第 11 卷第 2 期 2013 年 6 月
1672-6553/2013/11(3)/97-5
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 11 No. 2
Jun. 2013

高阶非完整系统的广义 Birkhoff 表示*

宋端[1] 崔金超[2] 刘世兴[2†] 郭永新[1,2]
(1. 辽东学院影像物理教研室，丹东 118001)(2. 辽宁大学物理学院，沈阳 110036)

摘要 通常方法构造的高阶非完整系统的运动微分方程不仅没有完整系统的辛几何结构和 Lie 代数结构，而且也不具备完整系统的自伴随性质. 本文利用降阶方法，将高阶非完整系统变换为一阶动力学系统，并运用 Cauchy-Kowalevski 定理对其自伴随化，得到一种新的一阶动力学方程组-广义 Birkhoff 表示，这将为研究高阶非完整系统的若干动力学问题、几何结构、代数结构、几何数值积分以及工程应用提供了一个新的方法.

关键词 高阶非完整约束， 广义 Birkhoff 方程， 自伴随性质

DOI： 10.6052/1672-6553-2013-027

引言

非完整系统是一类受到不可积微分约束的动力学系统，广泛应用于场论、机电动力系统、控制理论、工程科学等领域[1-2]，甚至在经济和商业领域也存在着大量的非完整约束问题. 因此，对于非完整系统的研究不但具有重要的理论意义，而且具有广泛的应用前景. 随着现代科学技术，如自动控制、自动调节理论的发展，对非完整系统的研究已经从一阶约束系统扩展到二阶及以上的高阶非完整系统[3-7]. 同时，力学理论自身的学科发展需要，也激发了人们对于高阶非完整系统的研究兴趣，如关于高阶非完整系统的运动微分方程、高阶非完整系统的对称性与守恒量等[8-11].

研究高阶非完整系统可以从高阶 d′Alembert 原理出发，利用变分方法得到带乘子的高阶 Lagrange 方程或高阶 Hamilton 方程，并在此基础上利用 Noether 理论或 Lie 群方法研究其对称性和守恒量[10-11]. 然而，通常的高阶非完整系统的动力学方程不仅没有完整系统那样的辛结构和 Lie 代数结构，也没有完整系统的自伴随性质，这给我们研究非完整系统的动力学问题带来了诸多困难. 如果在研究非完整系统时，能够尽可能保持完整系统的几何性质和代数性质，尽可能多地借鉴较为成熟的完整系统的结论，这无疑对于简化非完整系统的研究方法大有益处. 研究表明，动力学系统的自伴随性质、辛几何结构、Lie 代数结构一般不能够同时得到满足[10]，除非系统是局部的、解析的、正规的、完整的自治 Birkhoff 系统. 保守力学系统就是其中一类自伴随的、有辛结构和 Lie 代数结构的动力学系统. 对于非自治 Birkhoff 系统，其 Lie 代数结构不复存在，而保留系统的自伴随性质和辛结构. 而对于非完整系统，通常的解决方案不能够保持上述三个性质不变. 前期的研究表明，非完整系统可以实现一种表示，它至少可以保留自伴随性质，使之成为广义 Birkhoff 系统. 这也是 Birkhoff 系统放弃 Lie 代数结构和辛结构的一种退化[12].

为了将高阶非完整系统的运动方程表示成具有自伴随性质的 Birkhoff 方程的形式，在考虑奇数个非完整约束方程时，传统方法通常采用增加一个时间维度，$\dot{a}^0=1 \Rightarrow a^0=t$ 来实现非完整系统的自伴随表示[11]. 本文在广义 Birkhoff 框架下研究高阶非完整系统问题，不必增加新的表达式，即可给出高阶非完整问题的广义 Birkhoff 方程的构造方法，将高阶非完整系统的运动方程转化为具有自伴随性质的广义 Birkhoff 方程的形式，从而为进一步在广义 Birkhoff 系统框架下研究高阶非完整问题奠定基础.

