

基于 Bezier 插值方法的作大范围旋转运动 锥形悬臂梁动力学研究*

范纪华¹ 章定国^{1†} 洪嘉振²

(1. 南京理工大学理学院, 南京 210094) (2. 上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

摘要 研究了作大范围旋转运动高度和宽度均沿着梁长度方向变化的锥形悬臂梁动力学问题. 采用 Bezier 插值方法对柔性梁的变形场进行描述, 考虑柔性梁的纵向拉伸变形和横向弯曲变形, 计入由于横向弯曲变形引起的纵向缩短, 即非线性耦合项. 运用第二类拉格朗日方程推导出作旋转运动锥形梁的动力学方程, 并编制了动力学仿真软件, 对作旋转运动锥形梁的频率和动力学响应进行研究. 结果表明: 不同锥形梁截面的动力学响应和系统频率将有明显差异, 因此对实际系统合理建模, 将能得到更为精确的结果.

关键词 锥形梁, Bezier 插值方法, 锥度比, 固有频率

引言

旋转悬臂柔性梁的动力学建模和振动研究在机械工程领域具有重要的应用背景, 如直升机旋翼、涡轮机叶片、柔性机械臂等. 1921年, Southwell、Gough^[1]利用 Rayleigh 能量理论对旋转运动柔性梁的固有频率进行研究, 推导出著名的 Southwell 方程来求解旋转悬臂柔性梁的固有频率; 随后, Wright 等^[2]采用 Hamilton 原理和 Frobenius 方法推导了梁固有频率和振型的精确解; Yoo 等^[3]采用 Rayleigh - Ritz 假设模态法和达朗贝尔原理研究旋转悬臂梁固有频率和振型的数值解; 方建士等^[4]对固结于转动刚体上外接柔性梁的刚柔耦合动力学建模和频率特性进行研究, 指出文献[3]的相关结论值得商榷.

上述研究的重点主要是等截面梁模型, 而在实际工程实例中, 梁截面一般不是等截面, 而采用等截面梁模型进行简化建模势必产生误差, 进而影响对该类结构动力学特性的分析. 采用与实际结构相符的锥形梁建模将更加合理. Khulief Y. A^[5]对带有集中质量作旋转运动的锥形梁固有频率进行研究, 得到大量重要的图表; 随后, Bazoune^[6]对考虑剪切变形的作旋转运动锥形 Timoshenko 梁固有频率进行研究, 并与 Euler - Bernoulli 梁进行对比; 文献[7]着重研究了中心刚体 - 变截面梁系统的动

力学特性, 指出梁宽比、梁高比以及梯形梁变截面位置对系统动力学特性产生重要影响.

本文对作旋转运动锥形梁的动力学问题进行研究, 采用第二类拉格朗日方程和 Bezier 插值方法, 考虑柔性梁的纵向拉伸变形和横向弯曲变形, 计入由于横向弯曲变形引起的纵向缩短, 即非线性耦合项, 推导出作旋转运动锥形梁的动力学方程, 并编制动力学仿真软件. 基于动力学仿真软件, 对锥形梁的频率和动力学响应进行研究.

1 作旋转运动锥形悬臂梁运动学描述

1.1 作旋转运动锥形悬臂梁的物理模型

考虑图 1(a) 所示刚柔耦合系统, 中心刚体做定轴转动, 其上以悬臂方式连接柔性锥形梁, 研究系统绕 Z 轴旋转的平面运动问题. 图 1(b) 为锥形梁正视图, 代表梁高度沿梁长方向的变化趋势; 图 1(c) 为锥形梁仰视图, 表示梁宽度方向沿梁长方向的变化趋势. 梁的参数为: 梁长为 L , c 为梁宽度和高度的锥度比, τ 为刚体上合外力关于 Z 轴的力矩, 刚体绕 Z 轴的转动惯量为 J_{oh} , 半径为 r_H , $S(x)$ 为截面面积, $I(x)$ 为截面绕与 Z 轴平行截面中心轴的惯性矩, ρ 、 E 为梁的密度以及弹性模量, 梁的横截面积 $S(x)$ 以及抗弯刚度 $EI(x)$ 表示为:

$$S(x) = S_0 \left(1 - c \frac{x}{L}\right)^{n_1 + n_2} \quad (1)$$

2012-04-26 收到第 1 稿, 2012-07-28 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11132007, 10772085, 11272155), 江苏省“青蓝工程”, 江苏省“333 工程”科研项目资助计划(BRA2011172), 南京理工大学自主科研专项计划(2011YBXM32)

† 通讯作者 E-mail: zhangdg419@mail.njust.edu.cn

$$EI(x) = EI_0(1 - c \frac{x}{L})^{n_1 + 3n_2} \quad (2)$$

其中 S_0, I_0 为锥形梁悬臂端的横截面积和截面惯性矩, n_1, n_2 分别为梁高度以及宽度的截面变化系数, 本文主要选择 0 和 1 两种情况考虑. 如取 $n_1 = 0$ 时, 梁高度将不随截面位置而变化; 同理 $n_2 = 0$ 代表梁宽度不随截面位置变化. 如取 $n_1 = n_2 = 1$, 则梁高度以及宽度变化如图 1(b)、(c) 所示. 锥度比 c 的取值范围为 $0 < c < 1$, 当 $c = 0$ 时梁为等截面梁; 而当 $c = 1$ 时, 梁自由端理论上将变为一个点.

