

有界随机噪声参数激励下碰撞系统的矩稳定性*

戎海武^{1†} 王向东¹ 罗旗帜¹ 徐伟² 方同²

(1. 佛山大学数学系, 佛山 528000) (2. 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

摘要 研究了单自由度线性单边碰撞系统在有界随机噪声参数激励下系统的矩稳定性问题. 用 Zhuravlev 变换将碰撞系统转化为连续的非碰撞系统, 然后用随机平均法得到了关于慢变量的随机微分方程. 利用伊藤法则给出了系统一、二阶矩满足的常微分方程, 根据微分方程的稳定性理论得到了系统一阶矩稳定充分必要条件的解析表达式和二阶矩稳定充分必要条件的数值算法, 并对理论结果用数值方法进行了仿真计算. 理论分析和数值仿真表明, 无论是相对于一阶矩还是二阶矩的稳定性, 随着随机激励振幅变大, 系统的稳定性区域变小从而使系统变得不稳定. 而当调谐参数趋于零系统达到参数主共振情形时, 系统的稳定性区域变得最小. 当随机噪声强度逐渐变小趋于零时, 由二阶矩稳定性给出的稳定性区域变得一致. 在一定的参数区域内, 随机噪声使得系统稳定化.

关键词 线性碰撞系统, 参数主共振响应, 矩稳定性, Zhuravlev 变换, 随机平均法

引言

在航空航天、机械制造、土木工程等领域存在着由间隙而导致的冲击或碰撞振动, 例如飞船对接引起的碰撞、大型太阳能帆板因关节间隙产生的碰撞振动、飞行器稳瞄系统的非光滑性导致的碰撞振动、海洋平台桩脚受到海冰的往复挤压碰撞、机械手在作用中对产品的碰撞、电动冲击机械等等. 在相同的初始条件下, 动力学系统的长期响应会因为往复碰撞振动的积累而变得面目全非; 同时, 碰撞还会影响冲击机械产品的动态性能, 可以引起系统局部产生永久塑性变形, 使材料的力学性质发生本质改变, 以至引发灾难性后果^[1]. 并且在实际系统中, 随机噪声往往是不可避免的, 例如研究暴风雨、地震和海浪等对系统的影响. 当前碰撞系统的随机响应问题已经成为研究的热点, 并且提出了许多有效的研究方法, 例如线性化方法^[2], 拟静态法^[3], 马尔科夫过程法^[4,5], 随机平均法^[6,7], 变量代换法^[8], 能量平衡法^[9], 均值碰撞 Poincaré 映射法^[10], 路径积分法^[11], 和 Monte Carlo 随机模拟法^[12]等, 文献[13]对有关研究做了综述. 总的来说, 关于碰撞系统在随机激励下系统响应分析的研

究处于起步阶段, 并且大部分研究集中在碰撞系统对于宽带随机激励的响应分析上, 对于在窄带随机激励下碰撞系统响应分析的研究^[14,15,16]则很少见. 但是在很多实际系统中, 系统受到的激励往往是窄带噪声, 例如海浪的冲击等. 而且与宽带随机激励相比, 在窄带随机激励下系统的非线性效应更为突出, 尤其在共振区及其邻域, 研究起来也难题. 对于线性碰撞系统在一类特殊的窄带噪声—受到随机扰动的正弦激励下系统次共振响应问题, Dimentberg^[14]等作了详细的研究. 本文作者^[15,16]则推广了 Dimentberg^[14]等人的结果, 研究了受到随机扰动的正弦激励下非线性碰撞系统次共振响应问题^[15]. 但正如文献[14]作者指出的那样, 在很多情况下常用的二阶滤过模型作为窄带噪声模型更合适, 故本文作者又研究了在典型的窄带噪声—二阶滤过噪声作用下非线性碰撞系统次共振响应问题^[16]. 以上研究中窄带激励都是外激, 对于参数激励研究则较少见. 本文研究在窄带噪声参数激励下线性碰撞系统主共振响应问题, 采用的窄带噪声模型为一类特殊的模型—有界噪声模型. 碰撞模型采用瞬时冲击模型, 即假设冲击时间为零, 碰撞过程只考虑能量的损失, 碰撞前后的速度变化用恢复系

2012-04-26 收到第1稿, 2012-06-09 收到修改稿.

