

# 求解非线性期权定价模型的自适应 小波同伦摄动技术

梅树立<sup>1†</sup> 索皎莉<sup>2</sup>

(1. 中国农业大学信息与电气工程学院, 北京 100083) (2. 正略钧策管理咨询有限公司, 北京 100020)

**摘要** Leland 模型是在考虑交易费用的情况下, 对 Black - Scholes 模型进行修改得到的非线性期权定价模型. 本文针对 Leland 模型, 提出了一种求解非线性动力学模型的自适应多尺度小波同伦摄动法. 该方法首先利用插值小波理论构造了用于逼近连续函数的多尺度小波插值算子, 利用该算子可以将非线性期权定价模型方程自适应离散为非线性常微分方程组; 然后将用于求解非线性常微分方程组的同伦摄动技术和小波变换的动态过程相结合, 构造了求解 Leland 模型的自适应数值求解方法. 数值模拟结果验证了该方法在数值精度和计算效率方面的优越性.

**关键词** Leland 模型, 插值小波算子, 同伦摄动技术

## 引言

期权(option)又称为选择权, 是在期货的基础上产生的一种衍生性金融工具. 1973年, Black 和 Scholes 在有效市场和股票价格遵循几何布朗运动等一系列的假设下, 运用连续交易保值策略推导出了著名的 Black - Scholes 期权定价模型, 并建立了看涨期权定价公式<sup>[2]</sup>. 与此同时, Merton 也发表了类似的期权定价公式<sup>[3]</sup>. 但 Black - Scholes 模型设置了太多的假设, 很多假设并不符合实际情况, 如无税收和交易成本, 无套利机会等<sup>[4-5]</sup>. 因此, 近20年来非线性期权定价模型一直是学术界研究的重点. 在非线性期权定价模型中可以将很多实际因素如交易费用<sup>[6-7]</sup>、无保护组合投资风险等影响股票价格、波动率、漂移率和期权价格本身的因素考虑进去<sup>[8-10]</sup>. 但很难导出非线性 Black - Scholes 方程的精确解析解<sup>[11]</sup>.

已有的数值求解方法通常先将非线性期权定价模型变形为抛物型偏微分方程, 然后采用有限差分法进行求解<sup>[11-12]</sup>. 事实上, 非线性期权定价模型变形后得到的抛物型偏微分方程的解具有明显的激波存在. 因此, 相对于其他方法, 自适应多尺度方法更有利于求解该非线性偏微分方程. 文献[13]给出了一种多尺度插值小波方法, 论文给出的数值

结果体现了这种方法的优越性. 近年来, 笔者构造了多尺度小波插值算子, 结合求解常微分方程组的同伦摄动技术导出了求解非线性偏微分方程的小波同伦摄动法. 本文的目的是将小波同伦摄动法应用于求解非线性期权定价模型的求解中.

## 1 非线性期权定价模型

### 1.1 模型描述

欧式看涨期权持有者有权在在期权到期日(T)以执行价格K购买指定数量的标的资产S(t), 期权售卖者也有义务按照执行价格卖出标的资产. 因此, 期权到期后的价值可表示为:  $V(S, T) = (S - K)^+$ . 相反, 看跌期权则是期权持有者有权将标的资产按照执行价格卖给期权售卖者, 因此, 看跌期权到期后的价值可表示为:  $V(S, T) = (K - S)^+$ . 欧式期权只能在到期日进行交易, 而美式期权可以在到期日前的任意一天进行交易. 这就导致美式期权和欧式期权的定价公式有很大区别.

Black - Scholes 模型的提出使得期权定价理论获得突破. 线性 Black - Scholes 模型的解可表示为以下偏微分方程:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = rV - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS \frac{\partial V}{\partial S} \quad (1)$$

其中  $S_t = S(t) > 0, t \in (0, T)$ . 求解该偏微分方程

便可得到欧式期权的价格,其中的参数可定义为:

(1) 标的资产的价格  $S(t)$  服从几何布朗运动  $W(t)$ , 即  $S$  满足以下随机微分方程

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t)$$

(2) 漂移项  $\mu$  (标的资产价格的平均增长率)、波动率  $\sigma$  (回归的标准偏差) 以及无风险利率  $r$  为常数.