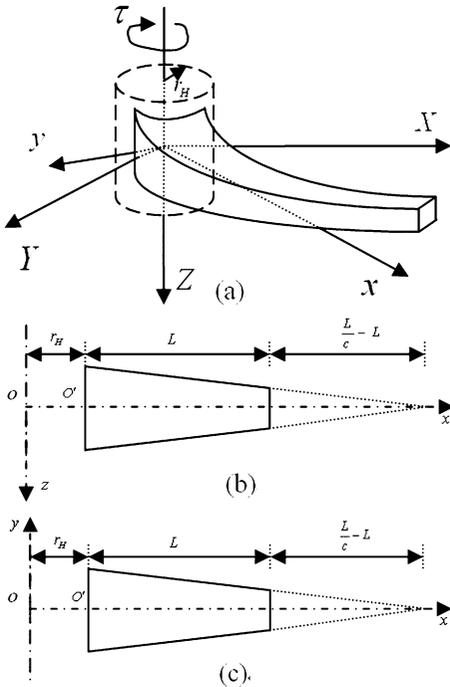


图1 作旋转运动锥形悬臂梁的物理模型

Fig.1 Physical model of a rotating tapered cantilever beam

1.2 锥形悬臂柔性梁运动学和变形描述

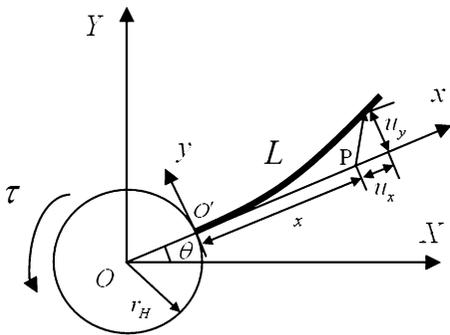


图2 锥形悬臂柔性梁变形示意图

Fig.2 The deformation of the tapered cantilever beam

图2是锥形悬臂柔性梁的结构平面变形位移图, 过刚体转动中心建立惯性坐标系 OXY , 在柔性

梁上建立浮动坐标系 $o'xy$. 从惯性坐标系 OXY 原点 O 引往柔性梁上某点 P 变形后的矢径为:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}_0 + \vec{u} \quad (3)$$

式(3)中, \vec{r}_A 为刚体质心 O 至浮动坐标基点 o' 矢径, $\vec{\rho}_0$ 为点 P 变形前在浮动基中的矢径, \vec{u} 为该点的变形位移矢量, 浮动基下的坐标为:

$$\begin{cases} u_x = w_1 + w_c \\ u_y = w_2 \end{cases} \quad (4)$$

式中, w_1 为轴向伸长变形量, w_2 为横向弯曲变形量. w_c 是横向弯曲变形引起的纵向缩短量, 即非线性耦合变形量, 为:

$$w_c = -\frac{1}{2} \int_0^x (\frac{\partial w_2}{\partial \xi})^2 d\xi \quad (5)$$

设 Θ 为浮动基相对于惯性坐标系的方向余弦矩阵, 矢径 \vec{r} 在惯性基下的坐标阵为:

$$\vec{r} = \Theta(\vec{r}_A + \vec{\rho}_0 + \vec{u}) \quad (6)$$

式中, $\vec{r}_A = (r_H, 0)^T$, $\vec{\rho}_0 = (x, 0)^T$, $\vec{u} = (u_x, u_y)^T$, $\Theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 式(6)对时间 t 求导, 点 P 的速度为:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\Theta}(\vec{r}_A + \vec{\rho}_0 + \vec{u}) + \Theta \dot{\vec{u}} \quad (7)$$

系统的动能和变形势能可表示为:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\rho} \dot{\vec{r}}^T \dot{\vec{r}} dV + \frac{1}{2} J_{oh} \dot{\theta}^2 \quad (8)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L ES (\frac{\partial w_1}{\partial x})^2 dx + \frac{1}{2} EI (\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2})^2 dx \quad (9)$$

