第 11 卷第 3 期 2013 年 9 月
1672-6553/2013/11(3)/199-4
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 11 No. 3
Sep 2013

Birkhoff 意义下 Hojman-Urrutia 方程的离散变分计算*

宋端[1] 刘世兴[2†]
(1.辽东学院影像物理教研室,丹东 118001)(2.辽宁大学物理学院,沈阳 110036)

摘要 在 Birkhoff 框架下,采用离散变分方法研究了非 Hamilton 系统-Hojman-Urrutia 方程的数值解法,并通过和传统的 Runge-Kutta 方法进行比较,说明了在 Birkhoff 框架下研究这类不具有简单辛结构的非 Hamilton 系统可以得到更可靠和精确的数值结果.

关键词 Birkhoff 方程, Hojman-Urrutia 方程, 非 Hamilton 系统, 离散变分计算

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-060

引言

Hamilton 系统具有简单的辛结构,自动满足自伴随性质,可以用来描述耗散可忽略的保守动力学系统,并在动力学系统的保结构算法研究中具有重要意义[1,2,3]. 但是对于本质非自伴随的动力学系统,在保持实验室可观测量或动力学函数物理意义不变的情况下,则不能表示为 Hamilton 系统. 虽然通过 Darboux 变换,可以实现简单的辛结构表示,但是此时的实验室可观测量或动力学函数已经失去了直接的物理意义,我们称这类不能表示为简单 Hamilton 方程的动力学系统为非 Hamilton 系统[4]. 对于非 Hamilton 系统,由于不具有简单的辛结构,Hamilton 系统的保辛算法已经不再适用,因此需要找到一种较理想的数值算法来数值求解这类非 Hamilton 系统的运动方程问题.

本文以 Hojman-Urrutia(H-U)方程[5-7] 为例,在 Birkhoff 意义下,将 H-U 方程表示为自治 Birkhoff 方程的形式,并采用离散变分方法,给出研究这类非 Hamilton 系统的数值积分子. 通过数值实验说明了在 Birkhoff 框架下研究非 Hamilton 系统的几何数值积分问题是合理和有效的,从而为非 Hamilton 系统的几何数值积分问题研究开辟了一条新的途径.

1 Hojman-Urrutia 方程的 Birkhoff 表示

Hojman 和 Urrutia 于 1981 年在 J. Math. Phys. 上发表了一篇文章,在该文中,他们给出了如下的方程[6,7]:

$$\ddot{x}+\dot{y}=0,\quad \ddot{y}+y=0 \tag{1}$$

称为 Hojman-Urrutia 方程. 该方程在关于 Lagrange 逆问题和 Hamilton 逆问题的研究以及 Birkhoff 力学的发展过程中起着重要的作用[7].

取如下初始条件:

$$x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=2,$$
$$y(0)=1,\quad \dot{y}(0)=1 \tag{2}$$

则方程(1)有如下的解析解:

$$x(t)=\sin(t)-\cos(t)+t+1$$
$$y(t)=\sin(t)+\cos(t) \tag{3}$$

方程(1)看似简单,却不能表示成 Lagrange 方程或 Hamilton 正则方程的形式,因此其是一个典型的非 Hamilton 系统问题,其一阶形式没有辛结构. 但是在 Birkhoff 力学框架下,该方程可以表示为满足自伴随条件的 Birkhoff 方程的形式,具有简单的辛结构. 如果取 $a^1=x, a^2=y, a^3=\dot{x}, a^4=\dot{y}$,利用 Hojman 方法可以构造该系统的 Birkhoff 表示[5,6]

$$R_1=a^2+a^3,$$
$$R_2=0,$$
$$R_3=a^4,$$
$$R_4=0$$
$$B=\frac{1}{2}[(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2] \tag{4}$$

对应的 Birkhoff 方程为:

2012-09-17 收到第 1 稿,2013-04-16 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11202090,11172120,10932002)
† 通讯作者 E-mail:liushixing@lnu.edu.cn

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{a}^1 \\ \dot{a}^2 \\ \dot{a}^3 \\ \dot{a}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a^3 \\ a^2 + a^3 \\ -a^4 \end{bmatrix} \tag{5}$$

从所得到的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组(4)可以看出,H-U 方程的 Birkhoff 表示方程(5)是自治 Birkhoff 方程.

