

一种岔路口分流交通流格子模型的孤立波分析*

杜勇¹ 化存才^{2†} 郑治波³ 袁娜²

(1. 武警后勤学院数学教研室, 天津 300162) (2. 云南师范大学数学学院, 昆明 650092)

(3. 保山学院数学学院, 保山 678000)

摘要 建立了道路岔路口处车辆分流时的一种流体力学格子模型. 推导出了该模型的线性稳定性条件. 通过非线性稳定性分析得到 MKdV 方程, 进而可用 MKdV 方程的扭结-反扭结解去描述交通阻塞现象. 结果显示: 主干道车辆换道率的增加能够使共存曲线下降, 从而起到提高主干道车流的稳定性的作用.

关键词 交通流格子模型, 岔路口, 分流, MKdV 方程, 孤立波

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-034

引言

目前, 城市交通问题越来越多地引起了人们的关注. 有许多方法可以用来描述交通流问题的主要特性. 人们在研究交通流的动力学模型中发现, 在处于自由流和阻塞流之间的交通流中存在着阻塞转移的现象, 并且, 在现实的交通中确实存在着这种现象. 这种阻塞转移与传统的相变是非常地相似.

通常, 对于阻塞转移的研究方法主要是通过计算机模拟. 后来, 有一些学者运用非线性分析的方法对它进行了研究. 如 Kurtze 和 Hong 从交通流的流体力学模型中就推导出了 KdV 方程^[1], 他们展示了在中性稳定性曲线附近出现的孤立子. Komatsu 和 Sasa 在车辆跟驰模型中推导出了 MKdV 方程, 他们通过在临界点周围出现的扭结-反扭结的密度波来描述交通阻塞现象^[2]. 同时, 在扩展模型^[3]和差分方程模型^[4]中也可推导出 MKdV 方程.

Nagatani 在车辆跟驰模型中推导出了依赖于时间的 Ginzburg-Landau (TDGL) 方程, 并且提出了阻塞转移现象的热力学公式^[5]. Nagatani 指出, 通过相位转移及临界现象这样的热力学术语能够描述交通流中出现的阻塞转移情况. 自由流和阻塞流可分别地对应于传统气体液体阶段转移中的气体阶段流与液体阶段流. 车流密度对应于密度, 而敏感系数(延迟时间的倒数)则对应于温度. TDGL 方

程可以由带有特定摄动项的 MKdV 方程导出.

T. Nagatani 的关于时间连续, 空间离散的单车道格子流体力学模型如下^[5]:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_j + \rho_0 (\rho_j v_j - \rho_{j-1} v_{j-1}) = 0, \\ \rho_j(t + \tau) v_j(t + \tau) = \rho_0 V(\rho_{j+1}(t)), \end{cases} \quad (1)$$

其中, 优化速度函数为

$$V(\rho) = \tanh\left(\frac{2}{\rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_c}\right) + \tanh\left(\frac{1}{\rho_c}\right). \quad (2)$$

其中, j 表示一维格子的 j 点, ρ_j , v_j 分别表示 j 点处 t 时刻的车流密度和速度, ρ_0 为平均密度, τ 为时间步长, 空间步长为平均车头距 $1/\rho_0$. 通过模型 (1), 作者导出了关于阻塞转移的 TDGL 方程和 MKdV 方程^[5].

以上的研究主要针对无进出车流的单车道模型和可以相互换道的双车道模型进行非线性特性分析^[6-7], 没有涉及车道有流出情况的交通现象. 受模型 (1) 的启发, 并结合两车道交通流模型^[8-11]的思想, 在本文中建立能够描述岔路口分流情形时的连续交通流模型的格子模型, 借鉴文献 [5] 关于 (1) 的推导方法, 并运用约化摄动法分析模型的非线性特性, 导出了 MKdV 方程. 进而, 用孤立波解释车辆在岔路口处的阻塞现象.

1 岔路口分流的交通流流体力学格子模型

考虑如图 1 所示的岔路口分流情形, 把连续性

2012-07-08 收到第 1 稿, 2013-03-26 收到修改稿.

