

基于滑模控制的 3D 刚体摆姿态稳定性*

邹奎^{1,2†} 戈新生²

(1. 北京信息科技大学自动化学院, 北京 100192) (2. 北京信息科技大学机电工程学院, 北京 100192)

摘要 研究 3D 刚体摆姿态稳定性的滑模控制问题. 3D 刚体摆由一个刚体绕一固定且无摩擦的支点旋转, 刚体受到恒重力作用且具有三个转动自由度. 针对 3D 刚体摆平衡位置处的姿态稳定控制问题, 设计了滑模控制器并分析了角速度和姿态的渐进稳定性. 由 Lyapunov 直接法找出了各个滑模系数取值的充分条件, 并通过数值仿真实验验证了滑模控制方法的有效性.

关键词 3D 刚体摆, 姿态稳定, 滑模控制

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-017

引言

3D 刚体摆由一个刚体绕一固定且无摩擦的支点旋转, 刚体受到恒重力作用且具有三个转动自由度. 它由美国密西根大学航空和航天工程系 Mc-Clamroch 教授所领导的小组在研究三轴姿态控制平台 (TACT) 的过程中逐渐演变而来^[1-3], 并于 2004 年首次提出三自由度旋转摆 (3D 刚体摆) 模型的概念^[4]. 3D 刚体摆模型为非线性动力学的研究以及近年来非线性控制的研究提供了丰富的实例来源, 是一类广义的刚体摆模型. 由于 3D 刚体摆姿态运动呈复杂的非线性使得其姿态控制具有很大的难度, 同时也是一项重大的挑战. 在 3D 刚体摆姿态控制的稳定性研究中, Shen 和 Chaturvedi 等利用 Euler 姿态角建立了 3D 刚体摆数学模型, 且提出了约化姿态模型^[4-5]; Chaturvedi、Bacconi 等采用角速度反馈和角速度及姿态联合反馈方法分别对 3D 刚体摆设计了倒立和悬垂平衡状态的姿态控制器^[6-9].

近年来, 滑模控制方法得到深入研究^[10], 滑模控制方法与其他控制方法不同之处在于, 系统的“结构”不固定, 根据系统当前状态, 按照预定的“滑动模态”状态轨迹运动. 针对 3D 刚体摆平衡位置处的姿态稳定控制问题, 本文设计了滑模控制器. 滑动平面由角速度和姿态构成, 在保证滑动平

面渐进稳定的前提下, 本文分析了角速度和姿态的渐进稳定性, 并通过 Lyapunov 直接法找出了控制律中各个滑模系数取值的充分条件.

1 3D 刚体摆的数学模型

3D 刚体摆绕一固定且无摩擦的支撑点进行三自由度旋转, 它受到恒重力的作用, 其约化姿态数学模型如下^[3,5]

$$J\dot{\omega} = J\omega \times \omega + mg\rho \times \Gamma + u \quad (1)$$

$$\dot{\Gamma} = \Gamma \times \omega \quad (2)$$

式(1)为 3D 刚体摆动力学方程, 式(2)为姿态运动学方程. 其中 $J = \text{diag}(J_i)$ ($i = 1, 2, 3$) 是 3D 刚体摆的惯量矩阵, m 是 3D 刚体摆的总质量, g 为重力加速度, $\rho = (0, 0, l)^T$ 是 3D 刚体摆原点与质心连线构成的向量 (l 为原点与质心之间的距离); $\omega \in R^3$ 是 3D 刚体摆的角速度矢量; Γ 是约化姿态矢量, 即重力方向的单位矢量在连体坐标系中的描述; $u \in R^3$ 是输入控制力矩; 所有变量都定义在连体坐标系中. 对于向量 a 和 $b \in R^3$, 叉乘符号 $a \times b$ 表示为

$$a \times b = \hat{a}b \quad (3)$$

其中斜对称矩阵 \hat{a} 定义为

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

2012-06-16 收到第 1 稿, 2012-07-11 收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (11072038) 和北京市自然科学基金重点项目 B 类 (KZ201110772039) 资助