1.3 Bezier 插值方法离散柔性梁变形场

贝齐尔采用特征多边形顶点的变形与伯恩斯坦基函数的线性组合表示曲线任意位置的变形:

$$r(\varepsilon) = \sum_{i=0}^m J_{m,i}(\varepsilon) V_i \quad (10)$$

其中 m 为 Bezier 曲线的次数, i 为特征多边形顶点的序号, $0 \leq i \leq m$, ε 为参数, $0 \leq \varepsilon \leq 1$. V_i 是特征多边形顶点的变形, $J_{m,i}(\varepsilon)$ 是伯恩斯坦基函数:

$$J_{m,i}(\varepsilon) = C_m^i \varepsilon^i (1 - \varepsilon)^{m-i} \quad (11)$$

$$C_m^i = \frac{m!}{i! (m-i)!} \quad (12)$$

梁的轴向伸长和横向弯曲变形可表示为:

$$\begin{cases} w_1 = [J] \{a\} \\ w_2 = [J] \{b\} \end{cases} \quad (13)$$

其中:

$$[J] = [J_{m,0}(\frac{x}{L}), J_{m,1}(\frac{x}{L}), \dots, J_{m,m}(\frac{x}{L})]$$

$$\begin{aligned} \{a\} &= [a_0, a_1, \dots, a_m]^T \\ \{b\} &= [b_0, b_1, \dots, b_m]^T \end{aligned} \quad (14)$$

其中 a_i, b_i 分别为梁轴向和横向的特征多边形顶点的变形时间变量, a_0, b_0, b_1 决定梁悬臂端轴向变形、横向变形和转角, 本文研究悬臂梁, 梁悬臂端轴向变形、横向变形以及转角为零, 即 a_0, b_0, b_1 为零. 采用 Bezier 插值离散的悬臂梁上任意点轴向变形和横向弯曲变形可表示为:

$$\begin{cases} w_1 = \Phi_x(x) \mathbf{A}(t) \\ w_2 = \Phi_y(x) \mathbf{B}(t) \end{cases} \quad (15)$$

其中, $\Phi_x(x) = R^{1 \times N_x}$ 和 $\Phi_y(x) = R^{1 \times N_y}$ 分别为梁的轴向振动和横向振动的伯恩斯坦基函数行向量, $\mathbf{A}(t) \in R^{N_x}$ 和 $\mathbf{B}(t) \in R^{N_y}$ 分别为轴向振动和横向振动的 Bezier 插值控制顶点变形列向量(广义坐标变量), 分别为:

$$\begin{cases} \Phi_x(x) = [J_{N_x,1}(\frac{x}{L}), J_{N_x,2}(\frac{x}{L}) \dots J_{N_x,N_x}(\frac{x}{L})] \\ \mathbf{A}(t) = [a_1, a_2, \dots, a_{N_x}]^T \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \Phi_y(x) = [J_{N_y+1,2}(\frac{x}{L}), J_{N_y+1,3}(\frac{x}{L}) \dots \\ J_{N_y+1,N_y+1}(\frac{x}{L})] \\ \mathbf{B}(t) = [b_1, b_2, \dots, b_{N_y+1}]^T \end{cases} \quad (17)$$

横向弯曲变形引起的纵向缩短量为:

$$w_c = -\frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{B} \quad (18)$$

式中耦合形函数 $\mathbf{H}(x) \in R^{N_y \times N_y}$ 为

$$\mathbf{H}(x) = \int_0^x \left(\frac{\partial \Phi_y^T(\xi)}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \Phi_y(\xi)}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (19)$$

2 系统动力学方程

将 Bezier 插值离散的梁的纵向变形和横向变形代入系统动能和势能表达式(8)、(9)中, 取广义坐标 $\mathbf{q} = (\theta, \mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T)^T$, 运用第二类拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F}_q \quad (20)$$

式中 $\mathbf{F}_q = (\tau, 0, 0)^T$. 考虑到变形耦合项 w_c 是横向位移 w_2 的二阶小量, 在动能展开时可作适当简化, 舍去与 w_c 相关的一些高阶项, 可得系统的动力学方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & 0 \\ \mathbf{M}_{31} & 0 & \mathbf{M}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{A}} \\ \ddot{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_\theta \\ \mathbf{Q}_A \\ \mathbf{Q}_B \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中:

$$\mathbf{M}_{11} = J_{oh} + J_{ob} + 2\mathbf{S}_x \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{M}_2 \mathbf{B} - \underline{\mathbf{B}^T (r_H \mathbf{C} + \mathbf{D}) \mathbf{B}} \quad (22)$$

$$\mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{12}^T = -\mathbf{M}_3 \mathbf{B} \quad (23)$$

$$\mathbf{M}_{31} = \mathbf{M}_{13}^T = \mathbf{S}_y^T + \mathbf{M}_3^T \mathbf{A} \quad (24)$$

$$\mathbf{M}_{22} = \mathbf{M}_1 = \int_0^L \rho \mathbf{S} \Phi_x^T \Phi_x dx \quad (25)$$

$$\mathbf{M}_{33} = \mathbf{M}_2 = \int_0^L \rho \mathbf{S} \Phi_y^T \Phi_y dx \quad (26)$$

$$\mathbf{Q}_\theta = \tau - 2\dot{\theta} [\mathbf{S}_x \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{B}^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{B}} - \underline{\mathbf{B}^T (r_H \mathbf{C} + \mathbf{D}) \dot{\mathbf{B}}}] \quad (27)$$

$$\mathbf{Q}_A = \dot{\theta}^2 \mathbf{S}_x^T + 2\dot{\theta} \mathbf{M}_3 \dot{\mathbf{B}} + (\dot{\theta}^2 \mathbf{M}_1 - \mathbf{K}_1) \mathbf{A} \quad (28)$$

$$\mathbf{Q}_B = \dot{\theta}^2 (\mathbf{M}_2 - \underline{r_H \mathbf{C} - \mathbf{D}}) \mathbf{B} - 2\dot{\theta} \mathbf{M}_3 \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_2 \mathbf{B} \quad (29)$$