* 国家自然科学基金项目(10772046, 50978058)、广东省自然科学基金(7010407, 10252800001000000, 05300566)和全国优秀博士学位论文作者专项资金(200954)资助项目

† 通讯作者 E-mail: ronghw@foshan.net

数来描述. 结合 Zhuravlev 变换和随机平均法对于一阶矩给出系统稳定充分必要条件的解析表达式, 对于二阶矩给出系统稳定充分必要条件的数值算法.

1 模型的提出及随机平均法

考虑受到随机噪声参数激励的单自由度线性碰撞系统

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \Omega^2[1 + \xi(t)]y = 0, & y > 0 \\ \dot{y}_+ = -ey, & y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中 y 上方的圆点表示对时间 t 的导数, $\beta > 0$ 为系统的阻尼系数, Ω 代表系统的自然频率, e 是碰撞恢复系数, $0 < e \leq 1$, $-$ 、 $+$ 分别表示碰撞前后时刻. 随机噪声 $\xi(t)$ 采用如下的有界噪声模型^[17]

$$\xi(t) = h\cos(\Omega_1 t + \sigma W(t) + \theta) \quad (2)$$

式中 h 代表随机激励的幅值, Ω_1 为随机激励的中心频率, σ 为随机扰动的强度, $W(t)$ 是标准 Wiener 过程, θ 是 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量, $\sigma W(t)$ 代表了噪声的随机扰动项, 即 $\xi(t)$ 可以看作为确定性谐和激励的频率 Ω_1 受到了强度为 $\sigma \dot{W}(t)$ 的随机扰动. $\xi(t)$ 的功率谱密度函数为^[18]

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2(\omega^2 + \Omega_1^2 + \frac{1}{4}\sigma^4)h^2}{2[(\omega + \Omega_1)^2 + \frac{1}{4}\sigma^4][(\omega - \Omega_1)^2 + \frac{1}{4}\sigma^4]} \quad (3)$$

由于 $|\xi(t)| \leq h$, 故 $\xi(t)$ 是一个有界随机过程. 改变 σ 的值可以使得 $\xi(t)$ 有不同的带宽, 当 $\sigma \rightarrow 0$ 时 $\xi(t)$ 为窄带随机过程, 本文就研究这种情况; 当 $\sigma \rightarrow \infty$ 时 $\xi(t)$ 趋于一个具有常数功率的白噪声, 这是一种典型的宽带随机过程. 另外, 适当选取 h 和 σ 的值, $\xi(t)$ 可具有大气湍流的 Dryden 谱和 Von Kaman 谱^[18], 可模拟风中湍流与地震地面运动. 因此, 有界噪声是一个合理的噪声模型, 近些年来许多学者研究了有界噪声作用下系统的响应问题.

模型(1)是一类特殊的碰撞系统, 系统的约束距离为零即约束位置就在系统平衡点, 这类系统被称为同步系统(isochronous system), 在实际中有一定的应用^[19]. 如果不考虑碰撞条件即系统退化为无碰撞系统并且随机扰动项 σ 为零时, 系统(1)就退化为带有阻尼的 Mathieu 系统, 众所周知当激励频率 Ω_1 等于系统的自然频率 Ω 的两倍时系统将

发生参数主共振, 本文就研究这种情形即假设 $\Omega_1 \approx 2\Omega$. 一般情况下方程(1)的精确解很难求得, 故有必要研究系统(1)响应的各种性质如随机稳定性等, 常见的随机稳定性有矩稳定性和几乎必然稳定性等^[20], 本文研究系统的矩稳定性.