* 国家自然科学基金项目 (11162020) 资助

† 通讯作者 E-mail: cuncai-hua@139.com

方程的等号右侧替换成与密度有关的流量,则提出以下格子模型:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_j + \rho_0 (\rho_j v_j - \rho_{j-1} v_{j-1}) = \\ - \gamma \rho_0^2 V'(\rho_0) (\rho_j - \rho_{j+1}), \\ \rho_j(t + \tau) v_j(t + \tau) = \rho_0 V(\rho_{j+1}(t)), \end{cases} \quad (3)$$

其中延迟时间 τ 作为时间步长,意味着当交通流变化时达到优化流量 $\rho_0 V(\rho_{j+1}(t))$ 所需要的时间. 在位置 j 处,时刻 t 时的流量 $\rho_j v_j$ 需要在 $j+1$ 处, $t - \tau$ 时的优化流量 $\rho_0 V(\rho_{j+1}(t - \tau))$ 来调整. 为了体现分流的情形,我们假设在模型中始终有 $\rho_j \geq \rho_{j+1}$,即从主干道处分出的流量 $\gamma \rho_0^2 V'(\rho_0) (\rho_j - \rho_{j+1}) > 0$,其中常数 γ 为车辆的转道率.

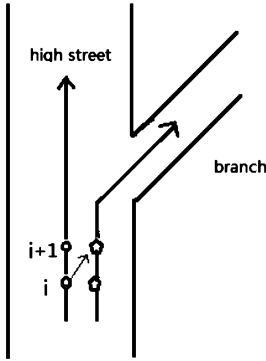


图1 车辆分流示意图
Fig. 1 The diagram of car split-flow

通过化简方程(3),我们得到如下的密度方程模型:

$$\partial_t \rho(t + \tau) + \rho_0^2 (V(\rho_{j+1}(t)) - V(\rho_j(t))) + \gamma \rho_0^2 V'(\rho_0) (\rho_j(t + \tau) - \rho_{j+1}(t + \tau)) = 0. \quad (4)$$

2 稳定性分析

2.1 线性稳定性分析

考虑均匀交通流的稳定性. 定义密度为常数 ρ_0 , 速度为常数 $V(\rho_0)$ 时的交通流为均匀交通流. 模型(4)在均匀流时的解为:

$$\rho_j(t) = \rho_0, \quad v_j(t) = V(\rho_0). \quad (5)$$

令 $y_j(t)$ 为均匀稳定流的小扰动,则有 $\rho_j(t) = \rho_0 + y_j(t)$. 然后,代入(4)后得到(4)在线性化之后的方程为:

$$\partial_t y_j(t + \tau) + \rho_0^2 V'(\rho_0) (y_{j+1}(t) - y_j(t)) + \gamma \rho_0^2 V'(\rho_0) (y_j(t + \tau) - y_{j+1}(t + \tau)) = 0, \quad (6)$$

其中, $V'(\rho_0) = dV(\rho) / d\rho |_{\rho=\rho_0}$.

通过展开 $y_j(t) \propto \exp(ikj + zt)$, 得到关于 z 的

如下方程:

$$ze^{z\tau} + \rho_0^2 V'(e^{ik} - 1) - \gamma \rho_0^2 V' e^{z\tau} (e^{ik} - 1) = 0, \quad (7)$$

再展开 $z = z_1(ik) + z_2(ik)^2 + \dots$, 代入上式,得到的一阶和二阶系数:

$$\begin{aligned} z_1 &= -(1 - \lambda) \rho_0^2 V', \\ z_2 &= -(1 - \lambda) \tau (\rho_0^2 V')^2 - \frac{1 - \lambda}{2} \rho_0^2 V'. \end{aligned} \quad (8)$$

