

基于多重反射法对周期结构的频率响应研究*

陈涛[†] 王立刚

(哈尔滨工程大学理学院, 哈尔滨 150001)

摘要 采用多重反射法对受到外扰的二组元周期梁结构的频率响应进行了研究. 施加到周期梁结构上的外部扰动被假定为一入射波, 传播波入射到不连续处会产生反射波和透射波, 进而在周期结构中会产生多重的反射和透射. 首先, 基于波的多重反射, 考虑施加扰动的组元上的波场; 其次, 由于波的透射, 分别考虑两个传播方向上的其他组元的波场, 作为初始波场; 最后, 可先考虑某个组元右侧的所有组元上的向左传播的波在其上的叠加, 作为一次迭代波场; 再考虑某个组元左侧的所有组元上的向右传播的波在其上的叠加, 作为二次迭代波场. 依次类推, 基于多重反射法, 叠加了入射波引起的多重反射和透射, 得到了所有组元的波场. 给出了周期梁结构中任一点的波幅与入射波幅之间的函数关系, 确定了受外扰的周期梁结构的传播常数及相应的波场的迭代次数.

关键词 周期结构, 弯曲波, 波的反射, 波的透射, 频率响应

DOI: 10.6052/1672-6553-2013-016

引言

对于具有相同特性的材料所组成的周期结构的研究已有数十年的历史, 但声子晶体概念的提出激起了对由具有不同特性的材料组成的周期结构的重新认识^[1-8]. 当弹性波的频率落在带隙范围内时, 弹性波被禁止传播, 因此弹性波带隙也可称为弹性波禁带. 周期结构中弹性波带隙的形成同样遵守 Bragg 散射机理, 这种特性使得周期结构在减振和降噪领域有着广阔的应用前景.

Jensen 对一维质量-弹簧周期结构的弹性波带隙进行了研究, 研究结果表明频率响应函数可以被用来描述结构的带隙特性^[9]. Xiang 和 Shi 采用微分求积法对周期梁的振动带隙进行了研究^[10]. Yu 等采用传递矩阵法对周期梁中弯曲波的传播进行了研究^[11].

许多方法可以被用来对周期结构的带隙进行研究, 然而, 大多数现有这些方法分析传播扰动对波的传播的影响还是有比较困难的地方, 例如, 入射波的波幅与任一组元上的波幅间的函数关系就无法由传递矩阵法给出. Ungar 采用的多重反射法

可以很好的解决这一总题^[3].

本文基于多重反射法, 对周期梁结构中传播扰动对波的传播的影响进行了研究. 叠加了入射波引起的多重反射和透射, 得到了所有组元的波场. 给出了周期梁结构中任一点的波幅与入射波幅之间的函数关系, 确定了受外扰的周期梁结构的传播常数. 频率响应函数被用来描述结构的带隙特性. 讨论了材料参数对振动带隙的影响, 数值研究结果证明了该方法的有效性.

1 波的反射和透射

图 1 为一维周期梁结构示意图. 图 1 中两种不同弹性模量和密度的材料 A 和 B 在方向上交替排列形成周期结构.

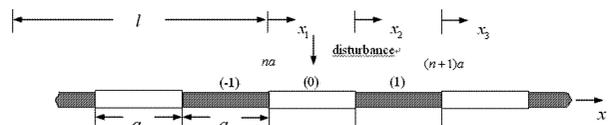


图 1 一维周期梁结构示意图

Fig. 1 One-dimensional periodic beam structure diagram

2012-04-25 收到第 1 稿, 2012-06-18 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11102047)和哈尔滨工程大学基础研究基金(002110260746)

[†] 通讯作者 E-mail: chen_tao1204@163.com

1.1 弯曲波在(0)段上的多重反射

假定一外部扰动在(0)段上产生一个向右传播的谐波 $w_{in}(x, t)$. 该谐波在不连续点(1)处将会产生反射和透射. 下面将给出(0)段上由于多重反射产生(不连续点(0)和(1)之间)的波场. 入射波可表示为

$$w_{in}(x) = A_{in1} \exp(-k_1 xi) \quad (1)$$

式中 $k_1 = \sqrt{(\rho S)_1 \omega^2 / (EI)_1}$, E 为杨氏模量, I 为惯性矩, ρ 为密度, S 为横截面积, A_{in1} 为波幅.