(3) 市场无摩擦, 即不存在税收和交易成本;

(4) 股票资产在期权有效期内不支付红利及其它所得 (该假设可以被放弃);

(5) 金融市场不存在无风险套利机会;

(6) 金融资产的交易可以是连续进行的;

(7) 可以运用全部的金融资产所得进行卖空操作.

在以上假设条件下, 任何资产均可用市场上的其他资产的投资组合进行复制. 通过将线性 Black - Scholes 模型变形为热传导方程可以得到期权价格的解析解.

显然, 这些严格的假设并不符合实际情况. 如果考虑交易费用, 该模型将变为强非线性问题, 如退化对流扩散方程, 漂移率和波动率同时和时间、标的资产价格  $S$  以及期权价格  $V$  自身相关. 若将线性 Black - Scholes 模型推广为考虑交易费用的欧式期权和美式期权的非线性模型, 在这些模型中漂移率为常数而波动率为

$$\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\sigma}^2(t, S, \frac{\partial V}{\partial S}, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) \quad (2)$$

在这种情况下, 对于欧式期权, Black - Scholes 模型变为以下非线性模型

$$\frac{\partial V}{\partial t} = rV - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(t, S, \frac{\partial V}{\partial S}, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS \frac{\partial V}{\partial S} \quad (3)$$

其中  $S > 0, t \in (0, T)$ .

### 1.2 非线性模型的分析及参数变换

为求解 Leland 方程, 做以下变量变换

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right),$$

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t),$$

$$u(x, \tau) = e^{-x} \frac{V(S, t)}{K} \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式, 可得以下方程

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + D \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

其中

$$D = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad x \in R, 0 \leq \tau \leq T = \frac{\sigma^2}{2}$$

初始条件为

$$u(x, 0) = (1 - e^{-x})^+ \text{ for } x \in R$$

边界条件为

$$u(x, \tau) = 0 \text{ as } x \rightarrow -\infty$$

$$u(x, \tau) \sim 1 - e^{-D\tau - x} \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (6)$$

初始条件如图 1 所示. 由变换关系(4)可知,  $x = 0$  对应执行价格  $S = K$ . 显然, 初始解曲

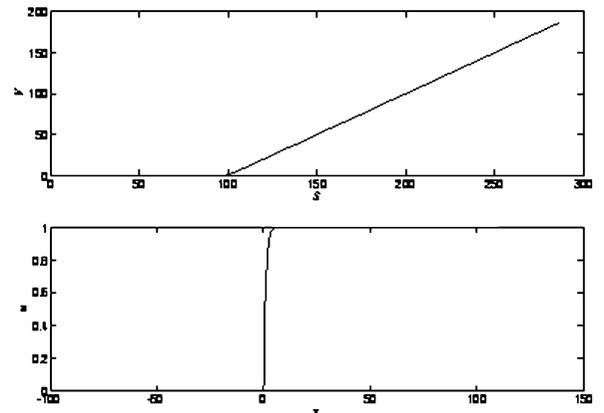


图1 Black - Scholes 模型的初始条件

Fig. 1 Initial condition of Black - Scholes model

线在  $x = 0$  处具有非常明显的激波, 其他位置为光滑曲线. 因此, 采用多尺度小波数值方法有利于同时提高数值方法的精度和求解效率.

## 2 基于 quasi - Shannon 小波的自适应插值基函数的构造

拟尺度函数定义如下:

$$\delta_{\Delta\sigma}(x) = \frac{\sin(\pi x / \Delta)}{\pi x / \Delta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7)$$

其中  $\Delta$  是离散点间距,  $\sigma = r\Delta$  ( $r$  是任意参数) 是窗口大小参数.