我们用随机平均法^[21,22]进行研究, 一般说来随机平均法适用于宽带随机激励中, 而对于窄带随机激励不能直接使用, 需要经过适当的数学处理. 引入 Zhuravlev 变换^[8]

$$y = |x|, \dot{y} = \dot{x} \operatorname{sgn} x \quad (4)$$

式中 $\operatorname{sgn} x$ 是符号函数, 即当 $x > 0$ 时 $\operatorname{sgn} x = 1$ 而当 $x < 0$ 时. 显然, 通过 Zhuravlev 变换, 将在碰撞瞬间 ($x = 0$) 发生跳跃的速度 \dot{y} 转化为连续的速度 \dot{x} . 这时, 方程(1)变为

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = -2\beta\dot{x} - (1 - e)\dot{x}|\dot{x}|\delta(x) - h\Omega^2|x|\operatorname{sgn} x \cos(\Omega_1 t + \sigma W(t) + \theta) \quad (5)$$

式中 $\delta(x)$ 为 Dirac δ 函数.

系统(5)是没有碰撞条件的系统, 从而可以用各种近似方法如随机平均法等进行研究, 故在研究碰撞系统时 Zhuravlev 变换是一个很有用的工具. 这里我们研究 $e \approx 1$ 即系统(1)近似为刚性碰撞系统的情形, 同时设(5)式右端的系数 β, h, σ 都为小参数或与某个小参数成比例, 这样可以用随机平均法研究系统(5)的响应. 由于 $\Omega_1 \approx 2\Omega$, 可以引入调谐参数 $\mu = \Omega - \frac{1}{2}\Omega_1$, 显然 μ 也是一个小参数, 作变换

$$\begin{cases} x(t) = A(t) \sin\Phi(t), \\ \dot{x}(t) = \Omega A(t) \cos\Phi(t), \\ \Phi(t) = \frac{1}{2}\Omega_1 t + \varphi(t), \\ \psi(t) = \sigma W(t) + \theta \end{cases} \quad (6)$$

可将(5)式转化

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\cos\Phi}{\Omega} [-2\beta\Omega A \cos\Phi - (1 - e)\Omega^2 A \cos\Phi |A \cos\Phi| \delta(A \sin\Phi) - h\Omega^2 |A \sin\Phi| \operatorname{sgn}(\sin\Phi) \sin(2\Phi - 2\varphi + \psi)] \\ \dot{\varphi} = \mu - \frac{\sin\Phi}{\Omega A} [-2\beta\Omega A \cos\Phi - (1 - e)\Omega^2 A \cos\Phi |A \cos\Phi| \delta(A \sin\Phi) - h\Omega^2 |A \sin\Phi| \operatorname{sgn}(\sin\Phi) \sin(2\Phi - 2\varphi + \psi)] \\ d\psi = \sigma dW \end{cases} \quad (7)$$

定性区域变小;当 $|\mu|$ 减少时 $\bar{\beta}$ 也变大,当 $\mu=0$ 即系统处于参数主共振时 $\bar{\beta}$ 达到最大;而当随机扰动的强度 σ 变大时 $\bar{\beta}$ 变小,系统的稳定性区域变大,从而说明随机扰动有稳定化系统的作用.文献[23]在研究随机噪声参数激励下 Mathieu 系统的稳定性时,随机噪声也有类似的稳定化系统的作用.

下面讨论系统的二阶矩的稳定性,同样利用伊藤法则可以由方程(13)可以得到二阶矩 $E[u^2]$, $E[uv]$, $E[v^2]$ 满足的常微分方程为

$$\begin{cases} \frac{dE[u^2]}{dt} = -(2\beta_1 + \frac{\sigma^2}{4})E[u^2] - \\ (2\mu + \frac{h}{2})E[uv] + \\ \sigma^2 E[v^2], \\ \frac{dE[uv]}{dt} = (\mu - \frac{h}{4})E[u^2] - \\ (2\beta_1 + \frac{5\sigma^2}{4})E[uv] - \\ (\mu + \frac{h}{4})E[v^2] \\ \frac{dE[v^2]}{dt} = \sigma E[u^2] + (2\mu - \\ \frac{h}{2})E[uv] - (2\beta_1 + \\ \frac{\sigma^2}{4})E[v^2] \end{cases} \quad (18)$$