† 通讯作者 E-mail: zoukui871105@163.com

3D刚体摆平衡状态为 $\omega_e(0,0,0)^T, \Gamma_e(0,0, \pm 1)^T$ ^[5]. 如果3D刚体摆达到平衡状态时质心位于支点的上方,此平衡状态为倒立平衡即 $\Gamma_i = (0,0, -1)^T$;如果质心位于支点的下方,此平衡状态为悬垂平衡即 $\Gamma_h = (0,0,1)^T$. 控制的目标就是设计控制器使3D刚体摆稳定在倒立或悬垂平衡的状态.

2 滑模控制器的设计

选择滑动平面如下

$$S = \omega + c(\Gamma \times \Gamma_e) \quad (4)$$

其中 $c = \text{diag}(c_i)$ (且 $c_i > 0, i = 1, 2, 3$)为滑模系数. 在理想情形,当系统进入滑动模运动后,由于系统的状态轨线保持在其上面即满足 $S = 0$,于是系统在此切换流行上应满足

$$\dot{S} = 0 \quad (5)$$

即

$$\dot{S} = \dot{\omega} + c(\dot{\Gamma} \times \Gamma_e) = J^{-1}(J\omega \times \omega + mg\rho \times \Gamma + u_{eq}) + c(\Gamma \times \omega \times \Gamma_e) = 0$$

可以求得系统的等效控制分量为

$$u_{eq} = J\omega \times \omega + mg\rho \times \Gamma + Jc(\Gamma \times \omega) \times \Gamma_e \quad (6)$$

为了满足滑动模的达到条件 $s^T \dot{s} < 0$,选择指数趋近律

$$\dot{S} = -kS - \eta \text{sgn}(S) \quad (7)$$

其中 $k = \text{diag}(k_i)$ 和 $\eta = \text{diag}(\eta_i)$ 为达到系数($k_i > 0, \eta_i > 0, i = 1, 2, 3$), sgn 为符号函数. 由此可以求得系统的切换控制分量

$$u_{sw} = -JkS - J\eta \text{sgn}(S) \quad (8)$$

于是总的控制量为

$$u = u_{eq} + u_{sw} = J\omega \times \omega + mg\rho \times \Gamma + Jc(\Gamma \times \omega) \times \Gamma_e - JkS - J\eta \text{sgn}(S) \quad (9)$$

3 稳定性分析

定理:考虑3D刚体摆姿态系统(1)和(2),选用滑动平面式(4)和控制律式(9),角速度和约化姿态渐进稳定的一个充分条件为

$$k_1 \geq \frac{1}{4c_1} \text{和} k_2 \geq \frac{1}{4c_2}$$

证明:由式(4)可知

$$\omega = S - c(\Gamma \times \Gamma_e)$$

带入3D刚体摆姿态运动学方程式(2)中,可得

$$\dot{\Gamma} = \Gamma \times (S - c(\Gamma \times \Gamma_e)) \quad (10)$$

不妨假设 $\Gamma_e = \Gamma_i = (0,0,-1)^T$,即倒立平衡情形.

式(10)展开为分量的形式为

$$\dot{\Gamma}_1 = c_2\Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_3S_2 + \Gamma_2S_3$$

$$\dot{\Gamma}_2 = c_1\Gamma_2\Gamma_3 - \Gamma_1S_3 + \Gamma_3S_1$$

$$\dot{\Gamma}_3 = -c_1\Gamma_1^2 - c_2\Gamma_1^2 - \Gamma_2S_1 + \Gamma_1S_2$$

易知 $\Gamma_1\dot{\Gamma}_1 + \Gamma_2\dot{\Gamma}_2 + \Gamma_3\dot{\Gamma}_3 = 0$. 此时选择 D 域为

$$D = \{\Gamma \in \mathbb{R}^2 \mid \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + (\Gamma_3 + 1)^2 < 2\}$$

