

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha y(t) &= {}_cD_{0,t}^\alpha(x(t) - \sqrt{\mu}) = \\ {}_cD_{0,t}^\alpha x(t) &= -y^3 - 3\sqrt{\mu}y^2 - 2\mu y. \end{aligned} \quad (18)$$

因此, 在这里, 仅仅需要讨论系统(18)的稳定性就可以了. 利用命题 2.6 类似的推理方法, 可以得到结论 $y(0)y(t) > 0$ 及 $y(0)y(t) \leq y^2(0)$. 取 Lyapunov 函数 $V(t,y) = y(0)y(t)$. 那么

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha V(t,y) &= {}_cD_{0,t}^\alpha y(0)y(t) = \\ &-y(0)y(t)(y + \sqrt{\mu})(y + 2\sqrt{\mu}) \leq \\ &-y(0)y(t)(y + \sqrt{\mu})^2 = \\ &-(y + \sqrt{\mu})^2V(t,y). \end{aligned}$$

因此 ${}_cD_{0,t}^\alpha V(t,y) \leq -\alpha_3 V(t,y)$, 其中 $\alpha_3 = (y + \sqrt{\mu})^3$. 于是, 根据定理 1.1 得到系统(18)的平衡点 $y = 0$ 渐近稳定, 也就是说, 系统(17)的平衡点 $x = \sqrt{\mu}$ 渐近稳定.

其次, 讨论系统的平衡点 $x = -\sqrt{\mu}$ 的稳定性. 在此, 使用的方法与前面讨论平衡点 $x = \sqrt{\mu}$ 所使用的方法是一致的.

令 $y = x + \sqrt{\mu}$. 那么系统可以变换为

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha y(t) &= {}_cD_{0,t}^\alpha(x(t) + \sqrt{\mu}) = \\ {}_cD_{0,t}^\alpha x(t) &= -y^3 + 3\sqrt{\mu}y^2 - 2\mu y. \end{aligned} \quad (19)$$

应用前面相同的方法, 可以得到 $y(0)y(t) > 0$, 及 $y(0)y(t) \leq y^2(0)$, 其中当且仅当 $t = 0$ 时等号成立.

取 Lyapunov 函数为 $V(t,y) = y(0)y(t)$, 那么

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha V(t,y) &= {}_cD_{0,t}^\alpha y(0)y(t) = \\ &-y(0)y(t)(y - \sqrt{\mu})(y - 2\sqrt{\mu}) \leq \\ &-y(0)y(t)(y - 2\sqrt{\mu})^2 = \\ &-(y - 2\sqrt{\mu})^2V(t,y). \end{aligned}$$

因此 ${}_cD_{0,t}^\alpha V(t,y) \leq -\alpha_3 V(t,y)$, 其中 $\alpha_3 = (y - 2\sqrt{\mu})^2$.

根据定理 1.1 系统(19)的平衡点 $y = 0$ 渐近稳定. 从而, 分数阶微分系统(17)的平衡点 $x = -\sqrt{\mu}$ 渐近稳定.

最后, 我们讨论当 $\mu > 0$ 时, 系统的平衡点 $x = 0$ 的稳定性.

类似的, 取 $V(t,x) = x(0)x(t)$ 作为 ${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) - x^3(t)$ 的 Lyapunov 函数. 经过简单计算得到

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha V(t,x) &= {}_cD_{0,t}^\alpha x(0)x(t) = \\ &\mu x(0)x(t) - x(0)x^3(t) = \\ &x(0)x(t)(\mu - x^2), \end{aligned}$$

由于系统的平衡点 $x = \pm\sqrt{\mu}$ 的存在性, 有结论 $\mu - x^2 > 0$, 所以 ${}_cD_{0,t}^\alpha V(t,x) > 0$. 因此, 根据定理 1.2, 系统(17)的平衡点 $x = 0$ 是一个不稳定的平衡点.

命题证毕.

综合以上命题得到如下定理.

定理 2.3 考虑如下分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) - x^3(t).$$

当参数 $\mu > 0$ 时, 系统有三个平衡点: $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{\mu}$. 其中平衡点 $x = \pm\sqrt{\mu}$ 渐近稳定, 而平衡点 $x = 0$ 不稳定. 当 $\mu < 0$ 时, 系统仅有唯一的平衡点: $x = 0$, 该平衡点渐近稳定.

当 $\mu = 0$ 时, 系统也仅有一个平衡点: $x = 0$, 这个平衡点渐近稳定.