考虑一维函数  $f(x)$ . 为取拟 Shannon 尺度函数作为基函数, 这里按多尺度分析理论对函数  $f(x)$  在其定义域  $[a, b]$  内进行均匀离散, 不妨取离散点数为  $2^j + 1$ , (其中  $j \in Z$ ), 则变量  $x$  的离散点定义为:

$$x_j^i = a + \frac{i(b-a)}{2^j} \quad (8)$$

由此可得到基函数

$$\varphi_j^i(x) = \frac{\sin \frac{2^j \pi}{b-a}(x-x_i)}{\frac{2^j \pi}{b-a}(x-x_i)} \exp\left(-\frac{2^{2j-1}(x-x_i)^2}{r^2(b-a)^2}\right) \quad (9)$$

插值算子可按以下方式定义

$$u_j(x) = \sum_{i \in Z_\Omega} I_i(x) u_i^j, \quad Z_\Omega^j: = 0, 1, 2, \dots, 2^j \quad (10)$$

$I_i(x)$  是插值函数. 根据小波变换理论, 被逼近函数  $u(x)$  可表示为以下形式

$$u_j(x) = \sum_{k_0=0}^{2j_0} u(x_{j_0}^{k_0}) \varphi_{j_0}^{k_0}(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k \in Z^j} \alpha_j^k \psi_j^k(x) \quad (11)$$

其中  $Z^j: = 0, 1, 2, \dots, 2^j$ . 由此可得插值小波变换系数为

$$\alpha_j^k = u(x_{j+1}^{2k+1}) - \left[ \sum_{k_0=0}^{2j_0} u(x_{j_0}^{k_0}) \varphi_{j_0}^{k_0}(x_{j+1}^{2k+1}) + \sum_{j_1=j_0}^{j-1} \sum_{k_1=0}^{2j_1-1} \alpha_{j_1}^{k_1} \psi_{j_1}^{k_1}(x_{j+1}^{2k+1}) \right] = \sum_{n=0}^{2^j} [R_{j+1, J}^{2k+1, n} - \sum_{k_0=0}^{2j_0} R_{j_0, J}^{k_0, n} \varphi_{j_0}^{k_0}(x_{j+1}^{2k+1})] u(x_j^n) - \sum_{n=0}^{2^j} \sum_{j_1=j_0}^{j-1} \sum_{k_1=0}^{2j_1-1} \alpha_{j_1}^{k_1} \psi_{j_1}^{k_1}(x_{j+1}^{2k+1}) \quad (12)$$

其中  $0 \leq j \leq J-1, k \in Z^j, n \in Z^j$ .  $R$  是约束算子, 定义为

$$R_{l, j}^{i, m} = \begin{cases} 1, & x_l^i = x_j^m \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (13)$$

假定

$$\alpha_j^k = \sum_{n=0}^{2^j} c_{j, J}^{k, n} u(x_j^n) \quad (14)$$

将(14)代入(12)可得

$$c_{j, J}^{k, n} = R_{j+1, J}^{2k+1, n} - \sum_{k_0=0}^{2j_0} R_{j_0, J}^{k_0, n} \varphi_{j_0}^{k_0}(x_{j+1}^{2k+1}) - \sum_{j_1=j_0}^{j-1} \sum_{k_1=0}^{2j_1-1} c_{j_1, J}^{k_1, n} \psi_{j_1, k_1}^{k_1}(x_{j+1}^{2k+1}) \quad (15)$$

当  $j = j_0$  时

$$c_{j, J}^{k, n} = R_{j+1, J}^{2k+1, n} - \sum_{k_0=0}^{2j_0} R_{j_0, J}^{k_0, n} \varphi_{j_0}^{k_0}(x_{j+1}^{2k+1}) \quad (16)$$

将约束算子(13)和小波变换系数(14)代入(11), 可得函数  $u(x)$  的逼近解

$$u_j(x) = \sum_{i \in Z^j} \left( \sum_{k_0=0}^{2j_0} R_{j_0, J}^{k_0, n} \varphi_{j_0}^{k_0}(x_{j+1}^{2k+1}) + \right.$$

$$\left. \sum_{j_1=j_0}^{j-1} \sum_{k_1=0}^{2j_1-1} c_{j_1, J}^{k_1, n} \psi_{j_1, k_1}^{k_1}(x_{j+1}^{2k+1}) \right) u(x_j^i) \quad (17)$$

根据插值算子的定义(10), 可得插值算子的表达式为

$$I_i(x) = \sum_{k_0=0}^{2j_0} R_{j_0, J}^{k_0, n} \varphi_{j_0}^{k_0}(x) + \sum_{j_1=j_0}^{j-1} \sum_{k \in Z^j} c_{j, J}^{k, i} \psi_j^k(x) \quad (18)$$