为方便起见，文中采用爱因斯坦求和约定，并规定指标取值范围如下：$s=1,2,\cdots,n$，$\beta=1,2,\cdots,$

2012-11-05 收到第 1 稿，2013-05-19 收到修改稿.
* 国家自然科学基金(11202090，11172120，10932002)、辽宁省高校科研基金(2008S098)、辽宁省高等学校优秀人才支持计划(2008RC20)和辽宁省重点实验室建设项目(2008403009)资助
† 通讯作者 E-mail：ydylsx@163. com

$g;\varepsilon=n-g;\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;l=1,2,\cdots;k=1,2,\cdots,n;i,j=1,2,\cdots,m.$

1 高阶非完整系统的运动方程

假设力学系统的位形空间由 n 个广义坐标 q_s 来描述,如果该力学系统受到如下 g 个 l 阶非完整约束[11]:

$$\overset{(l)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot q_s,\cdots,\overset{(l-1)}{q}_s,\overset{(l)}{q}_\sigma,t) \tag{1}$$

根据文献[10],利用万有 d'Alembert 原理,可以导出高阶非完整系统的 Maggi 形式的运动方程:

$$E_\sigma(T)-Q_\sigma+[E_{\varepsilon+\beta}(T)-Q_{\varepsilon+\beta}]\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(l)}{q}_\sigma}=0 \tag{2}$$

这里 $E_s=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot q_s}\right)-\frac{\partial}{\partial q_s}$,如果令:

$$f_s(q_k,\dot q_k,\ddot q_k,t)=E_s(T)-Q_s$$

$$a_{\beta\sigma}\left(q_s,\dot q_s,\cdots,\overset{(l-1)}{q}_s,\overset{(l)}{q}_v,t\right)=\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(l)}{q}_\sigma}=0 \tag{3}$$

则方程(2)化为如下形式:

$$f_\sigma+f_{\varepsilon+\beta}a_{\beta\sigma}=0 \tag{4}$$

从而方程(4)和(1)合起来构成了高阶非完整系统的运动方程. 根据文献[11]的阐述,高阶非完整系统的运动方程(4)和(1)总可以表示为如下的显式形式:

$$\overset{(l)}{q}_s=h_s\left(q_k,\dot q_k,\cdots,\overset{(l-1)}{q}_k,t\right), \tag{5}$$

则称方程(5)为和高阶非完整系统(1)和(4)相对应的完整系统的运动方程. 通过求解方程(5)可以找到相应的非完整系统的解,但需要添加限制初始条件的约束方程或运动方程.

2 广义 Birkhoff 方程及其构造方法

考虑 m 维流形 M,其局部坐标为$\{t,a\}$,设该流形上的动力学系统由下述一阶微分方程组来描述,

$$\dot a^i-\Xi^i(t,a^j)=0 \tag{6}$$

这里 $\Xi^i(t,a^j)$ 在其定义域内为局部、解析和正规的函数,需要强调:这里的一阶动力学系统既可以是偶数维的,也可以是奇数维的. 如果给定一阶微分方程组所描述的力学系统的广义 Birkhoff 函数组 $R_i(t,a)$ 和广义 Birkhoff 函数 $B(t,a)$,则定义广义 Pfaff 函数:

$$P(t,a,\dot a)=R_i(t,a)\dot a^i-B(t,a), \tag{7}$$

从而定义如下的广义 Pfaff 作用量:

$$A(\tilde E)=\int_{t_1}^{t_2}dtP(t,a,\dot a)(\tilde E) \tag{8}$$

这里 $\tilde E$ 是接触流形 M 上的允许路径. 对(7)式作等时变分运算,$\delta t=0$,

$$\delta A(\tilde E)=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\delta a^i\frac{\partial}{\partial a^i}+\delta\dot a^i\frac{\partial}{\partial\dot a^i}\right)(R_i\dot a^i-B)(\tilde E)$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\left(\left(\frac{\partial R_i}{\partial a^j}-\frac{\partial R_j}{\partial a^i}\right)\dot a^i-\left(\frac{\partial R_j}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a^j}\right)\right)\delta a^i-\frac{d}{dt}(R_j\delta a^j)\right)(\tilde E)$$