基于如上定理的结论, 我们能够得到如下关

于分数阶微分系统的音叉分岔的相图。参看图3。

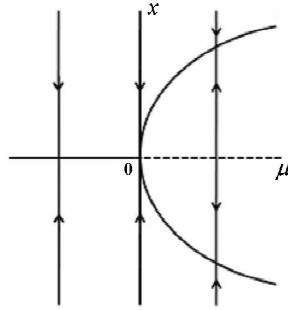


图3 相参数空间的音叉分岔

Fig. 3 Pitchfork bifurcation in the phase - parameter space

注 2.3 用类似的分析方法,我们可以讨论分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x(t) + x^3(t).$$

3 分岔规范形的计算

本节,我们仅讨论音叉分岔规范形的计算,对于跨临界分岔及折叠分岔可以类似的计算,在此不再详细叙述。在经典的 Taylor 展式和隐函数定理的条件下,我们证明分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = f(\mu, x), x \in R^1, \mu \in R^1,$$

在原点(音叉分岔点)附近能够简化为分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha \eta(t) = v\eta \pm \eta^3 + O(\eta^4).$$

随后,应用拓扑等价映射证明这个分数阶微分系统,在原点附近等价于分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha \eta(t) = v\eta \pm \eta^3.$$

接下来,主要证明具有一个参数的一维分数阶微分系统能够等价于下面的分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = \mu x - x^3. \quad (20)$$

并且证明系统(20)(x^3 一项前面的符号也可以取正号)是一般带有一个参数的一维分数阶微分系统的音叉分岔的规范形。

假设分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t) = f(x, \mu), x \in R^1, \mu \in R^2, \quad (21)$$

其中 f 是光滑函数,且在 $\mu = 0$ 时有平衡点 $x = 0$,而且 Jacobian 矩阵具有特征值 $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ 。把函数 $f(x, \mu)$ 在 $x = 0$ 处关于 x 展开成经典意义下的 Taylor 级数的形式:

$$\begin{aligned} f(x, \mu) &= f_0(\mu) + f_1(\mu)x + f_2(\mu)x^2 + \\ &\quad f_3(\mu)x^3 + O(x^4). \end{aligned}$$

这个含参量的分数阶微分系统需要满足两个条件,

一个是平衡点条件: $f_0(0) = f(0, 0) = 0$,另一个是音叉分岔条件: $f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$ 。

通过引进一个新的变量 ξ ,我们可以进行坐标平移变换 $\xi = x + \delta$,其中 $\delta = \delta(\mu)$ 是一个待定函数,这将在后面的计算过程中给出。由上面的方程得到下面的坐标变换

$$x = \xi - \delta. \quad (22)$$

把方程(22)代入方程(21)得到

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha x(t) &= {}_cD_{0,t}^\alpha \xi(t) = f_0(\mu) + f_1(\mu)(\xi - \delta) + \\ &\quad f_2(\mu)(\xi - \delta)^2 + f_3(\mu)(\xi - \delta)^3 + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

经过简单计算得到

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha &= f_0(\mu) + f_1(\mu)(\xi - \delta) + \\ &\quad f_2(\mu)(\xi^2 - 2\xi\delta + \delta^2) + \\ &\quad f_3(\mu)(\xi^3 - 3\xi^2\delta + 3\xi\delta^2 - \delta^3) + \dots \\ &= [f_0(\mu) - f_1(\mu)\delta + f_2(\mu)\delta^2 - f_3(\mu)\delta^3 + O(\delta^4)] + \\ &\quad [f_1(\mu) - 2f_2(\mu)\delta + 3f_3(\mu)\delta^2 + O(\delta^3)]\xi + \\ &\quad [f_2(\mu) - 3f_3(\mu)\delta + O(\delta^2)]\xi^2 + \\ &\quad [f_3(\mu) + O(\delta)]\xi^3 + O(\xi^4). \end{aligned} \quad (24)$$

设 $f_3(0) = \frac{1}{3}f_{xxx}(0, 0) \neq 0$ 。那么存在一个光滑

函数 $\delta(\mu)$,对任意充分小的 $|\mu|$,能够消去上面方程中的常数项及二次项,这个结论可以由隐函数定理证明。上面方程中的常数项及二次项可以改写为

$$\begin{cases} F(\delta, \mu) = f_0(\mu) - f_1(\mu)\delta + f_2(\mu)\delta^2 - \\ f_3(\mu)\delta^3 + \delta^4\psi_1(\delta, \mu) = 0, \\ G(\delta, \mu) = f_2(\mu) - 3f_3(\mu)\delta + \delta^2\psi_2(\delta, \mu) = 0, \end{cases}$$