插值算子的  $m$  阶导算子为

$$D_i^{(m)}(x) = \sum_{k_0=0}^{2j_0} R_{j_0, J}^{k_0, n} \varphi_{j_0, k_0}^m(x) + \sum_{j=j_0}^{j-1} \sum_{k \in Z^j} c_{j, J}^{k, i} \psi_{j, k}^{(m)}(x) \quad (19)$$

将(18)和(19)式代入(5)式, 便可将非线性偏微分方程变为非线性常微分方程组. 常微分方程组可采用精细积分法求解. 精细积分法的实质是指数矩阵的求解<sup>[14]</sup>.

### 3 小波同伦摄动技术

利用插值算子(18)和(19),  $u$  的逼近表达式  $u_j$  可以写为以下形式

$$u_j(x) = \sum_{i \in Z^c} I_i(x) u_{j_i} \quad (20)$$

将(20)式代入(5)式可得以下方程组:

$$\sum_{n \in Z^c} u_j(x_n, t) \left[ \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} (D_n''(x_k) + D_n'(x_k)) + D \cdot D_n'(x_k) \right] = \frac{\partial u_j(x_k, t)}{\partial t} \quad (21)$$

其中  $k \in Z^c$ . 其矢量形式表达式为

$$\frac{d}{dt} V_J = M_0 V_J + M_1 (V_J) V_J \quad (22)$$

其中

$$V_J = (u_j(x_0, t), u_j(x_1, t), \dots, u_j(x_{2^j}, t))' \quad (23)$$

$$M_0(k, n) = m_{k, n}^0 = D \cdot D_n'(x_k), k, n \in Z^c \quad (24)$$

$$M_1(k, n) = m_{k, n}^1 = \frac{\tilde{\sigma}^2(t, x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\sigma^2} (D_n''(x_k) + D_n'(x_k)), k, n \in Z^c \quad (25)$$

对非线性抛物型偏微分方程来说, 非线性项通常要做分段线性化处理, 即假定在足够小的时间步长内是线性的. 一般根据精度要求采用迭代法去自适应选取时间步长, 计算工作量很大, 影响了精细积分法在偏微分方程数值求解中的使用. 本文借鉴了近期发展起来的分析非线性问题的同伦摄动方

法,给出了一种求解非线性偏微分方程的同伦摄动技术,同 Taylor 级数展开方法相比,该方法不但计算精度高,而且对时间步长不敏感,从而有效提高了计算效率.

同伦函数的构造方法有很多,在此,针对方程(22)构造以下线性同伦函数:

经化简,得

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{dV_j}{dt} - M_0 V_j - M_1(A) V_j \right] + \\ & \varepsilon \left[ \frac{dV_j}{dt} - M_0 V_j - M_1(V_j) V_j - \right. \\ & \left. \left( \frac{dV_j}{dt} - M_0 V_j - M_1(A) V_j \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

其中  $A$  是已知初值,  $\varepsilon \in [0, 1]$  是同伦参数. 根据摄动理论,将方程(26)的解表示为参数  $\varepsilon$  的级数形式:

$$V_j = V_j^0 + \varepsilon V_j^1 + \varepsilon^2 V_j^2 + \dots \quad (27)$$

将(27)式代入方程(26),并令方程两端的  $\varepsilon$  同次幂的系数相等,得

$$\varepsilon^0: \frac{dV_j^0}{dt} = (M_0 + M_1(A)) V_j^0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: \frac{dV_j^1}{dt} &= [M_0 + M_1(A)] V_j^1 + \\ & [M_1(V_j^0) - M_1(A)] V_j^0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2: \frac{dV_j^2}{dt} &= [M_0 + M_1(A)] V_j^2 + \\ & [M_1(V_j^0) - M_1(A)] V_j^1 + \\ & M_1(V_j^1) V_j^0 \end{aligned} \quad (30)$$