由常微分方程的理论可以知道 $E[u^2]$, $E[uv]$, $E[v^2]$ 稳定的充分必要条件是方程(18)系数矩阵的特征值 λ 的实部都小于零,容易知道 λ 满足的方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2\beta_1 + \frac{\sigma^2}{4} & 2\mu + \frac{h}{2} & -\sigma^2 \\ -\mu + \frac{h}{4} & \lambda + 2\beta_1 + \frac{5\sigma^2}{4} & \mu + \frac{h}{4} \\ -\sigma^2 & -2\mu + \frac{h}{2} & \lambda + 2\beta_1 + \frac{\sigma^2}{4} \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

从(19)式可以看出, λ 满足的方程是3次多项式方程,3次多项式方程根的解析表达式很复杂,给定系统参数后可以用数值方法由(19)求出 λ 的数值解 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,则系统二阶矩稳定的充分必要条件是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的实部都小于零,

$$Re(\lambda_i) < 0, \quad i=1,2,3 \quad (20)$$

类似一阶矩的情形,可以用数值方法讨论二阶矩的稳定性分叉 $\bar{\beta}$,由(20)式确定出相应的分叉点.至于三阶矩及更高阶矩的稳定性可以用伊藤法则类似讨论,相应的特征值满足的是一个4次或4次以上的多项式方程,只能用数值方法求解.

取系统参数为 $\Omega=1.0, \varepsilon=0.1, \mu=1.0, e=0.9, h=10.0$,当随机扰动强度变化时,由(17)给出的解析解和由(20)式给出的数值解得到的系统一、二阶矩的稳定性区域见图1,图中实线和虚线分别表示一、二阶矩的稳定性区域的边界.线的上面是系统的稳定区域,而线的下面则是不稳定区域.从图1可见对于一阶矩随着 σ 变大 $\bar{\beta}$ 变小,即随机扰动使得系统稳定化,而对于二阶矩则矩随着 σ 变大 $\bar{\beta}$ 先保持不变($\sigma < 1.1$)后增($\sigma \geq 1.1$).同时可以看出二阶矩的稳定性区域的边界(虚线)在实线的上方,表明二阶矩的稳定性要求强于一阶矩的稳定性,这在理论上是显然的,因为高阶矩稳定就意味着低阶矩也是稳定的.当 σ 较小时,由二种矩稳定性给出的稳定性区域基本一致,且都随着 σ 变大 $\bar{\beta}$ 变小从而使得系统稳定化.

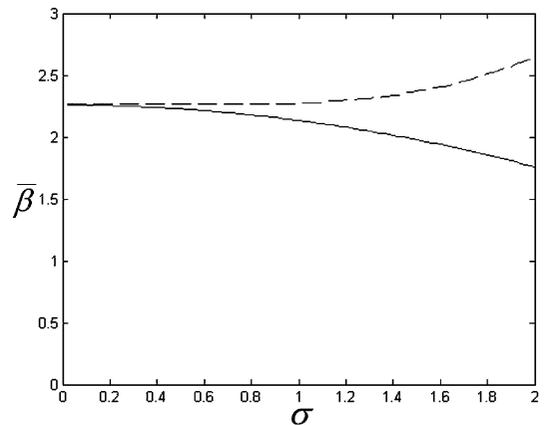


图1 系统(1)矩稳定区域($\Omega=1.0, \varepsilon=0.1, \mu=1.0, e=0.9, h=10.0$):——,一阶矩;---,二阶矩

Fig.1 Moment stability regions of system(1) ($\Omega=1.0, \varepsilon=0.1, \mu=1.0, e=0.9, h=10.0$)——, first order moments; ---, second order moments

取系统参数为 $\Omega=1.0, \varepsilon=0.1, \mu=1.0, e=0.9, \sigma=0.1, 0.5$,当随机激励的振幅 h 变化时,由(17)给出的 $\bar{\beta}$ 的解析解和由(20)式给出的数值解得到的系统一、二阶矩的稳定性区域见图2和图3.从图2和图3可见,无论相对于一阶矩还是二阶矩稳定性,随着 h 变大 $\bar{\beta}$ 变大,系统的稳定性区域变小使得系统变得不稳定.计算表明,当 σ 逐渐变

小趋于零时,由一、二阶矩给出的稳定性区域将变得一致(见图1和图3).