如果 z_2 是负值,那么这种均匀稳定的交通流在长波模式下就是不稳定的. 当 z_2 为正值时,均匀流是稳定的. 所以,中性稳定性的条件为 $z_2 = 0$, 此时有

$$\tau = -\frac{1}{2\rho_0^2 V'}. \quad (9)$$

对于长波模式下的小扰动情形,在满足下列条件时,均匀流是不稳定的:

$$\tau > -\frac{1}{2\rho_0^2 V'}. \quad (10)$$

优化速度的导数 $V'(\rho_0)$ 当 $\rho_0 = \rho_c$ (ρ_c 为临界密度) 时取到最小值. 因此,如果 $\tau < \tau_c$ ($\tau_c = -\frac{1}{2\rho_c^2 V'}$), 那么均匀流在不考虑密度的情况下往往是稳定的. 我们发现 $\rho = \rho_c, \tau = \tau_c$ 为临界点. 当 $\gamma = 0$ 时,临界点与中性稳定性曲线对应的单车道的交通流是一致的.

2.2 非线性稳定分析

运用约化摄动法进行非线性分析,考虑粗颗粒下的长波模式. 描述长波模式的最简单的方法就是长波展开. 因在临界点 (ρ_c, τ_c) 附近的长波变化较慢,故当 $0 < \varepsilon \leq 1$ 时,定义慢变量:

$$X = \varepsilon(j + bt), \quad T = \varepsilon^3 t, \quad (11)$$

其中 b 为常数. 定义密度:

$$\rho_j(t) = \rho_c + \varepsilon R(X, T), \quad (12)$$

把(11), (12)代入(4)中,展开到 ε 的5次幂,则得到如下的偏微分方程:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 [b + (1 - \gamma) \rho_c^2 V'] \partial_X R + \varepsilon^3 [b^2 \tau + \frac{\rho_c^2 V'}{2} - \\ &\frac{(1 + 2b\tau) \gamma \rho_c^2 V'}{2}] \partial_X^2 R + \varepsilon^4 [\partial_T R + [\frac{b^3 \tau^2}{2} + \\ &\frac{\rho_c^2 V'}{6} - \frac{\gamma \rho_c^2 V' (1 + 3b\tau + 3b^2 \tau^2)}{6}] \partial_X^3 R + \\ &\frac{\rho_c^2 V'''}{6} \partial_X R^3] + \varepsilon^5 ((2b\tau - \tau \gamma \rho_c^2 V') \partial_T \partial_X R + \\ &[\frac{b^4 \tau^3}{6} + \frac{\rho_c^2 V'}{6} - \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma\rho_c^2 V'(1+4b\tau+6b^2\tau^2+4b^3\tau^3)}{24}] \partial_X^4 R + \frac{\rho_c^2 V'}{12} \partial_X^2 R^3 = 0, \quad (13)$$

其中,

$$V' = \frac{dV(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_c}, \quad V''' = \frac{d^3V(\rho)}{d\rho^3} \Big|_{\rho=\rho_c}.$$

令 $b = -(1-\gamma)\rho_c^2 V'$, 则可以消去 ε^2 项, 因而在临界点 τ_c 周围, 有

$$\frac{\tau}{\tau_c} = 1 + \varepsilon^2, \quad (14)$$

$$\tau_c = -\frac{1}{2\rho_0^2 V'}. \quad (15)$$

(13)可化为如下方程:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 (\partial_T R + \frac{3\gamma^3 - 4\gamma + 1}{24} (-\rho_c^2 V') \partial_X^3 R + \frac{\rho_c^2 V'''}{6} \partial_X R^3) + \varepsilon^5 (\frac{-(1-\lambda)}{2} (-\rho_c^2 V') \partial_X^2 R + \frac{-\gamma^3 + 3\gamma^2 - 3\gamma + 1}{48} (-\rho_c^2 V') \partial_X^4 R - \frac{1-\gamma}{12} \rho_c^2 V' \partial_X^2 R^3) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

做如下变换:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{3\gamma^3 - 4\gamma + 1}{24} (-\rho_c^2 V'), \\ R &= \left[\frac{-(3\gamma^3 - 4\gamma + 1)\rho_c^2 V'}{48} \right]^{\frac{1}{2}} R'. \end{aligned} \quad (17)$$