D 为3D刚体摆系统的一个不变集,内部仅仅包含一个平衡点. 定义Lyapunov函数为

$$V = \frac{1}{2}\Gamma_1^2 + \frac{1}{2}\Gamma_2^2 + \frac{1}{2}(\Gamma_3 + 1)^2 + \frac{1}{2}S_1^2 + \frac{1}{2}S_2^2 + \frac{1}{2}S_3^2 \quad (11)$$

V 函数为一个正定的函数,其对时间导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \Gamma_1\dot{\Gamma}_1 + \Gamma_2\dot{\Gamma}_2 + (\Gamma_3 + 1)\dot{\Gamma}_3 + \\ &S_1\dot{S}_1 + S_2\dot{S}_2 + S_3\dot{S}_3 = -c_1\Gamma_2^2 - \\ &c_2\Gamma_1^2 - \Gamma_2S_1 + \Gamma_1S_2 - \sum_{i=1}^3 (k_i S_i^2 + \\ &\eta_i |S_i|) = -c_1(\Gamma_2 + \frac{1}{2c_1}S_1)^2 - (k_1 - \\ &\frac{1}{4c_1})S_1^2 - c_2(\Gamma_1 - \frac{1}{2c_2})S_1 - \\ &(k_2 - \frac{1}{4c_2})S_2^2 - k_3S_3^2 - \sum_{i=1}^3 \eta_i |S_i| \end{aligned}$$

于是当 $k_1 \geq \frac{1}{4c_1}, k_2 \geq \frac{1}{4c_2}$ 时, $\frac{dV}{dt} \leq 0$.

根据LaSalle不变集原理, D 是一个不变集合,在 D 内定义的 $V > 0$ 且满足 $\frac{dV}{dt} \leq 0$,又由于在 D 域内仅仅包含一个平衡点,即说明了当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $S \rightarrow (0,0,0)^T$ 且 $\Gamma \rightarrow \Gamma_i$,又根据式(4)知当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $\omega \rightarrow (0,0,0)^T$. 故角速度和姿态均是渐进稳定的(悬垂平衡时证明方法类似). 证毕.

4 仿真实验及分析

4.1 悬垂平衡

选取3D刚体摆的质量 $m = 140\text{kg}$,惯量矩阵 $J = \text{diag}(40, 45, 50)\text{kg} \cdot \text{m}^2, l = 0.5\text{m}$. 悬垂平衡时,选取控制律(9)中的各个参数分别为: $c_1 = 2, c_2 = 2, c_3 = 2, k = 0.5, \eta = 0.01$,初始值始角速度和约化姿态的取值分别为: $\omega_0 = (1, -2, 3)^T \text{rad/s}$ 和 $\Gamma_0 = (0.8, -0.6, 0)^T$,悬垂平衡状态 $\Gamma_h(0,0,1)^T$. 仿真结果如图1~3所示.

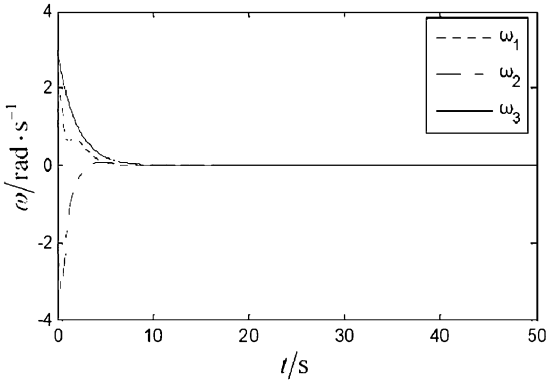


图1 3D 刚体摆悬挂平衡时角速度变化曲线
Fig. 1 Evolution of the angle velocity of hanging equilibrium of 3D rigid pendulum