由于耦合建模方法在变形位移中考虑了二次耦合变形量, 在动力学方程中增加了附加耦合项(用下划线表示), 这些附加的耦合项出现在广义质量阵和力阵中. 式(22)~(29)中相关的常系数矩阵表达式如下:

$$J_{ob} = \int_0^L \rho (r_H + x)^2 S(x) dx \quad (30)$$

$$\mathbf{S}_x = \int_0^L \rho (r_H + x) S(x) \Phi_x(x) dx \quad (31)$$

$$\mathbf{S}_y = \int_0^L \rho (r_H + x) S(x) \Phi_y(x) dx \quad (32)$$

$$\mathbf{M}_3 = \int_0^L \rho S(x) \Phi_x^T \Phi_y dx \quad (33)$$

$$\mathbf{C} = \int_0^L \rho S(x) \mathbf{H}(x) dx \quad (34)$$

$$\mathbf{D} = \int_0^L \rho x S(x) \mathbf{H}(x) dx \quad (35)$$

$$\mathbf{K}_1 = \int_0^L ES(x) \Phi_x'^T \Phi_x' dx \quad (36)$$

$$\mathbf{K}_2 = \int_0^L EI(x) \Phi_y''^T \Phi_y'' dx \quad (37)$$

3 大范围运动已知的动力学仿真

大范围运动规律已知时, 通过方程(21)可得柔性悬臂梁的动力学方程为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{22} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{A}} \\ \ddot{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A - \mathbf{M}_{21} \ddot{\theta} \\ \mathbf{Q}_B - \mathbf{M}_{31} \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (38)$$

令中心刚体半径 $r_H = 0$, 梁的参数取为: 梁长 $L = 8\text{m}$, 梁悬臂端横截面积 $S_0 = 7.2968 \times 10^{-5} \text{m}^2$, 截面

惯性矩 $I_0 = 8.2189 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, 体积密度 $\rho = 2.7667 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 6.8952 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. 假定悬臂梁由静止开始做大范围旋转运动, 大范围运动角速度规律取与文献[8]相同, 为:

$$\dot{\theta} = \begin{cases} \frac{\Omega_0}{T}t - \frac{\Omega_0}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{T}t), & 0 \leq t \leq T \\ \Omega_0 & t > T \end{cases} \quad (39)$$

其中, $T = 15 \text{ s}$, 柔性梁在 $T = 15 \text{ s}$ 时达到角速度 Ω_0 , 随后以恒定角速度 Ω_0 运动, 取 $\Omega_0 = 4 \text{ rad/s}$.

图3给出 $\Omega_0 = 4 \text{ rad/s}$ 时等截面柔性梁末端横向弯曲变形, Bezier 插值方法的横向弯曲变形用点线与有限元法的实线、假设模态法的短划线区分开, 从图中可看出 Bezier 插值离散方法的仿真结果与有限元法以及假设模态法的仿真结果相吻合, 并与文献[8]中图3的仿真结果一致.

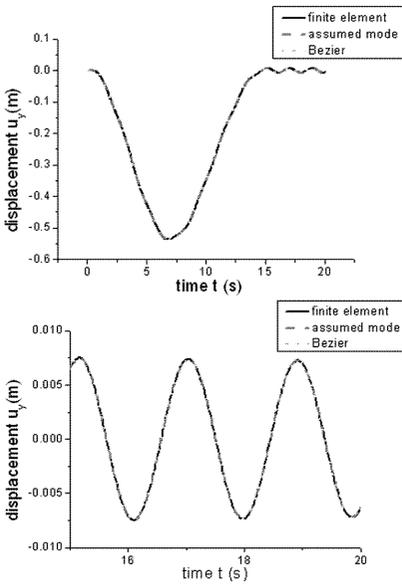


图3 柔性梁末端的横向变形

Fig. 3 The transverse deformation of the tip of the beam

图4~6分别给出 $\Omega_0 = 4 \text{ rad/s}$ 时不同锥形截面梁末端的横向变形. 图4表示高度不随长度变化, 仅宽度随长度 x 线性变化(即 $n_1 = 0, n_2 = 1$) 锥形梁末端横向变形, 如图所示, 锥形梁末端变形位移随着锥度比的增加而减小; 图5表示高度随着长度 x 线性变化, 而宽度不随长度 x 变化(即 $n_1 = 1, n_2 = 0$) 锥形梁末端横向变形, 从图中可知, 锥形梁末端变形随着锥度比的增加而减小; 图6表示高度以及宽度均随长度 x 线性变化(即 $n_1 = n_2 = 1$) 锥形梁末端横向变形, 如图所示, 锥形梁末端变形随着锥度比的增加而减小, 且减小速率大于前两种情况.