方程(28)是齐次线性常微分方程组,其通解为

$$V_j^0(t) = e^{Ht} A \quad (31)$$

其中  $H = M_0 + M_1(A)$ . 方程(29)和(30)是非齐次线性常微分方程组,其通解分别为

$$V_j^1(t) = e^{Ht} (H^{-1} r_0) - H^{-1} r_0 \quad (32)$$

$$V_j^2(t) = e^{Ht} (H^{-1} r_1) - H^{-1} r_1 \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} r_0 &= (M_1(V_j^0) - M_1(A)) V_j^0, \\ r_1 &= (M_1(V_j^0) - M_1(A)) V_j^1 + \\ & M_1(V_j^1) V_j^0. \end{aligned}$$

矩阵指数函数  $e^{Ht}$  可通过精细积分方法精确求得. 将按照以上公式得到的结果代入(27)式,并取  $\varepsilon = 1$ ,便可得到方程(22)的数值解.

为提高计算精度,可令时间步长为  $\tau$ ,一系列

等步长  $\tau$  的时刻为

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_1 &= \tau, \dots, \\ t_k &= k \cdot \tau, \dots \end{aligned}$$

将方程(31) - (33)中的初始值  $A$  修改为  $t_k$  时刻的解,便可通过递推的逐步积分公式得到  $t_{k+1}$  时刻的值.

## 4 数值结果及讨论

下面以 Leland 模型为例验证小波同伦摄动法的有效性. 交易费用对期权价格的影响体现在波动率的变化上,即波动率不再是常数,而是  $t, S, V$  的函数,即

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 (1 + Le \text{sign}(V_{ss})) \quad (34)$$

其中 Leland 系数  $Le$  定义为

$$Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{\sigma \sqrt{\delta t}}$$

$\delta t$  表示两次交易之间的时间差. 显然  $\delta t$  越小,交易越频繁,从而交易费用和  $V$  值也越高.

在没有交易费的情况下,欧式看涨和看跌期权的价格  $V$  均满足  $V_{ss} > 0$ . 假设在有交易费的情况下该性质仍然成立,调整后的波动率为常数  $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 (1 + Le)$ ,则方程(2)变为线性方程.

所采用的参数为:  $\delta t = 0.01$ ,  $k = 0.05$ , 无风险利率  $r = 0.1$ , 波动率  $\sigma = 0.2$ , 执行价格  $K = 100$ ,  $T = 1$ . 数值求解结果如图 2 所示. 由此可见,自适应小波数值方法可有效捕捉看涨期权价格演化过程中梯度变换加大的位置,在激波处自适应增加配点数. 由于只是在局部增加配点,既保证了解函数在出现激波的位置处的逼近精度,也避免了非自适应方法全局增加配点所带来的计算量的增加.

此外,为验证该方法在分析期权定价方面的有效性,将 Leland 模型的小波同伦摄动解结果和线性 Black - Scholes 方程的精确结果进行了对比,其误差如图 3 所示. 两种模型得到的期权价格差异主要体现在执行价格附近,随着在执行价格附近交易量的增大,交易费用所带来的期权价格波动率的增大也体现出来. 其直接结果是非线性 Leland 模型计算得到的期权价格在执行价格附近更符合实际结果. 这也从另外一个角度验证了本文所给出的方法的有效性.