将上式取极值,即 $\delta A(\tilde E)=0$,并考虑端点条件,则可以得到力学系统(6)的广义 Birkhoff 方程[12]:

$$\left[\frac{\partial R_j(t,a)}{\partial a^i}-\frac{\partial R_i(t,a)}{\partial a^j}\right]\dot a^j-\left[\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^i}+\frac{\partial R_i(t,a)}{\partial t}\right]=0 \tag{9}$$

上述变分过程亦称为广义 Pfaff-Birkhoff 原理.

如果令

$$X_{ij}=\frac{\partial R_j}{\partial a^i}-\frac{\partial R_i}{\partial a^i},\ Y_i=\frac{\partial B}{\partial a^i}+\frac{\partial R_i}{\partial t} \tag{10}$$

则方程(9)满足如下自伴随性质:

$$X_{ij}+X_{ji}=0$$
$$\frac{\partial X_{ij}}{\partial a^k}+\frac{\partial X_{jk}}{\partial a^i}+\frac{\partial X_{ki}}{\partial a^j}=0 \tag{11}$$
$$\frac{\partial X_{ij}}{\partial t}=\frac{\partial Y_i}{\partial a^j}-\frac{\partial Y_j}{\partial a^i}$$

这个自伴随特性使得偶数维 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数组的构造方法也适用于此时的广义 Birkhoff 系统[12]. 为了实现动力学系统的广义 Birkhoff 表示,通常有三类方法来构造系统的广义 Birkhoff 函数 B 和函数组 R_i.

方法 1: 取广义 Birkhoff 函数 B 为系统的总能量,并求解如下的 Cauchy-Kowalevski 方程,

$$\frac{\partial R_i(t,a)}{\partial t}=\left[\frac{\partial R_j(t,a)}{\partial a^i}-\frac{\partial R_i(t,a)}{\partial a^j}\right]\Xi^j-\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^i} \tag{12}$$

获得广义 Birkhoff 函数组 R_i. 该方法的优点在于对所有的变量和函数都有直接的物理意义,但求解方程(12)却十分困难.

方法 2: 利用通痕变换将方程(6)表示成自伴随一阶形式:

$$[X_{ij}(t,a)\dot a^v+Y_i(t,a)]_{SA}=0 \tag{13}$$

则通过求解如下积分:

$$R_i(t,a)=\left[\int_0^1\tau X_{ij}(t,\tau a)\right]a^i$$
$$B(t,a)=-\left[\int_0^1\left(Y_i+\frac{\partial R_i}{\partial t}\right)(t,\tau a)d\tau\right]a^i \tag{14}$$

可以得到系统的广义 Birkhoff 函数 B 和广义 Birkhoff 函数组 R_i.

该方法的困难在于如何将非自伴随的动力学系统方程表示成自伴随的形式. 一旦表示成自伴随形式,则可以利用(14)直接得到系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组,但所得的函数和变量通常没有直接的物理意义. 为了得到有物理意义的 Birkhoff 函数,还需要进行复杂的规范变换.

方法 3: 假设已知一阶系统(6)的全部的 m 个独立的第一积分 I^j,所谓独立的第一积分,指第一积分 I^j 满足:

$$\det(\partial I^j/\partial a^i)\neq 0 \tag{15}$$

那么 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_i 分别由下式确定,

$$B(t,a)=-G_j\frac{\partial I^j}{\partial t},\ R_i(t,a)=G_j\frac{\partial I^j}{\partial a^i} \tag{16}$$

这里 G_j 是关于第一积分 I^j 的函数,并且不需要满足如下的规则性条件:

$$\det\left(\frac{\partial G^i}{\partial I^j}-\frac{\partial G^j}{\partial I^i}\right)\neq 0 \tag{17}$$

这种方法的困难在于如何找到系统的全部独立的第一积分. 其缺点和方法二类似,所得到的函数和变量通常都不具有直接的物理意义.