2　离散自治 Birkhoff 方程和变分积分子

给定构型空间为 M^{2n},其坐标为 $\{a^\mu\}$ $(\mu = 1, \cdots, 2n)$,设自治 Birkhoff 函数 $B: M^{2n} \to R$ 和 Birkhoff 函数组 $R_\mu: M^{2n} \to R$,从而定义如下 Pfaff 作用量:

$$A = \int_{t_1}^{t2} P(a, \dot{a})\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t2} (R_\mu(a)\dot{a}^\mu - B(a))\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

这里 $P(a, \dot{a})$ 为 Pfaff 函数. 利用等时变分原理 $\delta A = 0$,并考虑端点条件 $\delta a(t_1) = \delta a(t_2) = 0$,可以得到如下自治 Birkhoff 方程[6,8]:

$$\left(\frac{\partial R_v(a)}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu(a)}{\partial a^v}\right)\dot{a}^v - \frac{\partial B(a)}{\partial a^\mu} = 0 \tag{7}$$

则由方程(7)所描述的系统被称为自治 Birkhoff 系统[8].

取离散空间为 $M \times M$,并取定时间步长 $h \in R$,定义离散 Pfaff 函数 $P_d: M \times M \times R \to R$,从而给出离散作用泛函为[9,10]:

$$A_d = \sum_{k=0}^{N-1} P_d(h, a_k, a_{k+1}) \tag{8}$$

利用离散变分计算 $\delta A_d = 0$,并考虑端点条件 $\delta a_0 = \delta a_N = 0$,则可以得到如下离散自治 Birkhoff 方程:

$$D_B P_d(a_k, a_{k+1}, h) = 0 \tag{9}$$

这里,D_B 为离散 Birkhoff 映射,写成坐标形式如下:

$$D_1 P_d(a_k, a_{k+1}, h) + D_2 P_d(a_{k-1}, a_k, h) = 0 \tag{10}$$

这里 $D_i P_d$ $(i = 1, 2)$ 表示对 P_d 中第 i 个变量的偏导数. 如果取

$$b_k = -D_1 P_d(a_k, a_{k+1}, h) \tag{11}$$

$$b_{k+1} = D_2 P_d(a_k, a_{k+1}, h) \tag{12}$$

作为中间变量,通过求解隐式方程(11)可以得到 a_{k+1},然后求解显式方程(12),则得到映射:$\hat{F}_{P_d}$: $(a_k, b_k) \to (a_{k+1}, b_{k+1})$,即给出系统随时间的演化. 可以证明,映射 $\hat{F}_{P_d}$ 保持离散 Birkhoff 辛形式[9],从而方程(11)和(12)给出了计算自治 Birkhoff 系统的 Birkhoff 辛积分子. 可以采用许多方法离散 Pfaff 函数,如中点格式,Verlet 方法,Runge-Kutta 方法等[11]. 本文采用 Euler 中点格式来离散 Pfaff 函数.

3　Hojman-Urrutia 方程的离散变分计算

由 H-U 方程的 Birkhoff 表示(4)式可以得到 H-U 方程所对应的 Pfaff 函数:

$$P = (a^2 + a^3)\dot{a}^1 + a^4\dot{a}^3 - \frac{1}{2}[(a^3)^2 + 2a^2a^3 - (a^4)^2] \tag{13}$$

从而利用 Euler 中点格式可以得到离散 Pfaff 函数:

$$\begin{aligned} P_d = \frac{h}{8}[&4(a_k^2 + a_{k+1}^2 + a_k^3 + a_{k+1}^3)\left(\frac{a_{k+1}^1 - a_k^1}{h}\right) + 4(a_k^4 + a_{k+1}^4)\left(\frac{a_{k+1}^3 - a_k^3}{h}\right) - \\ &(a_{k+1}^3 + a_k^3)^2 - 2(a_k^2 + a_{k+1}^2)(a_{k+1}^3 + a_k^3) - (a_{k+1}^4 + a_k^4)^2] \end{aligned} \tag{14}$$