入射波在不连续点(1)处, 将会产生反射波 $w_{re1}(x)$ 和透射波 $w_{tr1}(x)$, 反射波 $w_{re1}(x)$ 沿负向传播, 在不连续点(0)处继续发生反射和透射, 依次类推, 在(0)段上将会产生一个正向传播的波 $w_{na+}^{(0)}(x)$ 和负向传播的波 $w_{na-}^{(0)}(x)$

$$w_{na+}^{(0)}(x) = \frac{1}{1 - R^2 \eta} A_{in1} \exp(-k_1 xi) = A_{n1}^{(0)} \exp(-k_1 xi), \quad (2)$$

$$w_{na-}^{(0)}(x) = \frac{R\tau\eta}{1 - R^2 \eta} A_{in1} \exp(-k_1 xi) = A_{n2}^{(0)} \exp(k_1 xi), \quad (3)$$

式中 R 为不连续点(1)处反射系数, $\tau = \exp(-2k_1 li)$, $\eta = \exp(-2k_1 a_1 i)$, 上标(0)表示初次近似.

1.2 波沿 x 正方向的传播

这里我们考虑(0)段上由于多重反射产生的波场在沿 x 正方向透射的传播情况. 此时, $w_{na+}^{(0)}$ 在不连续点(1)处将会产生透射, 透射波在(1)段上又继续发生多重反射和透射, (1)段上产生的波场为

$$w_{na+}^{(0)}(x) = \frac{T}{(1 - R^2 \eta)(1 - R_1^2 \gamma)} A_{in1} \exp(-k_2 xi) = B_{n1}^{(0)} \exp(-k_2 xi), \quad (4)$$

$$w_{nb-}^{(0)}(x) = R_1 \tau_1 \eta_1 \frac{T}{(1 - R^2 \eta)(1 - R_1^2 \gamma)} \times A_m \exp(-k_2 xi) = B_{n2}^{(0)} \exp(k_2 xi), \quad (5)$$

式中 $\tau_1 = \exp(-2k_2 li)$, $\eta_1 = \exp(-2k_2 ai)$, $\gamma = \exp(-2k_2 a_2 i)$, R 和 R_1 分别为(0)和(1)段上的反射系数. 同理, 我们可以推出在第(n)段上的0次近似波场.

1.3 波沿负方向的传播

这里, 波在正反两个方向的传播都会在一个迭代程序中被考虑^[3]. 以(0)段为例, 其上波场的一次近似项是由其右侧各段上向左传播的波产生. $w_{nb-}^{(0)}(x)$ 在不连续点(1)处透射后在(0)段上发生

多重反射; $w_{(n+1)a-}^{(0)}$ 在不连续点(2)处透射后在(1)段上发生多重反射, 后又在(不连续点(1)处透射后在(0)段上发生多重反射, 最后(0)段上的一次近似波场为

$$w_{na-}^{(1)}(x) = (PB_{n2}^{(0)} + PP_1 A_{(n+1)2}^{(0)} + P^2 P_1 B_{(n+1)2}^{(0)} + \dots) \exp(k_1 xi) \quad (6)$$

$$w_{na+}^{(1)}(x) = \tau^{-1} R (PB_{n2}^{(0)} + PP_1 A_{(n+1)2}^{(0)} + P^2 P_1 B_{(n+1)2}^{(0)} + \dots) \exp(-k_1 xi) \quad (7)$$

式中, \dots 项数和为(0)段右侧的段数和. 同样的方法, 我们可以推出在第(n)段上的一次近似波场.

接下来我们可推出任一段上的二次近似波场. 同样以(0)段为例, 考虑其左侧各段上的向右传播的波. (0)段上的二次近似波场为

$$w_{na+}^{(2)}(x) = (PB_{(n-1)1}^{(1)} + PP_1 A_{(n-1)1}^{(1)} + P^2 P_1 B_{(n-2)1}^{(1)} + \dots) \exp(k_1 xi) \quad (8)$$

$$w_{na-}^{(2)}(x) = \tau \eta R (PB_{(n-1)1}^{(1)} + PP_1 A_{(n-1)1}^{(1)} + P^2 P_1 B_{(n-1)1}^{(1)} + \dots) \exp(k_1 xi) \quad (9)$$

式中项数和为(0)段左侧的段数和. 同样的方法, 我们可以推出在第(n)段上的二次近似波场.