其中 ψ_1, ψ_2 是光滑函数。

由于存在条件: $f_0(\mu) = f(0, \mu) = 0$,所以上面方程组可以改写为

$$\begin{cases} F(\delta, \mu) = -f_1(\mu) + f_2(\mu)\delta^2 - f_3(\mu)\delta^2 + \\ \delta^3\psi_1(\delta, \mu) = 0, \\ G(\delta, \mu) = f_2(\mu) - 3f_3(\mu)\delta + \delta^2\psi_2(\delta, \mu) = 0, \end{cases}$$

由于对称性条件 $f_{xx}(0, 0) = 0$,以及分岔条件 $f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$,所以 $F(0, 0) = 0, G(0, 0) = 0$ 。如果再假设通有性条件 $f_{\mu x}(0, 0) \neq 0$,以及假设条件 $f_3(0) = \frac{1}{3}f_{xxx}(0, 0) \neq 0$,那么

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(\mu, \delta)} \right|_{0,0} = \begin{vmatrix} -f_1'(0) & f_2(0) \\ f_2'(0) & -3f_3(0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

由此,存在唯一的光滑函数 $\delta = \delta(\mu)$,使得 $\delta(0) =$

0,且 $F(\delta,\mu)=0,G(\delta,\mu)=0$.因此

$$\delta(\mu)=\frac{1}{3}\frac{f_{x\mu}(0,0)}{f_{xxx}(0,0)}\mu+O(\mu^2).$$

那么,现在关于 ξ 的分数阶微分方程(24)就没有常数项及二次项:

$$\begin{aligned} {}_cD_{0,t}^\alpha \xi(t) = & [f_1(\mu)-2f_2(\mu)\delta+3f_3(\mu)\delta^2+O(\delta^3)]\xi + \\ & [f_3(\mu)+O(\delta)]\xi^3+O(\xi^4) = \\ & [f_1'(0)\mu+O(\mu^2)]\xi^2+ \\ & [f_3(0)+O(\mu)]\xi^3+O(\xi^4)[f_1(0)\beta+\cdots]\xi+ \\ & [f_3(0)+O(\beta)]\xi^3+O(\xi^4). \end{aligned} \quad (25)$$

如果引入一个新的参量 $v=v(\mu)$,那么(25)的线性项变为: $v=f_1'(0)\mu+\mu^2\phi(\mu)$,其中 ϕ 是一光滑函数.因此(i) $v(0)=0$,(ii) $v'(0)=f_1'(0)=f_{x\mu}(0,0)$.由于 $f_{x\mu}(0,0)\neq 0$,那么由反函数定理知存在唯一的光滑的反函数 $\mu=\mu(v)$,且 $\mu(0)=0$.因此,分数阶微分系统(24)变形为 ${}_cD_{0,t}^\alpha \xi(t)=v(\xi)+a(v)\xi^3+O(\xi^4)$,其中 $a(v)$ 是一光滑函数,且由于假设条件 $a(0)=f_3(0)\neq 0$.

如果引入变换 $\eta(t)=|a(v)|\xi(t)$,那么这个变换把上面的方程变形为

$${}_cD_{0,t}^\alpha \eta=v\eta\pm\eta^3+O(\eta^4),$$

其中三次项 η^3 的符号由 $\frac{a(v)}{|a(v)|}$ 决定.

根据以上的分析过程总结出如下的定理.

定理3.1 设带有一个参量的一维分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha x(t)=f(x,\mu), x \in R^1, \mu \in R^1,$$

其中 f 是光滑函数,当 $\mu=0$ 时,存在平衡点 $x=0$,并且令

$$\lambda=f_x(0,0)=0, f_0(\mu)=f(0,\mu)=0.$$

假设还满足下面的条件:

$$(A_1)f_{xxx}(0,0)\neq 0,$$

$$(A_2)f_{x\mu}(0,0)\neq 0.$$

那么存在可逆的坐标变换与参量变换,把系统变换为如下的分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha \eta=v\eta\pm\eta^3+O(\eta^4).$$

命题3.1 在原点附近,带Caputo导数的分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha \eta=v\eta-\eta^3+O(\eta^4), \quad (26)$$

局部拓扑等价为下面的分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha \eta=v\eta-\eta^3.$$