利用(11)和(12)式可以得到如下表达式

$$\begin{aligned} b_k^1 &= \frac{1}{2}(a_k^2 + a_{k+1}^2 + a_k^3 + a_{k+1}^3) \\ b_k^2 &= -\frac{h}{4}\left[2\left(\frac{a_{k+1}^1 - a_k^1}{h}\right) - (a_{k+1}^3 + a_k^3)\right] \\ b_k^3 &= -\frac{h}{4}\left[\frac{2}{h}(a_{k+1}^1 - a_k^1 - a_k^4 - a_{k+1}^4) - a_{k+1}^3 - a_k^3 - a_k^2 - a_{k+1}^2\right] \\ b_k^4 &= -\frac{h}{4}\left[2\left(\frac{a_{k+1}^3 - a_k^3}{h}\right) - a_{k+1}^4 - a_k^4\right] \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} b_{k+1}^1 &= \frac{1}{2}(a_k^2 + a_{k+1}^2 + a_k^3 + a_{k+1}^3) \\ b_{k+1}^2 &= \frac{h}{4}\left[2\left(\frac{a_{k+1}^1 - a_k^1}{h}\right) - (a_{k+1}^3 + a_k^3)\right] \\ b_{k+1}^3 &= \frac{h}{4}\left[\frac{2}{h}(a_{k+1}^1 - a_k^1 + a_k^4 + a_{k+1}^4) - a_{k+1}^3 - a_k^3 - a_k^2 - a_{k+1}^2\right] \\ b_{k+1}^4 &= \frac{h}{4}\left[2\left(\frac{a_{k+1}^3 - a_k^3}{h}\right) - a_{k+1}^4 - a_k^4\right] \end{aligned} \tag{16}$$

从方程组(15)可以求解出 a_{k+1}^i $(i = 1, \cdots, 4)$,将其代入方程组(16),则得到 b_{k+1}^i $(i = 1, \cdots, 4)$,这样就得到了 Hojman-Urrutia 方程的数值解,从而得出系

统随时间的演化.

这里取时间步长 $h=0.0001$,在上面的初始条件(2)下,对 H-U 方程(1)采用 2 阶 Runge-Kutta 方法,对 H-U 方程对应的等价 Birkhoff 方程(4)采用本文所给的离散变分方法分别进行数值计算,并比较两种框架下所得结果的误差,如图 1 和图 2 所示.

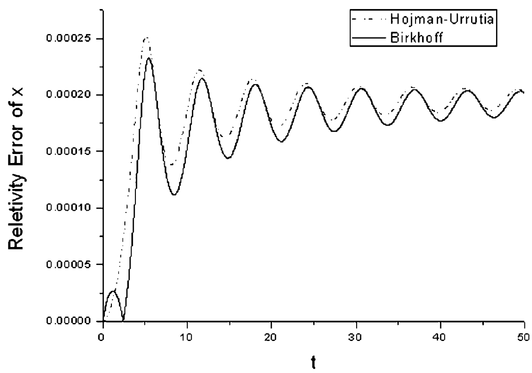

图 1　x 的相对误差

Fig. 1　The relative error of x

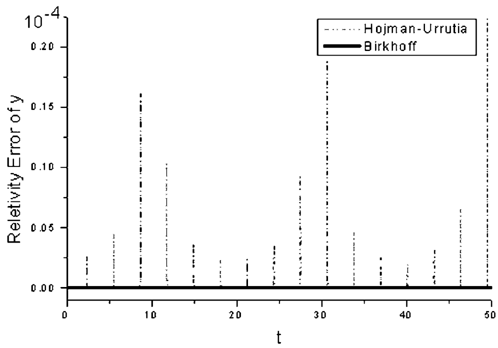

图 2　y 的相对误差

Fig. 2　The relative error of y

图 1 和图 2 分别表示计算所得的 x 和 y 的相对误差,实线表示在 Birkhoff 框架下采用离散变分方法算得的结果,而点线表示在原方程框架下采用 2 阶 R-K 方法算得的结果,从图中可以看出,在 Birkhoff 框架下,采用离散变分方法算得的数值误差更小,结果要优于在原方程框架下算得的结果.