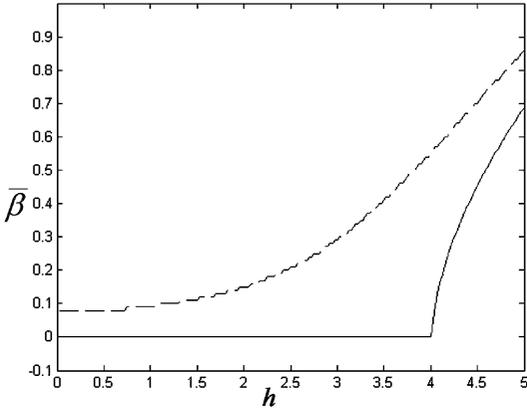


图2 系统(1)矩稳定区域($\Omega=1.0, \epsilon=0.1, \mu=1.0, e=0.9, \sigma=0.5$):——,一阶矩;----,二阶矩

Fig.2 Moment stability regions of system(1) ($\Omega=1.0, \epsilon=0.1, \mu=1.0, e=0.9, \sigma=0.5$) ——,first order moments; ----,second order moments

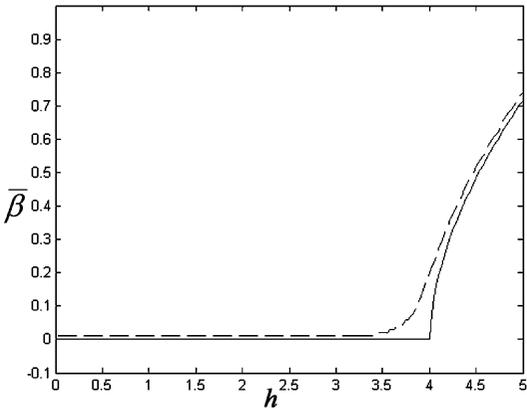


图3 系统(1)矩稳定区域($\Omega=1.0, \epsilon=0.1, \mu=1.0, e=0.9, \sigma=0.1$):——,一阶矩;----,二阶矩

Fig.3 Moment stability regions of system(1) ($\Omega=1.0, \epsilon=0.1, \mu=1.0, e=0.9, \sigma=0.1$) ——,first order moments; ----,second order moments

取系统参数为 $\Omega=1.0, \epsilon=0.1, h=10.0, e=0.9, \sigma=0.1, 0.5$,当调谐参数 μ 变化时由(17)给出的 $\bar{\beta}$ 的解析解和由(20)式给出的数值解得到的系统一、二阶矩的稳定性区域见图4和图5.从图4和图5可见,无论相对于一阶矩还是二阶矩稳定性,随着 $|\mu|$ 变小时 $\bar{\beta}$ 变大,系统的稳定性区域变小从而使得系统变得不稳定,当 $\mu=0$ 即系统为参数主共振情形时 $\bar{\beta}$ 达到最大值.当 σ 逐渐变小趋于零时,由一、二阶矩给出的稳定性区域将变得一致(见图5).