证明的简单思路为,引入变量 y ,那么方程(26)改写为

$${}_cD_{0,t}^\alpha y(t)=vy-y^3+\Psi(y,v), \quad (27)$$

这里,在原点 $(0,0)$ 附近, $\Psi(y,v)=O(y^4)$ 是 (y,v) 的光滑函数.在原点 $(0,0)$ 附近,考虑 (y,v) -平面内系统(27)的平衡点流形:

$$M=\{(y,v):F(y,v)=vy-y^3+\Psi(y,v)=0\}.$$

由上式得到

$$\begin{aligned} M=\{(y,v):F(y,v)=vy-y^3+\Psi(y,v)= & \\ yF_1(y,v)=0\}, \end{aligned}$$

其中 $F_1(y,v)=v-y^2+\Psi_1(y,v)$,且在原点 $(0,0)$ 附近, $\Psi_1(y,v)$ 是 (y,v) 的光滑函数.这表明在 (y,v) 平面的原点 $(0,0)$ 附近,系统(27)的平衡点流形能够表示为

$$M_1=\{(y,v):y=0\},$$

或者

$$M_2=\{(y,v):F_1(y,v)=0\}.$$

由于 $F_1(0,0)=0$,所以曲线 M_2 过原点 $(0,0)$.由于 $(F_{1v}(0,0)=1)$,那么由隐函数定理,曲线 M_2 可以表示为

$$M_2=\{(y,v):v=g(y)\},$$

这里,对充分小的 $|y|$, g 是光滑函数,而且

$$g(y)=y^2+O(y^3).$$

因此,对充分小的 $v>0$,在原点附近,系统(27)存在两个平衡点: $y_1(v)$ 与 $y_2(v)$,它们与系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha \eta(t)=v\eta-\eta^3 \quad (28)$$

的平衡点充分接近,也就是,对于相同的参数值,它们充分接近 $y_1(v)=\sqrt{v}$ 与 $y_2(v)=-\sqrt{v}$ 两个平衡点.

对充分小的 $|v|$,构造如下的一个依赖参数的映射 $y=h_v(x)$.对 $v\leq 0$,取恒等映射 $h_v(x)=x$.对 $v>0$,取线性变换 $h_v(x)=a(v)+b(v)x$,其中系数 a,b 由条件 $h_v(\eta_i(v))=y_i(v), i=1,2$,唯一确定.

这里所构造的映射 $h_v:R^1\rightarrow R^1$ 是一个同胚映射,也就是说,在原点附近,把系统(28)的轨道映射到相应的系统(27)的轨道上,并且保持时间方向不变.

应用相同的方法可以证明,在原点附近,带有Caputo型导数的分数阶微分系统

$${}_cD_{0,t}^\alpha \eta(t)=v\eta(t)+\eta(t)^3+O(\eta(t)^4),$$

与分数阶微分系统

$${}_c D_{0,t}^\alpha \eta(t) = v\eta(t) + \eta(t)^3$$

拓扑等价. 在此不再详细叙述.

综合以上分析可以得到如下定理.

定理3.2 (音叉分岔的拓扑规范形).任意通有单参数分数阶微分系统

$${}_c D_{0,t}^\alpha x(t) = f(x, \mu),$$

在 $\mu=0$ 处有平衡点 $x=0$, 并且有特征值 $\lambda=f_x(0, 0)=0$; 在原点附近局部拓扑等价于如下的一类规范形:

$${}_c D_{0,t}^\alpha \eta = v\eta + \eta^3.$$

从上面的分析过程, 我们可以看出关于分数阶微分系统的音叉分岔的规范形的简单的计算过程如下. 通过变量与参数的逆变换, 并且舍去高次项, 把分数阶微分系统(21) 变换成分数阶系统(28), 使得该系统仅包含线性项与三次项. 在计算与证明的过程中, 必须假设某些变换条件, 以确保变换能够成立.

注3.1 用类似的方法, 我们可以计算跨临界分岔及折叠分岔的规范形, 并且可以讨论规范形的等价性.

4 小结

本文, 我们讨论了分数阶微分系统的折叠分岔、跨临界分岔及音叉分岔等基本分岔的相图, 并且计算了这些分岔的规范形. 基于分数阶微分系统的 Lyapunov 方法, 讨论了这些基本分岔的分数阶微分系统的平衡点的稳定性, 也根据分数阶微分方程的比较定理讨论了在参数取某特殊值(通常取零)时解的性态, 由此得到分岔的相图. 然后应用在经典意义上的 Taylor 级数与隐函数定理, 计算了分数阶微分系统的规范形.