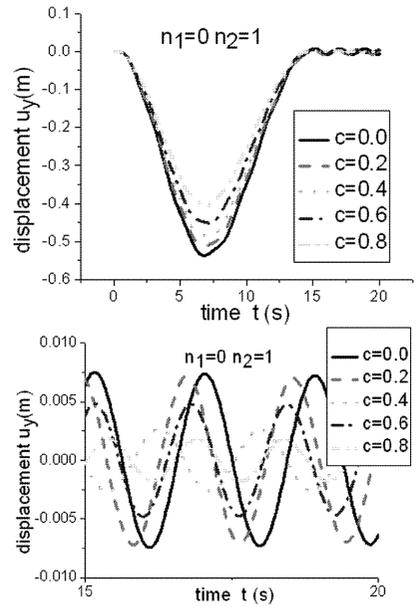


图4 不同锥度比下梁末端的横向变形($n_1 = 0, n_2 = 1$)

Fig. 4 The transverse deformation of the tip of the beam with different taper ratios for $n_1 = 0, n_2 = 1$

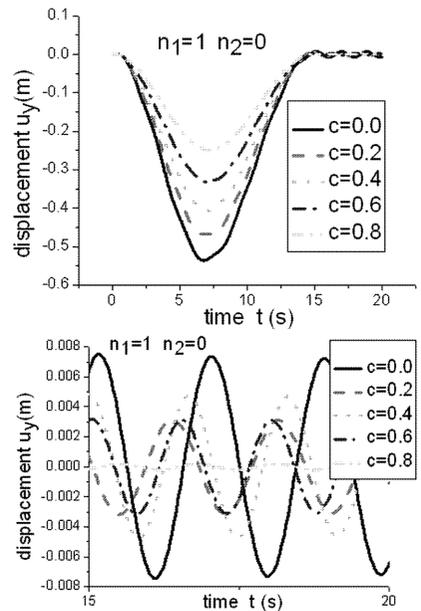


图5 不同锥度比下梁末端的横向变形($n_1 = 1, n_2 = 0$)

Fig. 5 The transverse deformation of the tip of the beam with different taper ratios for $n_1 = 1, n_2 = 0$

表1 大范围运动恒定下锥形梁末端响应频率

Table 1 The response frequency of the tip of the tapered beam when the angular velocity is constant

c	4rad/s			
	$n_1 = 0$	$n_2 = 1$	$n_1 = 1$	$n_2 = 0$
0.2	0.551724	0.562588	0.583090	0.650195
0.4	0.575540	0.606061	0.669120	0.749813
0.6	0.609760	0.669120	0.7692308	0.907716
0.8	0.666667	0.7692308		

表 1 表示大范围运动恒定时锥形梁末端响应频率对比,如表可示,三种锥形梁的响应频率均随锥度比的增加而增加。

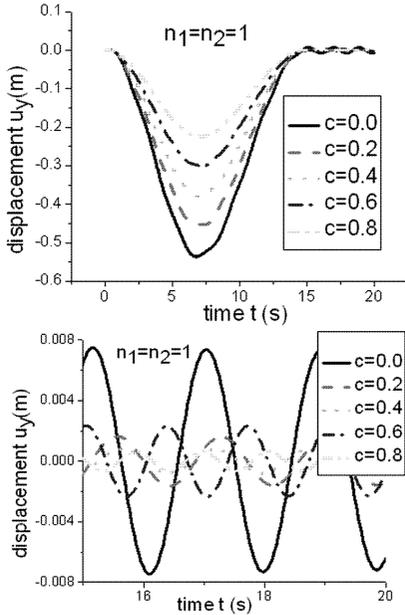


图 6 不同锥度比下柔性梁末端的横向变形 ($n_1 = 1, n_2 = 1$)

Fig. 6 The transverse deformation of the tip of the beam with different taper ratios for $n_1 = 1, n_2 = 1$

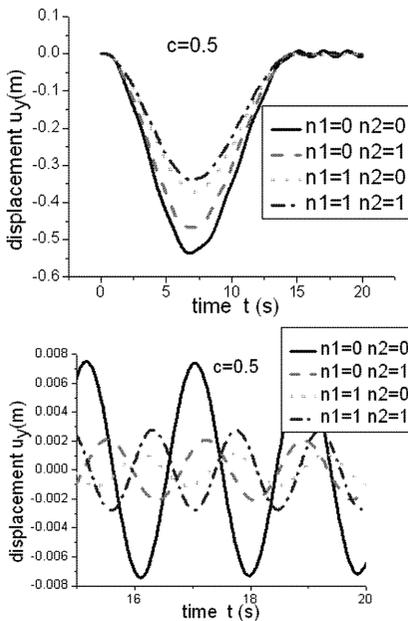


图 7 不同 n_1, n_2 柔性梁末端的横向变形

Fig. 7 The transverse deformation of the tip of the beam with different n_1 and n_2