得到(16)的规范化方程为:

$$\begin{aligned} \partial_{T'} R' &= \partial_X^3 R' - \partial_X R'^3 - \varepsilon \left[-\frac{12}{3\gamma-1} \partial_X^2 R' - \frac{(\gamma-1)^2}{2(3\gamma-1)} \partial_X^4 R' - \frac{1-\gamma}{2} \partial_X^2 R'^3 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

如果忽略(18)中的 $O(\varepsilon)$ 项, 它就是 MKdV 方程, 且有如下扭结孤立波解:

$$R'_0(X, T') = \sqrt{c} \tanh \sqrt{\frac{c}{2}} (X - cT'). \quad (19)$$

基于 $R'(X, T') = R'_0(X, T') + \varepsilon R'_1(X, T')$, 需要正确地考虑 $O(\varepsilon)$. 为了选择扭结解(19)中的传播速度 c 的值, 需要满足如下可解性条件:

$$(R'_0, M[R'_0]) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dX R'_0 M[R'_0] = 0 \quad (20)$$

其中,

$$\begin{aligned} M[R'_0] &= -\frac{12}{3\gamma-1} \partial_X^2 R'_0 + \frac{-(\gamma-1)^2}{2(3\gamma-1)} \partial_X^4 R'_0 - \frac{1-\gamma}{2} \partial_X^2 R'_0{}^3. \end{aligned} \quad (21)$$

通过积分(20), 并利用已有方法^[12-13], 得到:

$$c = \frac{120}{11\gamma^2 - 16\gamma + 5}, \quad (22)$$

于是把(22)和(17)代入(19)中得到方程(16)的解:

$$\begin{aligned} R(X, T) &= \sqrt{\frac{(3\gamma^2 - 4\gamma + 1)(-\rho_c^2 V')c}{4\rho_c^2 V'''}} \times \\ &\quad \tanh \sqrt{\frac{c}{2}} \left(X - \frac{(3\gamma^2 - 4\gamma + 1)(-\rho_c^2 V')}{24} T \right). \end{aligned}$$

采用优化速度(2), 并令 $-\rho_c^2 V' = 1, \rho_c^6 V''' = 2$, 则可知扭结解的振幅 A 为

$$A = \rho_c^2 \sqrt{\frac{15(3\gamma-1)}{11\gamma-5} \left(\frac{a_c}{a} - 1 \right)}, \quad (23)$$

$$a_c = \tau_c^{-1} = 2(-\rho_c^2 V') = 2$$

因为扭结解代表着共生相, 所以它既包含低密度自由流相位也包含高密度的阻塞相位, 分别用 $\rho = \rho_c - A, \rho = \rho_c + A$ 表示. 在坐标系 (ρ, a) 下得到的相图如图2所示, 图中 ρ 为密度, a 为敏感系数.

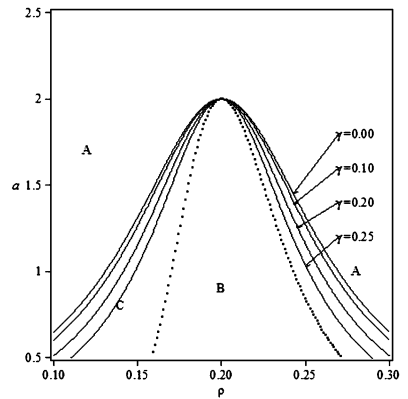


图2 密度-敏感度相图

Fig. 2 The phase diagram on (ρ, a) -plane

在图2中展现了共存曲线与中性稳定性曲线, 分别用实线与虚线表示. 共存曲线之外的 A 为稳定区域, 左侧区域为自由流情形, 右侧为阻塞流; 中性稳定性曲线下方 B 为不稳定区域; 共存曲线与中性稳定性曲线之间 C 为亚稳定区域, 在此区域会发生阻塞流于自由流共存的情况. 图2中我们可以发现, 随着 γ 的增大, 曲线越来越低, 亚稳定区域越来越小即稳定区域越来越大, 因此分流行为有一定的致稳作用且这种作用随着换道率的增大而增大.