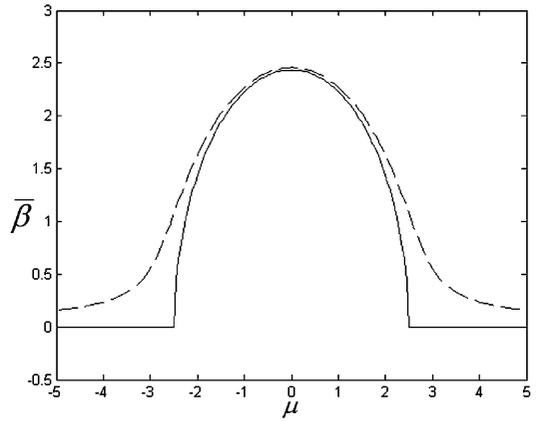


图4 系统(1)矩稳定区域($\Omega=1.0, \epsilon=0.1, h=10.0, e=0.9, \sigma=0.5$):——,一阶矩;----,二阶矩

Fig.4 Moment stability regions of system(1) ($\Omega=1.0, \epsilon=0.1, h=10.0, e=0.9, \sigma=0.5$) ——,first order moments; ----,second order moments

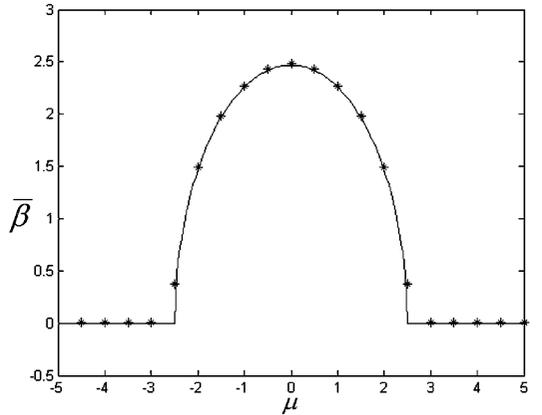


图5 系统(1)矩稳定区域($\Omega=1.0, \epsilon=0.1, h=10.0, e=0.9, \sigma=0.1$):——,一阶矩;----,二阶矩

Fig.5 Moment stability regions of system(1) ($\Omega=1.0, \epsilon=0.1, h=10.0, e=0.9, \sigma=0.1$) ——,first order moments; ----,second order moments

3 结论与讨论

本文将 Zhuravlev 变换法引入线性随机碰撞系统的响应分析中,并结合随机平均法研究了碰撞系统在有界随机噪声参数激励作用下系统的矩稳定性问题,给出了一阶矩稳定充分必要条件的解析表达式和二阶矩稳定充分必要条件的数值算法.结果表明,无论是相对于一阶矩还是二阶矩的稳定性,随着激励振幅变大系统的稳定性区域变小从而使得系统变得不稳定.而当调谐参数趋于零系统达到参数主共振情形时,系统的稳定性区域变得最小.当随机扰动强度逐渐变小趋于零时,由二种矩稳定性给出的稳定性区域变得一致.在一定的参数区域

(如 σ 不大时),随机噪声使得系统稳定化.

本文的窄带随机噪声 $\xi(t)$ 模型(2)是一种特殊的模型,即所谓的有界噪声,近些年来引起了许多学者的注意.怎样将本文的理论推广到经典的窄带随机噪声一二阶滤过噪声模型,是我们今后进一步的工作.