3　高阶非完整系统的广义 Birkhoff 表示

首先,将显式方程(5)改写为标准的一阶形式. 令

$$a_s=q_s,a_{n+s}=\dot q_s,\cdots,a_{(l-1)n+s}=\overset{(l-1)}{q}_s \tag{18}$$

则方程(5)表示为:

$$\begin{aligned}&\dot a_s=a_{n+s},\ \dot a_{n+s}=a_{2n+s},\cdots,\\&\dot a_{(l-2)n+s}=a_{(l-1)n+s},\\&\dot a_{(l-1)n+s}=h_s(a_k,a_{n+k},\cdots,a_{(l-1)n+k},t)\end{aligned} \tag{19}$$

或简单的写成如下形式:

$$\dot a^v=\xi^v(t,a),\ v=1,2,\cdots,ln \tag{20}$$

这里 $\xi^v=\xi^v(t,a)$,为方程组(19)的右端. 这样,将 l 阶非完整系统表示为由 ln 个一阶微分方程所组成的方程组. 方程组(19)一般不具有自伴随性质,将其表示为广义 Birkhoff 方程(9)的形式时才能保持动力学系统的自伴随特性.

其次,将高阶非完整系统(19)表示为广义 Birkhoff 方程(9)的形式. 根据 Cauchy-Kowalevski 定理[12],如果给定广义 Birkhoff 函数 $B(t,a)$,则方程(15)总可以表示成 Cauchy-Kowalevski 偏微分方程(12)的形式,从而可知函数组 $R_i(t,a)$ 总是存在的. 因此,高阶非完整系统总是可以表示为广义 Birkhoff 方程的形式,当 ln 为偶数时,所得方程(9)为 Birkhoff 方程,当 ln 为奇数时,该方程为广义 Birkhoff 方程.

4　算例

考虑一单位质量的质点构成的力学系统,所受外力为 $F_x=F_y=0,F_z=k=const.$ 在 3 维构型空间中运动,受到如下 3 阶非完整约束:

$$\dddot z=t\dddot x+(1+t^2)^{1/2}\dddot y \tag{21}$$

首先,根据方程(4)可以写出该系统的运动微分方程为:

$$\ddot x+t(\ddot z-k)=0,\ddot y+(1+t^2)^{1/2}(\ddot z-k)=0 \tag{22}$$

将方程(22)分别对时间 t 求一次导数,则得到:

$$\begin{aligned}&\dddot x+\ddot z-k+t\dddot z=0,\\&\dddot y+(1+t^2)^{1/2}t(\ddot z-k)+(1+t^2)^{1/2}\dddot z=0\end{aligned} \tag{23}$$

联合方程(21)和(23)的第二个方程则得到三个 3 阶微分方程:

$$\dddot x=\frac{k-\ddot z}{1+t^2},\dddot y=0,\dddot z=\frac{t(k-\ddot z)}{1+t^2} \tag{24}$$

取 $a^1=x,a^2=y,a^3=z,a^4=\dot x,a^5=\dot y,a^6=\dot z,a^7=\ddot x,a^8=\ddot y,a^9=\ddot z$,则方程(24)可以写成标准的一阶方程组的形式:

$$\begin{aligned}&\dot a^1=a^4,\ \dot a^2=a^5,\ \dot a^3=a^6,\ \dot a^4=a^7,\\&\dot a^5=a^8,\ \dot a^6=a^9,\dot a^7=\frac{k-a^9}{1+t^2},\\&\dot a^8=0,\dot a^9=\frac{t(k-a^9)}{1+t^2}\end{aligned} \tag{25}$$