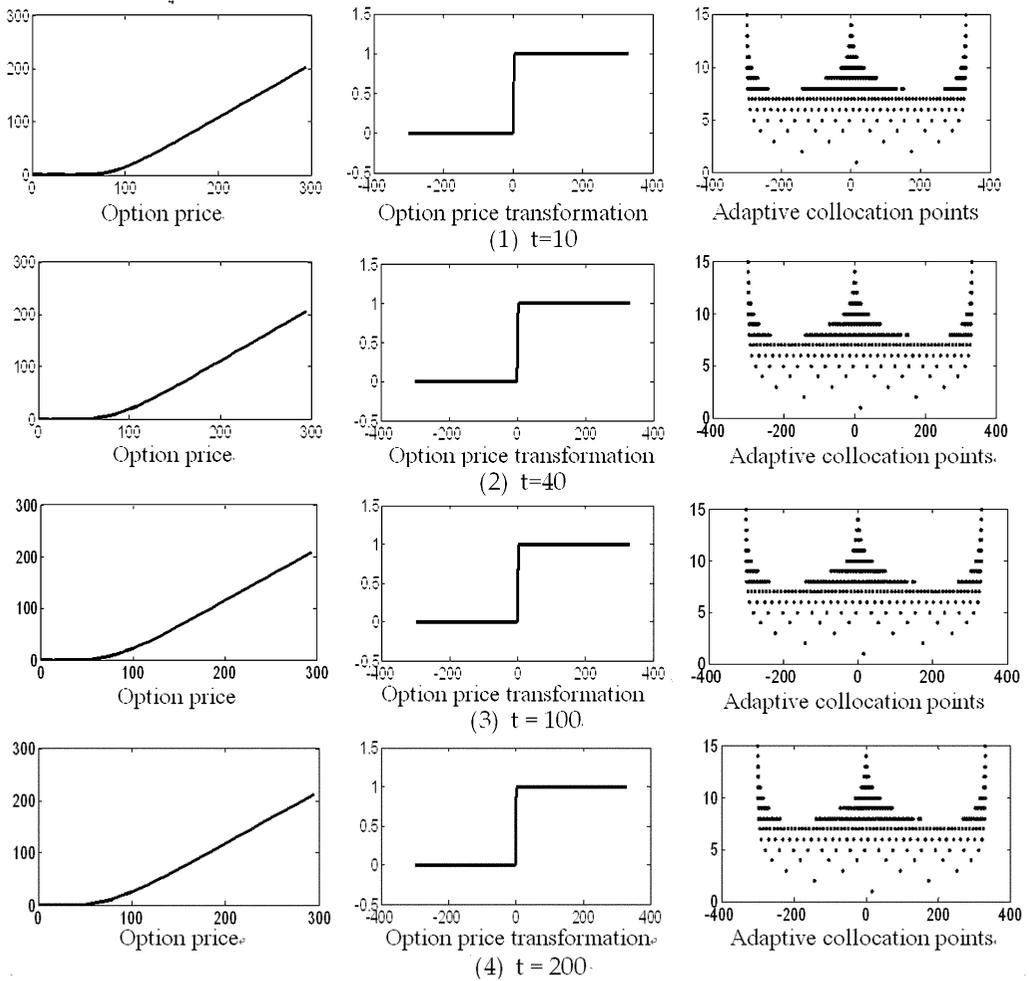
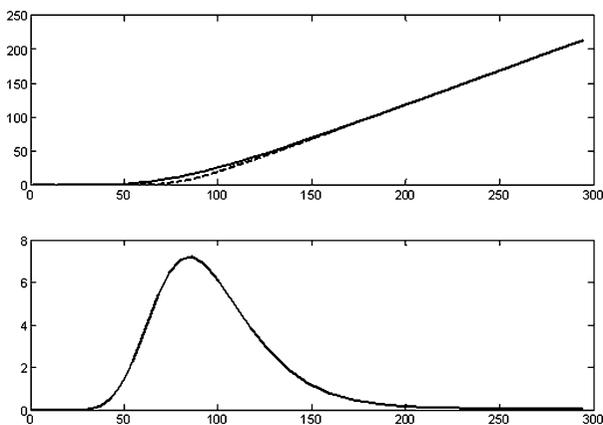
图2 看涨期权价格随参数  $t$  的演化过程Fig. 2 Evolution of the call option price with the parameter  $t$ 

图3 非线性看涨期权和线性看涨期权的差异

Fig. 3 Error of call option price between the linear and nonlinear Black-Scholes models

## 5 结论

Black-Scholes 模型不但在期权定价方面得到广泛应用,在其他金融衍生产品如期货、风险投资

等领域也得到越来越多的应用,随之而来的是不同的非线性期权定价模型不断被提出.因此,高效的数值求解方法或近似解析方法具有非常重要的理论意义和实用价值.小波数值方法其实属于一种半解析方法,充分利用了小波变换的自适应性和同伦摄动法的高效性.但我们同时注意到,同伦摄动技术仅适合弱非线性方程.将适合强非线性问题的同伦分析方法推广到非线性常微分方程组的求解中,将使该方法的应用范围更为广泛.