致谢: 本文在写作过程中, 得到了李常品教授的很多鼓励以及帮助, 在此特别表示感谢.

参考文献

- 1 Podlubny I. Fractional differential equations, mathematics in science and engineering, New York, Academic Press, 1999
- 2 El-sayed A M A. Linear differential equations of fractional order. *Applied Mathematics and Computation*. 1993, 15:1 ~12
- 3 Delboso D, Rodino L. Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equations. *Journal of Mathematics Analysis and Applications*. , 1996, 204:609 ~625
- 4 Stojanović M. Existence-uniqueness result for a nonlinear n-terms fractional equation. *Journal of Mathematics Analysis and Applications*, 2008, 353:244 ~255
- 5 Abakhami A, Gejji V. D. Existence of positive solutions of nonlinear fractional differential equation. *Journal of Mathematics Analysis and Applications*, 2003, 278:434 ~442
- 6 Li C P, Deng W H. Remarks on fractional derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 187: 777 ~784
- 7 Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, 2006
- 8 Baleanu D, Diethelm K, Scalas E, et al. Fractional calculus models and numerical methods. World Scientific, Singapore, 2009
- 9 Guy J. Modeling fractional stochastic systems as non-random fractional dynamics driven Brownian motions. *Applied Mathematical Modeling*, 2008, 32:836 ~859
- 10 Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, In: Computational Engineering in Systems and Application Multi-conference. IMACS, IEEE-SMC, Lille, France, 1996, 2: 963 ~968
- 11 Li C P, Zhao Z G. Asymptotical stability analysis of linear fractional differential systems. *Journal of Shanghai University*, 2009, 13:197 ~206
- 12 Deng W H, Li C P, Lü J H. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 48:409 ~416
- 13 Li Y, Chen Y Q, Podlubny I. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 2009, 45:1965 ~1969
- 14 Li Y, Chen Y Q, Podlubny I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, 59: 1810 ~1821
- 15 Khalil H K. Nonlinear systems (3rd ed.), Prentice Hall, 2002
- 16 Kuznetsov Y A. Elements of Applied Bifurcation Theory, New York: Springer-Verlag, 1998
- 17 Robinson R C. An introduction to dynamic systems: continuous and discrete, Beijing: China Machine Press, 2005
- 18 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dy-

- namical systems, and bifurcations of vector fields, New York: Springer-Verlag, 1983
- 19 俞业娟,王在华. 伪振子分析法的证明及其在高阶 Hopf 分岔中的应用. 动力学与控制学报,2012,10(3), 201~208 (Yu Yajuan, Wang Zaihua. Proof of the pseudo-oscillator analysis and its application in high-order Hopf bifurcation. *Journal of Dynamics and Control*, 2012,10(3), 201~208 (in Chinese))
- 20 张伟,冯志青,曹东兴. 航空发动机叶片非线性动力学分析. 动力学与控制学报,2012,10(3), 213~221 (Zhang Wei, Feng Zhiqing, Cao Dongxing. Analysis on nonlinear dynamics of the aero engine blade. *Journal of Dynamics and Control*, 2012,10(3), 213~221 (in Chinese))

ANALYSIS THE FUNDMENTAL BIFURCATIONS OF THE FRACTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH THE PARAMETERS^{*}

Qian Deliang^{1†} Chen Yangquan^{2,3}

(1. Department of Mathematics, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, China)

(2. Mechatronics, Embedded Systems and Automation (MESA) Lab, School of Engineering,
University of California, Merced, CA 95343-5200, USA)

(3. Department of Electrical and Computer Engineering, Utah State University, UT 84322-4120, USA)

Abstract This paper investigates the fundamental bifurcations for the fractional differential systems involving one parameter in the variable space. Applying the Lyapunov direct method to the fractional differential systems to prove the stability or the instability of the equilibria, the phase portraits of the bifurcations are obtained. With the help of the Taylor's expansion and the Implicit Function Theorem in the classical sense, the normal forms of the bifurcations of the fractional differential systems are calculated. By using the topological equivalent map which depend on one parameter, the topological normal forms of the bifurcations of the fractional differential systems are derived.

Key words fractional differential systems, caputo derivative, fold bifurcation, transcritical bifurcation, pitchfork bifurcation

Received 30 August 2012, revised 16 October 2012.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10872119), Natural Science Foundation of Henan Province of China (112300410022) and the Post-Doctor Foundation of China(2012M510885)

† Corresponding author E-mail: deliangqian@126.com