图 7 给出锥度比为 $c = 0.5$ 时柔性锥形梁末端的横向变形,如图所示,与等截面梁末端横向弯曲变形相比,高度以及宽度方向均沿长度 x 线性变化的变形最小,仅高度沿长度 x 线性变化的其次,而

仅宽度方向沿长度 x 线性变化的最大.这说明高度变化的影响大于宽度的影响。

4 作旋转运动锥形悬臂梁横向弯曲固有频率分析

为了简化分析,假定大范围运动角速度恒定,即 $\dot{\theta} = 0$. 忽略悬臂锥形梁的纵向振动效应,则锥形梁的横向弯曲振动方程可由式 (21) 得到:

$$M_2 \ddot{B} + [\dot{\theta}^2 (D - M_2) + K_2] B = 0 \quad (40)$$

表 2 $c = 0.5, n_1 = 0, n_2 = 1$ 时恒定角速度变化的锥形梁前四阶频率

Table 2 The four lowest natural frequencies of the tapered beam for $c = 0.5, n_1 = 0, n_2 = 1$

C = 0.5	$n_1 = 0$	$n_2 = 1$	Natural frequencies (Hz)			
(rad/s)	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4		
0	0.50379	2.4183	6.7168	19.12		
1	0.51055	2.443	6.7409	19.135		
2	0.52951	2.5157	6.8125	19.181		
3	0.55755	2.6325	6.9303	19.2584		
4	0.59115	2.7879	7.0921	19.365		
5	0.62754	2.976	7.2949	19.502		
6	0.66487	3.1908	7.5357	19.668		
7	0.70209	3.427	7.811	19.863		
8	0.73871	3.6804	8.1172	20.085		
9	0.77451	3.9474	8.4511	20.335		
10	0.80946	4.2252	8.8094	20.61		
12	0.87712	4.8055	9.5881	21.234		
16	1.0064	6.0282	11.33	22.75		
24	1.2589	8.591	15.234	26.625		
36	1.6499	12.544	21.537	33.793		

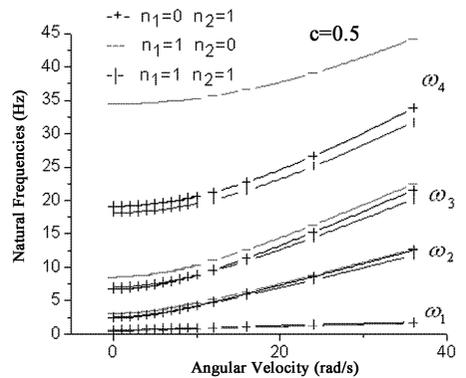


图 8 随旋转角速度变化的不同锥形截面梁前四阶频率比较

Fig. 8 The four lowest natural frequencies of the different tapered beam with the angular velocity

式中 M_2 为动力柔化项, D 是动力刚化阵, 是考虑横向弯曲变形引起的纵向缩短量(即非线性耦合量) w_c 而产生的, 整体上 $D - M_2$ 产生动力刚化效应, 而 K_2 则是结构动力学中的静刚度阵. 求解方程 (40) 时, 令:

$$B = Y \sin(\omega t + \alpha) \quad (41)$$

代入方程(40)得:

$$\omega^2 M_2 B = [\dot{\theta}^2 (D - M_2) + K_2] B \quad (42)$$

对于作旋转运动锥形悬臂梁的横向弯曲振动频率的求解问题就转化为方程(42)的特征值数值解问题, ω 就是需要求解的固有频率.

表3 $c=0.5, n_1=1, n_2=0$ 时恒定角速度变化的锥形梁前四阶频率

Table 3 The four lowest natural frequencies of the tapered beam for $c=0.5, n_1=1, n_2=0$

beam for $c=0.5, n_1=1, n_2=0$				
C=0.5	$n_1=0$	$n_2=1$	Natural frequencies(Hz)	
(rad/s)	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0	0.56847	3.1174	8.5418	34.454
1	0.57319	3.136	8.5614	34.462
2	0.5868	3.1912	8.6201	34.488
3	0.60779	3.2813	8.7169	34.53
4	0.63422	3.4036	8.8508	34.589
5	0.66427	3.5551	9.02	34.665
6	0.69642	3.7322	9.2226	34.757
7	0.72963	3.9315	9.4564	34.866
8	0.76321	4.1499	9.7192	34.992
9	0.79677	4.3846	10.009	35.133
10	0.83011	4.6329	10.322	35.291
12	0.89588	5.1627	11.015	35.654
16	1.0246	6.3137	12.605	36.562
24	1.2806	8.804	16.301	39.048
36	1.6787	12.718	22.451	44.16