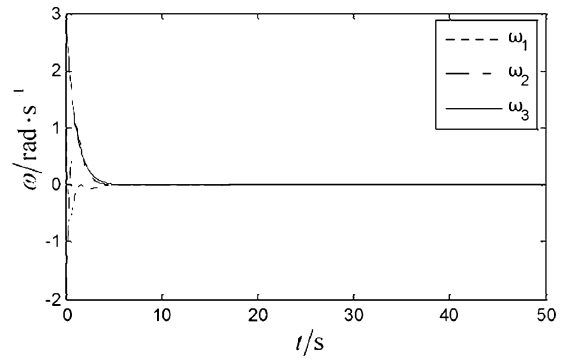


图4 3D 刚体摆倒立平衡时角速度变化曲线
Fig. 4 Evolution of the angle velocity of inverted equilibrium of 3D rigid pendulum

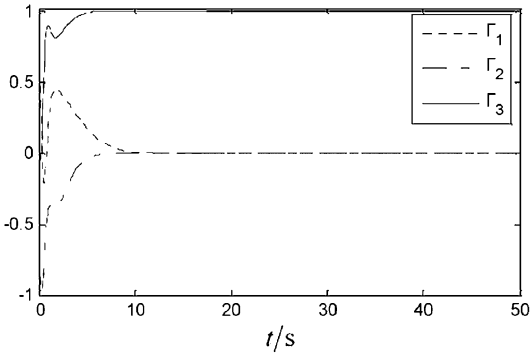


图2 3D 刚体摆悬挂平衡时约化姿态变化曲线
Fig. 2 Evolution of the reduced attitude of hanging equilibrium of 3D rigid pendulum

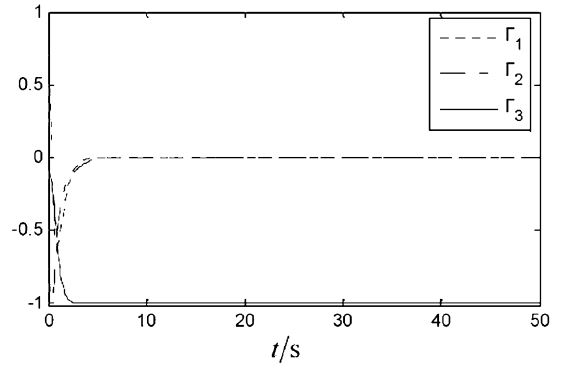


图5 3D 刚体摆倒立平衡时约化姿态变化曲线
Fig. 5 Evolution of the reduced attitude of inverted equilibrium of 3D rigid pendulum

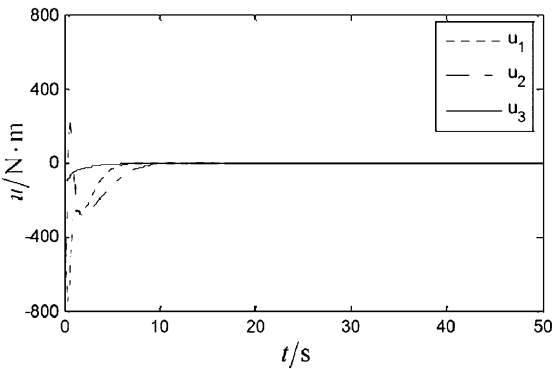


图3 3D 刚体摆悬挂平衡时控制输入
Fig. 3 Input control moment of hanging equilibrium of 3D rigid pendulum

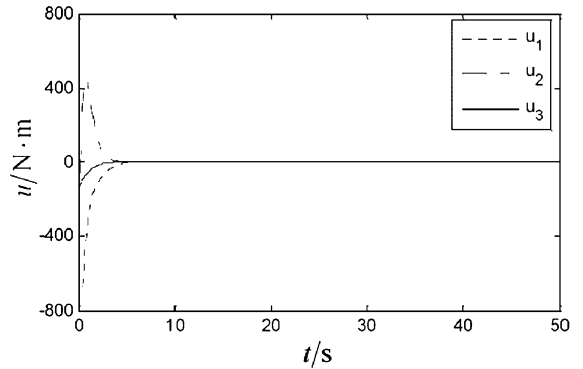


图6 3D 刚体摆倒立平衡时控制输入
Fig. 6 The input control moment of inverted equilibrium of 3D rigid pendulum

4.2 倒立平衡

选取控制律中的各个参数分别为： $c_1 = 2, c_2 = 2, c_3 = 2, k = 1, \eta = 0.01$, 初始值始角速度和约化姿态分别为 $\omega_0 = (1, -2, 3)^T \text{ rad/s}$ 和 $\Gamma_0 = (0.8, -0.6, 0)^T$, 倒立平衡状态 $\Gamma_i = (0, 0, -1)^T$. 仿真结果如图4~6所示.