第三次近似波场和第四次近似波场同样能够得到. 任一段上的波场可以由所有近似项叠加得到. 以(-1)段, (0)段和(1)段为例, 波场可表示为

$$w_{na+}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_{na+}^{(i)}(x) = W_{na+} \exp(-k_1 xi), \quad (10a)$$

$$w_{na-}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_{na-}^{(i)}(x) \quad (10a)$$

$$w_{(n-1)b+}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_{(n-1)b+}^{(i)}(x) = W_{(n-1)b+} \exp(-k_2 xi) \quad (10b)$$

$$w_{(n-1)b-}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_{(n-1)b-}^{(i)}(x) \quad (10b)$$

$$w_{nb+}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_{nb+}^{(i)}(x) = W_{nb+} \exp(-k_2 xi), \quad (10c)$$

$$w_{nb-}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_{nb-}^{(i)}(x) \quad (10c)$$

式中级数的项数由迭代次数确定.

2 波场的迭代次数

波场的迭代次数可以由相邻元胞波场的比值来确定. 由于

$$\bar{W}_{nb+} = \exp(-k_2(l+a_1)i)W_{nb+},$$

$$\bar{W}_{(n-1)b+} = \exp(-k_2(l-a+a_1)i)W_{(n-1)b+} \quad (11)$$

式中上标表示以段左末端为起始点的局部坐标系. Bloch 定理有 $\bar{W}_{nb+} = \exp(i\mu a)W_{(n-1)b+}$. 故有如下表达式

$$W_{nb+} = \exp(i\mu a)\exp(k_2ai)W_{(n-1)b+} \quad (12)$$

式中传播常数可以由传递矩阵法得出,这样即可得到相应的满足一定精度的波场的迭代次数. 波的反射系数和透射系数可由文献[12]得到.

3 数值算例

计算了环氧树脂/铝一维周期梁结构的频率响应. 晶格常数 $a = 2m, a_1 = a_2 = 1m$, 梁的截面积 $A = 6.0 \times 10^{-3} m^2$, 惯性矩为 $I = 2.7 \times 10^{-5} m^4, l = 3a$.

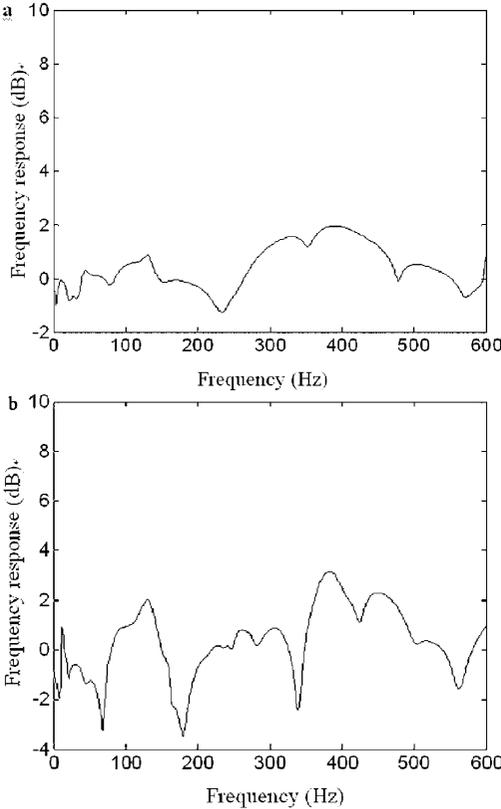


图2 周期梁的频率响应 (a) $M=6$, 段(4)右侧末端处, $N=5$, (b) $M=10$, 段(12)右侧末端处, $N=5$

Fig.2 Frequency response of periodic beam (a) $M=6$, at the end on the right of section (4), $N=5$, (b) $M=10$, at the end on the right of section (12), $N=5$

图2a和2b分别给出了元胞数 $M=6$ 和10的周期梁结构的频率响应,式(12)计算出了其波场对应的迭代次数 $N=5$. 可以看出,随着周期数的增加,结构的振动带隙越明显.

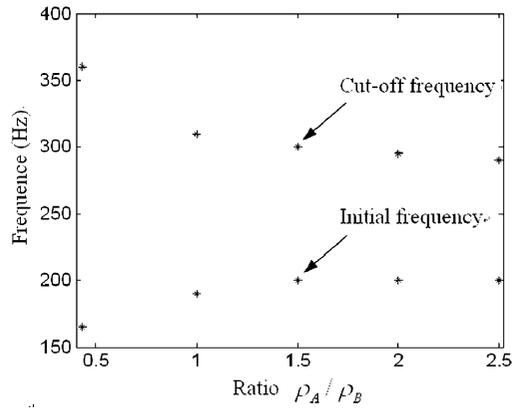


图3 ρ_A/ρ_B 对第二带隙的影响

Fig.3 Effect of the ratio ρ_A/ρ_B on the second band gap

图3和4研究了二组元的密度比和弹性模量比对第二带隙的影响. 周期数的周期结构的频率响应被相应的考虑. 可以看出,随着 ρ_A/ρ_B 的增加,第二带隙的初始频率增加而截止频率降低. 随着 E_A/E_B 的增加,第二带隙的初始频率和截止频率均降低.