表4 $c=0.5, n_1=1, n_2=1$ 时恒定角速度变化的锥形梁前四阶频率

Table 4 The four lowest natural frequencies of the tapered beam for $c=0.5, n_1=1, n_2=1$

beam for $c=0.5, n_1=1, n_2=1$				
C=0.5	$n_1=0$	$n_2=1$	Natural frequencies(Hz)	
(rad/s)	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0	0.60937	2.5789	7.0572	18.167
1	0.61564	2.5994	7.0763	18.182
2	0.63349	2.66	7.1332	18.224
3	0.66055	2.7581	7.2271	18.295
4	0.69393	2.8899	7.3569	18.393
5	0.73107	3.0511	7.5206	18.519
6	0.77005	3.2371	7.7164	18.671
7	0.80961	3.4436	7.942	18.85
8	0.849	3.6669	8.1951	19.055
9	0.8878	3.9039	8.4733	19.284
10	0.92582	4.152	8.7743	19.537
12	0.99935	4.6736	9.4361	20.111
16	1.1379	5.7826	10.946	21.505
24	1.3983	8.1285	14.423	25.072
36	1.7884	11.772	20.161	31.68

表2~4表示大范围运动为恒定角速度时锥形截面柔性梁的前四阶频率,从表2~4中可知,锥形梁的频率随着恒定角速度 $\dot{\theta}$ 的增大而增大.图8为

大范围运动为恒定角速度时,随着恒定角速度的增加,三种不同锥形梁的前四阶频率对比图,如图可知,仅高度沿长度 x 线性变化(即 $n_1=1, n_2=0$)的锥形柔性悬臂梁的频率变化比其它两种锥形截面的大,且该第三阶频率与第四阶的频率空间很大;而高度以及宽度均沿长度 x 线性变化(即 $n_1=n_2=1$)的锥形柔性悬臂梁的频率变化与仅宽度沿长度 x 线性变化(即 $n_1=0, n_2=1$)的相差不大,可知宽度变化对锥形梁的影响将大于高度的变化,亦可从式(2)中得到,宽度变化对梁抗弯刚度的影响大于高度变化的.

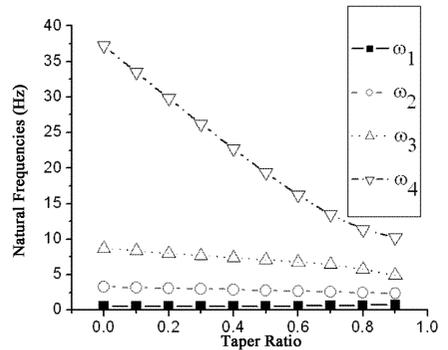


图9 梁前四阶频率随锥度比 c 变化($n_1=0, n_2=1$)

Fig. 9 The natural frequencies with respect to the taper ratio for the four lowest modes of the beam (Table 5)

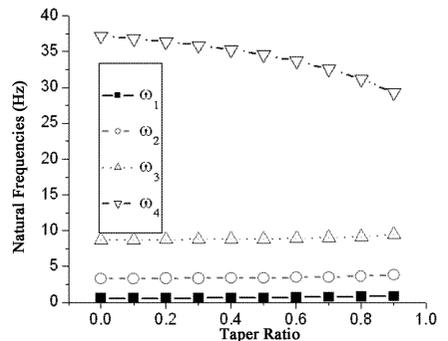


图10 梁前四阶频率随锥度比 c 变化($n_1=1, n_2=0$)

Fig. 10 The natural frequencies with respect to the taper ratio for the four lowest modes of the beam (Table 6)

表5~7给出大范围运动为恒定角速度($\dot{\theta} = 4\text{rad/s}$)时,三种不同锥形梁的前四阶频率随锥度比的变化.当锥度比 $c=0$ 时,三种情况的锥形梁均为等截面梁,该锥度比下的第一阶固有频率与文献[9]给出的0.532HZ一致.图9~11表示大范围运动为恒定角速度($\dot{\theta} = 4\text{rad/s}$)时,三种锥形梁的前四阶频率随锥度比 c 变化图,从图中可见,三种情况锥形梁的第一阶频率均随锥度比 c 的增加而增加;当 $n_1=0, n_2=1$ 与 $n_1=1, n_2=1$ 时,梁的第2~

4 阶频率均随锥度比 c 的增加而减小;而当 $n_1 = 1, n_2 = 0$ 时,锥形梁的第 1~3 阶频率随锥度比 c 的增加而增加,第 4 阶频率随锥度比 c 的增加而减小.图 11 中前四阶频率变化趋势与文献[10]中图 3 无量纲频率变化趋势一致.