参 考 文 献

- 1 Brogliato B. Nonsmooth mechanics. London: Springer-Verlag, 1999
- 2 Metrikyn V S. On the theory of vibro-impact devices with randomly varying parameters. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Radiofizika*, 1970, 13:4 ~ 21 (in Russian)
- 3 Stratonovich R L. Topics in the theory of random noise (Vols. 1 and 2). New York: Gordon and Breach, 1963 and 1967
- 4 Jing H S, Sheu K C. Exact stationary solutions of the random response of a single-degree-of-freedom vibroimpact system. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 14:363 ~ 373
- 5 Jing H S, Young M. Random response of a single-degree-of-freedom vibroimpact system with clearance. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1990, 19: 789 ~ 798
- 6 Huang Z L, Liu Z H, Zhu W Q. Stationary response of multi-degree-of-freedom vibro-impact systems under white noise excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 275: 223 ~ 240
- 7 Feng J Q, Xu W, Rong H W, Wang R. Stochastic response of Duffing-Van der Pol vibro-impact system under additive and multiplicative random excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2009, 44: 51 ~ 57
- 8 Zhuravlev V F. A method for analyzing vibration-impact systems by means of special functions. *Mechanics of Solids*, 1976, 11:23 ~ 27
- 9 Iourtchenko D V, Dimentberg M F. Energy balance for random vibrations of piecewise-conservative systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 248: 913 ~ 923
- 10 Feng Q, He H. Modeling of the mean Poincaré map on a class of random impact oscillators. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2003, 22: 267 ~ 281
- 11 Iourtchenko D V, Song L L. Numerical investigation of a response probability density function of stochastic vibroimpact systems with inelastic impacts. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, 41: 447 ~ 455
- 12 Dimentberg M F, Gaidai O, Naess A. Random vibrations with strongly inelastic impacts: response PDF by the path integration method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2009, 44:791 ~ 796
- 13 Dimentberg M F, Iourtchenko D V. Random vibrations with impacts: a review. *Nonlinear Dynamics*, 2004, 36: 229 ~ 254
- 14 Dimentberg M F, Iourtchenko D V, Vanewijk O. Subharmonic response of a quasi-isochronous vibroimpact system to a randomly disordered periodic excitation. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 17: 173 ~ 186
- 15 Rong H W, Wang X D, Xu W, Fang T. Subharmonic response of a single degree of freedom nonlinear vibroimpact system to a randomly disordered periodic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 327:173 ~ 182
- 16 Rong H W, Wang X D, Xu W, Fang T. Subharmonic response of a single degree of freedom nonlinear vibro-impact system to a narrow-band random excitation. *Physical Review E*, 2009, 80: 026604
- 17 Stratonovich R. Topics in the theory of random noise (Vol. 1). New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1963
- 18 Lin Y K, Cai G Q. Probabilistic structural dynamics: advanced theory and applications, New York: Mc-Graw-Hill, 1995
- 19 Thompson J M T, Stewart H B. Nonlinear dynamics and chaos. Chichester: Wiley, 1986
- 20 Arnold L. A formula connection sample and moment stability of linear stochastic systems. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1984, 44:793 ~ 802
- 21 朱位秋. 随机振动. 北京:科学出版社,1992 (Zhu W Q. Random vibration. Beijing: Science Press, 1992 (in Chinese))
- 22 Sanders J A, Verhulst F. Averaging methods in nonlinear dynamical systems, New York: Springer-Verlag, 1985
- 23 Xie W C, Dynamic stability of structures. New York: Cambridge University Press, 2006

MOMENT STABILITY OF A SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM LINEAR VIBROIMPACT SYSTEM TO A BOUNDARY BANDOM PARAMETRIC EXCITATION *

Rong Haiwu^{1†} Wang Xiangdong¹ Luo Qizhi¹ Xu Wei² Fang Tong²

(1. Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China)

(2. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072 China)

Abstract This paper investigated the resonance response and moment stability of a single-degree-of-freedom linear vibroimpact oscillator with a one-sided barrier to boundary random parametric excitation. The analysis is based on a special Zhuravlev transformation, which reduces the system to one without impacts, or velocity jumps, thereby permitting the applications of asymptotic averaging over the period for slowly varying random process. By using the Itô's differential rule, the differential equations ruling the time evolution of the first and second order response moments were obtained. The necessary and sufficient conditions of stability for the first and second order moments are that the matrix of the coefficients of the differential equations ruling the moments have complex eigenvalues with negative real parts. The analytical expression of the stability condition of the first order moment was obtained, while the results of the second order moment stability were given numerically. Some numerical simulations and graphs were presented for representative cases. It is founded that, when the amplitude of the parametric excitation increases, the stability regions will reduce either for the first order moment or the second order moment stability. The stability regions will reduce to the minimum value if the detuning parameter tends to zero. The stability regions based on different order moments will become identical when the intensity of the random disturbance increases to zero. In some cases the stochastic excitation stabilizes the system.

Key words linear vibroimpact system, parametric principal resonance responses, moment stability, Zhuravlev transformation method, random averaging method