3 结论

通过建立单车道分流的格子流体力学模型来描述岔路口车辆的动力学行为. 在临界点的附近推

导出了 MKdV 方程,并用 MKdV 方程的扭结与反扭结解来描述阻塞转移现象.最后做出的相图表明,分流率的增加能够提高主干道车流的稳定性.

参 考 文 献

- 1 Kurtze D A, Hong D C. Delay effect on phase transitions in traffic dynamics. *Physical Review E*,1995,52: 218 ~ 225
- 2 Komatsu T, Sasa S. Kink solution characterizing traffic congestion. *Physical Review E*,1995,52:5574 ~ 5582
- 3 Nagatani T, Nakanishi K. Delay effect on phase transitions in traffic dynamics. *Physical Review E*,1998,57(6): 6415 ~ 6427
- 4 Nagatani T, Nakanishi K, Emmerich H. Phase transition in a difference equation model of traffic flow. *Physica A*, 1998,31:5431 ~ 5438
- 5 Nagatani T. TDGL and MKdV equations for jamming transition in the lattice model of traffic. *Physica A*,1999,264: 581 ~ 592
- 6 Nagatani T. Self-organization and phase transition in traffic-flow model of a two-lane roadway. *Physica A*,1993,26:L781
- 7 T Nagatani. Jamming transitions and the modified Koeaweg-de Vries equation in a two-lane traffic flow. *Physica A*, 1999,265:297 ~ 310
- 8 Huang H J, Tang T Q, Gao Z Y. Continuum modeling for two-lane traffic flow. *Acta Mechanica Sinica*,2006,22(2): 131 ~ 137
- 9 Tang C F, Jiang R, Wu Q S. Extended speed gradient model for traffic flow on two-lane freeways. *Chinese Physics*, 2007,16:1570 ~ 1575
- 10 唐铁桥,黄海军,薛郁. 一种改进的两车道交通流格子模型. *物理学报*,2006,55(08):4026 ~ 4031 (Tang T Q, Huang H J, Xue Y. An improved two-lane traffic flow lattice model. *Acta Physica Sinica*,2006,55(8):4026 ~ 4031 (in Chinese))
- 11 彭光含. 两车道交通流耦合格子模型与数值仿真. *物理学报*,2010,59(6):3824 ~ 3830. (Peng G H. A coupling lattice model of traffic flow on two lanes and numerical simulation. *Acta Physica Sinica*,2010,59(6):3824 ~ 3830 (in Chinese))
- 12 Ge H X, Dai S Q, Xue Y. Stabilization analysis and modified Korteweg-de Vries equation in a cooperative driving system. *Physical Review E*,2005,71:066119
- 13 葛红霞. 基于诱导信息的交通流动力学特性与非线性密度波特性[博士学位论文]. 上海大学. 2006 (Ge H X. Research on Traffic Dynamical Characteristics and Nonlinear Density Waves with Consideration of Navigation [PhD Thesis]. Shanghai. Shanghai University. 2006 (in Chinese))

ANALYSIS OF SOLITON IN A SPLIT-FLOW TRAFFIC FLOW LATTICE MODEL ON THE CROSSING ROAD*

Du Yong¹ Hua Cuncai^{2†} Zheng Zhibo³ Yuan Na²

(1. Department of Mathematics, Logistics University of Chinese People's Armed Police Forces, Tianjin 300162, China)

(2. School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China)

(3. School of Mathematics, Baoshan College, Baoshan 678000, China)

Abstract A split-flow traffic flow lattice model on the road crossing was proposed, and the sufficient and necessary conditions for keeping the model's linear stability were derived. The MKdV equation was derived from the models near the critical point. By using the kink and anti-kink solutions of the MKdV equation, the traffic jam was described. It is found that the coexisting curves decrease with the increasing of the rate of lane changing. Therefore, it plays stability role in heightening the traffic flows in main lane.

Key words traffic flow lattice model, crossing, split-flow, MKdV equation, soliton

Received 8 July 2012, revised 26 March 2013.

* This Project supported by the National Natural Science Foundation of China (11162020)

† Corresponding author E-mail: cuncai - hua@139. com