5 结论

本文针对3D刚体摆平衡位置处的姿态稳定控制问题,设计了滑模控制器并分析了角速度和姿态的渐进稳定性. 由Lyapunov直接法找出了各个滑模系数取值的充分条件,并通过数值仿真实验验证了滑模控制方法的有效性. 和文献[8]中提出的

控制律相比,该滑模控制器具有设计非常简单的优点,同时也具有良好的动静态性能。

参 考 文 献

- 1 Cho S, Shen J, McClamroch N H, et al. Equations of motion of the triaxial attitude control testbed. Proceedings of 40th IEEE Conference on Decision & Control, Orlando, 2001, 4: 3429 ~ 3434
- 2 Cho S, Shen J, McClamroch N H. Mathematical models for the triaxial attitude control testbed. *Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems*, 2003, 9(2): 165 ~ 192
- 3 Shen J, McClamroch N H, Bloch A M. Local equilibrium controllability of the triaxial attitude control testbed. Proceedings of 41st Conference on Decision and Control, 2002: 528 ~ 533
- 4 Shen J, Sanyal, A K, Chaturvedi, N A, et al. Dynamics and control of a 3D pendulum. Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision & Control, Bahamas, 2004: 323 ~ 328
- 5 Chaturvedi N A, Lee T, Leok M, et al. Nonlinear dynamic of the 3D pendulum. *Journal of Nonlinear Science*, 2011, 21(1): 3 ~ 32
- 6 Chaturvedi, N A, Bacconi F, Bernstein D S, et al. Stabilization of a 3D axially symmetric rigid pendulum. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision & Control, Ann Arbor, 2005: 5287 ~ 5292
- 7 Bacconi F. Spacecraft attitude dynamics and control. Florence: Florence university, 2005 ~ 2006
- 8 Chaturvedi N A, Bacconi F, Sanyal A K, et al. Stabilization of a 3D rigid pendulum. Proceedings of the American Control Conference, Ann Arbor, 2005: 3030 ~ 3035
- 9 Chaturvedi N A, McClamroch N H. Asymptotic stabilization of the Hanging equilibrium manifold of the 3D pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17: 1235 ~ 1454
- 10 刘金琨,孙富春.滑模变结构控制理论及其算法研究与进展. *控制理论与应用*, 2007, 24(3): 407 ~ 418 (Liu J K, Sun F C. Research and development on theory and algorithms of sliding mode control. *Control Theory and Applications*, 2007, 24(3): 407 ~ 418 (in Chinese))

ATTITUDE STABILIZATION OF 3D RIGID PENDULUM WITH SLIDING MODE CONTROL *

Zou Kui^{1,2†} Ge Xincheng²

(1. The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics, Beijing 100192, China)

(2. School of Mechanical Engineering, Beijing Information Science & Technology University, Beijing 100192, China)

Abstract This paper studied the attitude stabilization of a 3D rigid pendulum with sliding mode control method. The 3D rigid pendulum consists of a rigid body supported by a fixed and frictionless pivot with three rotational degrees, acted on by a constant gravitational force. Considering the attitude control of the 3D rigid pendulum at equilibrium position, this paper has designed a sliding mode controller and analyzed the asymptotic stability of angle velocity and attitude. Then the sufficient conditions of the sliding parameters were gained according to the Lyapunov direct method, and numerical simulation results show the validity of the controller.

Key words 3D rigid pendulum, attitude control, sliding mode control

Received 16 June 2012, revised 11 July 2012.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 11072038) and The Municipal key programs of Natural Science Foundation of Beijing, China (Class B, KZ201110772039)

† Corresponding author E-mail: zoukui871105@163.com