## 参 考 文 献

- 1 Wilmott P, Howison S, Dewynne J. The mathematics of financial derivatives. New York: Cambridge University Press, 1995
- 2 Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.*, 1973, 81(3): 637 ~ 654
- 3 Merton R C. Theory of rational option pricing. *Bell J.*

- Econ., 1973, 4(1): 141 ~ 183
- 4 Zhu Y, Wu X, Chern I. Derivative securities and difference methods. New York: Springer Finance, 2004
  - 5 Kwok Y. Mathematical models of financial derivatives. Springer, Singapore, 1998
  - 6 李正杰, 张兴永, 梁岩. 支付交易费的不确定波动率的欧式看跌期权定价. 徐州师范大学学报(自然科学版), 2010, 28(2): 35 ~ 38 (Li Z J, Zhang X Y, Liang Y. Pricing European put option based on the uncertain volatility with transaction cost. *Journal of Xuzhou Normal University (Natural Science Edition)*, 2010, 28(2): 35 ~ 38 (in Chinese))
  - 7 张卫国, 史庆盛, 肖炜麟. 考虑支付红利的可转债模糊定价模型及其算法. 管理科学学报, 2010, 13(11): 86 ~ 93 (Zhang W G, Shi Q S, Xiao W L. Fuzzy pricing model of convertible bonds with dividends payment and its algorithm. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(11): 86 ~ 93 (in Chinese))
  - 8 Leland H E. Option pricing and replication with transactions costs. *J. Finance*, 1985, 40: 1283 ~ 1301
  - 9 Boyle P, Vorst T. Option replication in discrete time with transaction costs. *J. Finance*, 1992, 47(1): 271 ~ 293
  - 10 Barles G, Soner H M. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation. *Finance Stoch*, 1998, 2: 369 ~ 397
  - 11 Julia A, Matthias E. On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, 56(3): 799 ~ 812
  - 12 蹇明, 宜娜, 张春晓. Black-Scholes 期权定价模型的五点式混合差分方法. 经济数学, 2011, 28(4): 66 ~ 70 (Jian M, Yi N, Zhang C X. Five-point form hybrid difference method for black-scholes option pricing model. *Journal of Quantitative Economics*, 2011, 28(4): 66 ~ 70 (in Chinese))
  - 13 贾尚晖, 李华. Black-Scholes 期权定价方程的自适应小波算法. 数学的实践与认识, 2010, 40(10): 193 ~ 200 (Jia S G, Li H. Black-scholes option pricing equation's adaptive wavelet algorithm. *Mathematics in Practice and Theory*, 2010, 40(10): 193 ~ 200 (in Chinese))
  - 14 梅树立, 陆启韶, 张森文. 求解非线性偏微分方程的自适应小波精细积分法. 计算物理, 2004, 21(6): 523 ~ 530 (Mei S, Zhang S W, Lu Q S. A wavelet precise integration method for burgers equations based on homotopy technique. *Chinese Journal of Computation Physics*, 2004, 21(6): 523 ~ 530 (in Chinese))

## ADAPTIVE WAVELET HOMOTOPY PERTURBATION METHOD ON NONLINEAR OPTION PRICING MODEL

Mei Shuli<sup>1†</sup> Suo Jiaoli<sup>2</sup>

(1. College of Information and Electrical Engineering, China Agricultural University University, Beijing 100083, China)

(2. Adfaith Management Consulting, Beijing 100020, China)

**Abstract** Leland model is a nonlinear option pricing equation in which the transaction cost was taken into account based on the Black-Schole model. An adaptive wavelet homotopy perturbation method based on interpolation wavelet function for nonlinear PDEs is proposed. First, an adaptive wavelet interpolation operator is constructed which can transform the nonlinear partial differential equations into a matrix differential equations; Next, the homotopy perturbation method is developed to solve the nonlinear matrix differential equation, which is a new asymptotic analytical method to solve nonlinear differential equations. Third, the exact analytical solution of the system of constant coefficient and nonhomogeneous differential equations is deduced by this method, which is simpler than traditional methods. At last, the Leland model is taken as an example to test this new method. The numerical result shows that this method possesses many merits such as higher numerical stability and high precision.

**Key words** Leland model, wavelet interpolation operator, homotopy perturbation technology