4　结论

通过对 Hojman-Urrutia 方程的数值研究,说明在求解这类不能表示成 Hamilton 方程或 Lagrange 方程的非 Hamilton 系统的数值解时,为了得到更好的数值结果,可以将该系统的运动方程转化为具有自伴随特性的 Birkhoff 方程的形式,从而在 Birkhoff 框架下研究非 Hamilton 系统的数值积分问题,以得到更加可靠、精确的数值结果.

参　考　文　献

1　冯康,秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法. 杭州:浙江科学技术出版社,2003(Feng K, Qin M Z. Symplectic geometric algorithms for hamiltonian systems. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2003 (in Chinese))

2　Hairer E, Lubich C, Wanner G. Geometric numerical integration structure-preserving algorithms for ordinary differential equations. Springer, 2002

3　高强,钟万勰. Hamilton 系统的保辛守恒积分算法. 动力学与控制学报,2009,7(3):193~199(Gao Q, Zhong W X. The symplectic and energy preserving method for the integration of hamilton system. *Jouranal of Dynamics and Control*, 2009,7(3):193~199)

4　刘畅,宋端,刘世兴,郭永新. 非齐次 Hamilton 系统的 Birkhoff 表示. 中国科学:物理学、力学、天文学,2013,43(3):541~548(Liu C, Song D, Liu S X, Guo Y X. Birkhoffian representation of non-homogenous Hamiltonian systems. *Scientia Sinica Physica, Mechanica and Astronomica*, 2013, 43(3):541~548(in Chinese))

5　梅凤翔,刘瑞,罗勇. 高等分析力学. 北京:北京理工大学出版社, 1991 (Mei F X, Liu D, Luo Y. Advanced analytical mechanics. Beijing : Beijing Institute of Technology Press, 1991 (in Chinese))

6　梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff 系统动力学. 北京:北京理工大学出版,1996 (Mei F X, Shi R C, Zhang Y F and Wu H B. Dynamics of birkhoff systems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996 (in Chinese))

7　梅凤翔. 关于 Whittaker 方程和 Hojman-Urrutia 方程. 力学与实践. 2012,34:62~63(Mei F X. About whittaker equation and Hojman-Urrutia equation. *Mechanics in Engineering*, 2012, 34:62~63(in Chinese))

8　Santilli R M . Foundations of theoretical mechanics Ⅱ: Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics. New York: Spring-verlag, 1983

9　Liu S X, Liu C, Guo Y X. Geometric formulations and variational integrators of discrete autonomous Birkhoff systems. *Chinese Physics B*, 2011, 20(3):034501

10　刘世兴,刘畅,郭永新. Birkhoff 意义下 Henon-Heiles 方程的离散变分计算. 物理学报,2011(6):060000(Liu S

X, Liu C, Guo Y X. Discrete variational calculation of Henon-Heiles equation in the Birkhoffian sense. *Acta Physica Sinica*, 2011,60(6):060000(in Chinese))

11 Marsden J E, West M. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 2001, 357～514

DISCRETE VARIATIONAL CALCULATION OF HOJMAN-URRUTIA EQUATION IN THE BIRKHOFFIAN SENSE *

Song Duan[1] Liu Shixing[2†] Guo Yongxin[1,2]

(1. *Eastern Liaoning University*, *Physics of medical imaging department*, *dandong* 118001, *China*)

(2. *College of Physics*, *Liaoning University*, *Shenyang* 110036, *China*)

Abstract By using the discrete variatonal method in the framework of Birkhoffian systems, this paper researched the numerical algorithms of Hojman-Urrutia equation, which is a non-Hamiltonian system. Compared with Runge-Kutta method, the numerical results show that the more reliable and accurate numerical results can be obtained when the non-Hamilton systems that have not simple symplectic structure are studied in the Birkhoffian sense.

Key words Birkhoff's equations, Hojman-Urrutia equation, non－Hamilton system, discrete variational methods

Received 17 September 2012, revised 16 April 2013.

* The Project supported by the National Natural Science Foundation of China (11202090, 11172120, 10932002)

† Corresponding author E-mail: liushixing@lnu.edu.cn