其次,该系统存在如下 9 个第一积分[11]:

$$\begin{aligned}&I^1=a^1-a^4t+\frac12a^7t^2-\frac12(a^9-k)\left\{t-(1+t^2)^{1/2}\ln[t+(1+t^2)^{1/2}]\right\}\\&I^2=a^2-a^5t+\frac12a^8t^2,\\&I^3=a^3-\frac12kt^2-(a^6-kt)t+(a^9-k)[1+t^2-(1+t^2)^{1/2}]\\&I^4=a^4-a^7t+(a^9-k)[1-(1+t^2)^{1/2}]\\&I^5=a^5-a^8t\\&I^6=a^6-kt-(a^9-k)(1+t^2)^{1/2}\ln[t+(1+t^2)^{1/2}]\\&I^7=a^7+(a^9-k)t,\ I^8=a^8,\\&I^9=a^9(1+t^2)^{1/2}+k[1-(1+t^2)^{1/2}]\end{aligned} \tag{26}$$

下面采用 Hojman 方法构造高阶非完整系统(21~22)的广义 Birkhoff 函数组 $R_i(t,a)(i=1,2,\cdots,9)$ 和广义 Birkhoff 函数 $B(t,a)$. 将上述第一积分代入(26),得到如下 Birkhoff 函数:

$$\begin{aligned}&R_1=G_1,\ R_2=G_2,\ R_3=G_3,\\&R_4=-tG_1+G_4,\ R_5=-tG_2+G_5,\end{aligned}$$

$$R_6=-tG_3+G_6,\ R_7=\frac{1}{2}G_1t^2-tG_4+G_7,$$

$$R_8=\frac{1}{2}G_2t^2-tG_5+G_8$$

$$R_9=-\frac{1}{2}G_1\{t-(1+t^2)^{1/2}\ln[t+(1+t^2)^{1/2}]\}+G_3[1+t^2-(1+t^2)^{1/2}]+G_4[1-(1+t^2)^{1/2}]-G_6(1+t^2)^{1/2}\ln[t+(1+t^2)^{1/2}]+G_7t+G_9(1+t^2)^{1/2}$$

$$B=G_1\{a^4-a^7t-\frac{1}{2}(a^9-k)t(1+t^2)^{-1/2}\ln[t+(1+t^2)^{1/2}]\}+G_2(a^5-a^8t)+G_3\{a^6-kt-(a^9-k)[2t-t(1+t^2)^{-1/2}]\}+G_4[a^7+(a^9-k)t(1+t^2)^{-1/2}]+G_5a^8+G_6\{k+(a^9-k)t(1+t^2)^{-1/2}\ln[t+(1+t^2)^{1/2}]\}-G_7(a^9-k)-G_9(a^9-k)t(1+t^2)^{1/2}$$

如果取 $G_1=0,G_2=I^1,G_3=0,G_4=I^3,G_5=0,G_6=I^5,G_7=0,G_8=I^7,G_9=0$,并代入上述各式,则得到:

$$R_1=0,$$

$$R_2=a^1-a^4t+\frac{1}{2}a^7t^2-\frac{1}{2}(a^9-k)\left\{t-(1+t^2)^{-1/2}\ln[t+(1+t^2)^{1/2}]\right\}$$

$$R_3=0,$$

$$R_4=a^3-\frac{1}{2}kt^2-(a^6-kt)t+(a^9-k)\left[1+t^2-(1+t^2)^{1/2}\right]$$

$$R_5=-t\left\{a^1-a^4t+\frac{1}{2}a^7t^2-\frac{1}{2}(a^9-k)\left\{t-(1+t^2)^{-1/2}\ln[t+(1+t^2)^{1/2}]\right\}\right\}$$