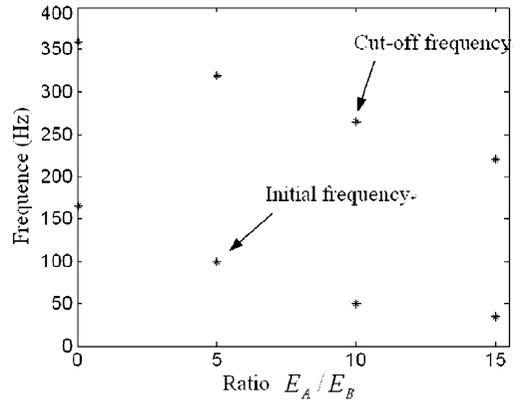


图4 E_A/E_B 对第二带隙的影响

Fig.4 Effect of the ratio E_A/E_B on the second band gap

4 结论

本文基于多重反射法,对周期梁结构中传播扰动对波的传播的影响进行了研究. 给出了二组元周期梁结构中任一点的波幅与入射波幅之间的函数关系;利用 Bloch 定理确定了满足一定精度的波场的迭代次数;给出了二组元结构密度比和模量比对带隙频率的影响,数值验证了方法的有效性.

参 考 文 献

1 Heckl M. Investigations on the vibrations of grillages and

- other simple beam structures. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, 36: 1335 ~ 1343
- 2 Mead D J. Vibration response and wave propagation in periodic structures. *ASME Journal of Industrial and Engineering*, 1971, 21: 783 ~ 792
 - 3 Ungar E E. Steady-state responses of one-dimensional periodic flexural systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1965, 39: 887 ~ 894
 - 4 Tanaka Y, Tamura S. Surface acoustic waves in two-dimensional periodic elastic structures. *Physical Review B*, 1998, 58: 7958 ~ 7965
 - 5 Ruzzene M, Baz A. Control of wave propagation in periodic composite rods using shape memory inserts. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 2000, 122: 151 ~ 159
 - 6 Liu Z Y, Chan C T, Sheng P. Analytic model of phononic crystals with local resonances. *Physical Review B*, 2005, 71: 014103
 - 7 Zhang X Y, Jackson T, Lafond E, et al. Evidence of surface acoustic wave band gaps in the phononic crystals created on thin plates. *Applied Physics Letters*, 2006, 88: 041911
 - 8 Golub M V, Fomenko S I, Bui T Q, et al. Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, 49: 344 ~ 354
 - 9 Jensen J S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 266: 1053 ~ 1078
 - 10 Xiang H J, Shi Z F. Analysis of flexural vibration band gaps in periodic beams using differential quadrature method. *Computers and Structures*, 2009, 87: 1559 ~ 1566
 - 11 Yu D L, Wen J H, Shen H J, et al. Propagation of flexural wave in periodic beam on elastic foundations. *Physical Letter A*, 2011, 376: 626 ~ 630
 - 12 Mace B R. Wave reflection and transmission in beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1984, 97: 237 ~ 246

INVESTIGATIONS ON FREQUENCY RESPONSE OF A PERIODIC STRUCTURE USING MULTI-REFLECTION METHOD*

Chen Tao[†] Wang Ligang

(Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract The frequency response of a periodic beam with a propagating disturbance was studied by using the multi-reflection method. A propagating disturbance is incident upon a discontinuity and gives rise to transmitted and reflected waves. At first, the wave-field of segment considering incident disturbance was set up between two discontinuities due to multiple reflections. Then, wave-field was set up when wave transmission took place in two coordinate directions. The first correction terms on segment are due to the leftward propagating components on all segments to the right of the segment when only leftward propagation is permitted, and the second correction terms on segment are due to the rightward propagating components on all segments to the left of the segment. So all of the transmitted and reflected waves of given flexural wave incident upon the beam at some specified location were found and superposed. The relation between the wave-field of incident waves and the wave-field of resulting waves on any segments was expressed. The propagating constant and iteration times of wave-field of periodic beam were determined.

Key words periodic structure, flexural wave, wave reflection, frequency response

Received 25 April 2012, revised 18 June 2012.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11102047) and The Fundamental Research Foundation of Harbin Engineering University under (002110260746)

[†] Corresponding author E-mail: chen_tao1204@163.com