$$R_6=a^5-a^8t$$

$$R_7=-t\left\{a^3-\frac{1}{2}kt^2-(a^6-kt)t+(a^9-k)\left[1+t^2-(1+t^2)^{1/2}\right]\right\}$$

$$R_8=\frac{1}{2}t^2\left\{a^1-a^4t\,\frac{1}{2}a^7t^2-\frac{1}{2}(a^9-k)\left\{t-(1+t^2)^{-1/2}\ln[t+(1+t^2)^{1/2}]\right\}\right\}+a^7+(a^9-k)t$$

$$R_9=\left\{a^3-\frac{1}{2}kt^2-(a^6-kt)t+(a^9-k)\left[1+t^2-(1+t^2)^{1/2}\right]\right\}\left[1-(1+t^2)^{1/2}\right]-(a^5-a^8t)(1+t^2)^{-1/2}\ln\left[t+(1+t^2)^{1/2}\right]$$

$$B=\left\{a^1-a^4t+\frac{1}{2}(a^7t^2)-\frac{1}{2}(a^9-k)\left\{t-(1+t^2)^{-1/2}\ln[t+(1+t^2)^{1/2}]\right\}\right\}(a^5-a^8t)+\left\{a^3-\frac{1}{2}kt^2-(a^6-kt)t+(a^9-k)\left[1+t^2-(1+t^2)^{-1/2}\right]\right\}\left[a^7+(a^9-k)t(1+t^2)^{-1/2}\right]+(a^5-a^8t)\left\{k+(a^9-k)t(1+t^2)^{-1/2}\ln\left[t+(1+t^2)^{1/2}\right]\right\}$$

将上述表达式代入广义 Birkhoff 方程(9)并整理则得到一阶方程组(25)所满足的广义 Birkhoff 方程. 该广义 Birkhoff 方程为 9 阶的,即由 9 个偏微分方程所组成的方程组,但是原单位质点系统(21 ~22)是 7 阶系统,为了能够从广义 Birkhoff 方程得到原高阶非完整系统的解,需要施加两个由初始条件所确定的限制条件,即对当 $t=t_0$ 时的初值 a_0^1, $a_0^2,\cdots,a_0^9$ 加以限制. 由方程(21)和(22)可得该限制条件为:

$$a_0^7+t_0(a_0^9-k)=0,$$
$$a_0^8+(1+t_0^2)^{1/2}(a_0^9-k)=0 \tag{27}$$

5 结论

本文运用降阶方法,将高阶非完整系统的运动方程表示为一阶动力学系统,并利用自伴随化方法将其表示为广义 Birkhoff 方程,将不具有自伴随性质的动力学方程表示为具有自伴随特性的方程. 这种变换给高阶非完整系统动力学的研究提供了新途径,对于研究这类系统的几何结构、代数结构、几何数值积分以及工程应用提供了新的基础.

参 考 文 献

1 郭永新,罗绍凯,梅凤翔. 非完整约束系统几何动力学研究进展:Lagrange 理论及其它. 力学进展,2004,34(3):477 ~492(Guo Y X, Luo S K, Mei F X. Progress of geometric dynamics of nonholonomic constrained mechanical systems: Lagrange theory and other aspects. *Advances in Mechanics*, 2004,34(3):477 ~492(in Chinese))

2 温熙森,邱静,陶俊勇. 机电系统分析动力学及其应用. 北京:科学出版社,2003(Wen X S, Qiu J, Tao J Y. Analytical mechanics of mechanico-electrical dynamical systems and its application. Beijing: Science Press, 2003(in Chinese))

3 Zheng X Y, Wu Y Q. Controller design of high order nonholonomic system with nonlinear drifts. *International Journal of Automation and Computing*, 2009, 6(3):240 ~244

4 高芳征,袁付顺,高存臣. 一类高阶非完整系统的鲁棒适应模糊控制. 模糊系统与数学,2009,23(3):158 ~163(Gao F Z, Yuan F S, Gao C C. Robust adaptive fuzzy

control for a class of uncertain hagh-order nonholonomic systems. *Fuzzy System. Mathematics*, 2009,23(3):158 ~ 163(in Chinese))

5 张相武. 高阶非完整系统的两类高阶运动微分方程. 陇东学院学报,2006,16(1):39 ~ 44(Zhang X W. Two kinds of higher order differential equations of motion for higher order nonholonomic system. *Journal of Longdong University*, 2006,16(1):39 ~44(in Chinese))

6 慕小武,虞继敏,程桂芳. 高阶非完整系统的适应调节. 应用数学和力学,2006,27(4):447 ~453(Mu X W, Yu J M, Cheng G F. Adaptive regulation of high order nonholonomic systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(4):447 ~453(in Chinese))

7 高芳征,尚艳玲,袁付顺. 更一般高阶非完整系统的指数调节. 系统科学与数学,2012,32(2):149 ~ 160(Gao F Z, Shang Y L, Yuan F S. Exponential regulation for more general high-order nonholonomic systems. *Journal of Systems Science and Mathematical Science*, 2012,32(2): 149 ~160(in Chinese))

8 李燕,方建会,张克军. 高阶非完整系统的共形不变性与 Noether 守恒量. 动力学与控制学报,2010,8(4):300 ~304(Li Y, Fang J H, Zhang K J. Conformal invariance and Noether conserved quantity of higher-order nonholonomic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2010,8 (4):300 ~304(in Chinese))

9 梅凤翔. 高阶非完整系统运动方程的一类积分. 应用数学和力学,1991, 12(8): 749 ~756(Mei F X. One type of integrals for the equations of motion of higher-order nonholonomic systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1991, 12(8): 749 ~756(in Chinese))

10 梅凤翔,刘瑞,罗勇. 高等分析力学. 北京:北京理工大学出版社, 1991(Mei F X, Liu D, Luo Y. Advanced analytical mechanics. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991 (in Chinese))

11 梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff 系统动力学. 北京:北京理工大学出版,1996 (Mei F X, Shi R C, Zhang Y F and Wu H B. Dynamics of Birkhoff systems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press,1996 (in Chinese))

12 Guo Y X, Liu C, Liu S X. Generalized Birkhoffian realization of nonholonomic systems. *Communications in Mathematics*, 2010, 18:21 ~35

GENERALIZED BIRKHOFFIAN REPRESENTATION OF HIGH-ORDER NONHOLONOMIC SYSTEMS *

Song Duan[1] Cui Jianchao[2] Liu Shixing[2†] Guo Yongxin[1,2]

(1. *Eastern Liaoning University*, *Physics of Medical Imaging Department*, *Dandong* 118001,*China*)

(2. *College of Physics*, *Liaoning University*, *Shenyang* 110036, *China*)

Abstract The differential equations of motion of high-order nonholonomic systems constructed by utilizing the general methods not only lack the symplectic structure and Lie algebra structure of holonomic systems, but also lack the self-adjoint nature of holonomic systems. In this paper, the high-order nonholonomic system was transformed into first-order kinetic system by using the reduced-order method, which was self-adjointized by making use of the Cauchy-Kowalevski theorem, then the generalized Birkhoffian equation of high-order nonholonomic system was obtained. This will provide a new method for researching a number of high-order nonholonomic system's problems, such as the geometry and algebraic structure, geometric numerical integrator and engineering applications, etc.

Key words high-order nonholonomic constrain, generalized Birkhoff equation, self-adjoint nature

Received 05 November 2012,revised 19 May 2013.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11202090,11172120,10932002), the Research Program of Higher Education of Liaoning Province, China (2008S098), the program of Supporting Elitists of Higher Education of Liaoning Province, China (2008RC20), the Program of Constructing Liaoning Provincial Key Laboratory, China(2008403009)

† Corresponding author E-mail: ydylsx@163.com