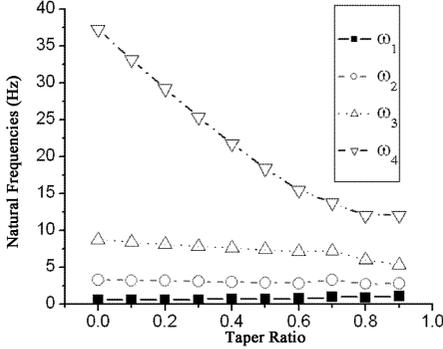


图 11 梁前四阶频率随锥度比 c 变化 ($n_1 = 1, n_2 = 1$)

Fig. 11 The natural frequencies with respect to the taper ratio for the four lowest modes of the beam (Table 7)

表 5 $\dot{\theta} = 4\text{rad/s}, n_1 = 0, n_2 = 1$ 时梁前四阶频率随锥度比的变化

Table 5 The natural frequencies with the taper ratio for

$\dot{\theta} = 4\text{rad/s}, n_1 = 0, n_2 = 1$				
4rad/s	$n_1 = 0$	$n_2 = 1$	Natural frequencies(Hz)	
c	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0	0.53273	3.2722	8.7248	37.241
0.1	0.54117	3.1835	8.3565	33.509
0.2	0.55087	3.0909	8.0103	29.833
0.3	0.56208	2.994	7.6868	26.23
0.4	0.57529	2.8929	7.3838	22.727
0.5	0.59115	2.7879	7.0921	19.365
0.6	0.61075	2.6806	6.7853	16.224
0.7	0.63587	2.5729	6.3959	13.454
0.8	0.66991	2.467	5.7878	11.349
0.9	0.72038	2.3654	4.9325	10.257

表 6 $\dot{\theta} = 4\text{rad/s}, n_1 = 1, n_2 = 0$ 时梁前四阶频率随锥度比的变化

Table 6 The natural frequencies with the taper ratio for

$\dot{\theta} = 4\text{rad/s}, n_1 = 1, n_2 = 0$				
4rad/s	$n_1 = 0$	$n_2 = 1$	Natural frequencies(Hz)	
c	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0	0.53273	3.2722	8.7248	37.241
0.1	0.54745	3.2909	8.7385	36.853
0.2	0.5643	3.3123	8.7561	36.411
0.3	0.58376	3.3372	8.779	35.899
0.4	0.60671	3.3669	8.8094	35.302
0.5	0.63422	3.4036	8.8508	34.589
0.6	0.66821	3.4513	8.9095	33.719
0.7	0.71166	3.5175	8.9979	32.625
0.8	0.77	3.6198	9.1445	31.194
0.9	0.85421	3.8068	9.4389	29.27

表 7 $\dot{\theta} = 4\text{rad/s}, n_1 = 1, n_2 = 1$ 时梁前四阶频率随锥度比的变化

Table 7 The natural frequencies with the taper ratio for

$\dot{\theta} = 4\text{rad/s}, n_1 = 1, n_2 = 1$				
4rad/s	$n_1 = 0$	$n_2 = 1$	Natural frequencies(Hz)	
c	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0	0.53273	3.2722	8.7248	37.241
0.1	0.55596	3.2012	8.3769	33.167
0.2	0.58257	3.1268	8.069	29.204
0.3	0.61349	3.049	7.8023	25.382
0.4	0.64998	2.969	7.5719	21.752
0.5	0.69393	2.8899	7.3569	18.393
0.6	0.74831	2.8173	7.0976	15.458
0.7	0.81795	2.7592	6.6643	13.221
0.8	0.91129	2.7243	5.9551	12.034
0.9	1.0433	2.7416	5.3156	12.027

5 结论

本文采用第二类拉格朗日方程和 Bezier 插值离散方法,推导了符合工程实际需要的作大范围旋转运动锥形悬臂梁刚柔耦合结构动力学模型.模型不仅考虑了大范围旋转带来的刚柔耦合作用,而且考虑了横向弯曲变形与轴向变形的相互耦合作用.最后对作旋转运动锥形梁的频率和动力学响应进行研究,得到以下结论:(1)不同锥形梁截面将对柔性变形产生影响,高度变化的影响大于宽度的影响.(2)旋转悬臂梁的频率随不同锥形梁截面而变化, $n_1 = 1, n_2 = 1$ 和 $n_1 = 0, n_2 = 1$ 情况下的频率变化趋势相同,而 $n_1 = 1, n_2 = 0$ 情况下锥形梁的频率变化趋势与其它两种有很大不同,则说明宽度随长度线性变化的锥形梁截面对频率的影响大于高度随长度变化的锥形梁截面.(3)当 $n_1 = 1, n_2 = 0$ 情况下,锥形梁的第 3 阶频率与第 4 阶频率的空间范围很大,这将有利于在该区间设置结构工作频率,将大大增加结构工作安全频率范围.

参 考 文 献

- 1 Southwell R, Gough F. The free transverse vibration of air-screw blades. *British A. R. C. Report and Memoranda*, 1921: 766 ~ 782
- 2 Wright A, Smith C, Thresher R. and Wang J. vibration modes of centrifugally stiffened beams. *Journal of applied mechanics*, 1982, 49: 197 ~ 202

- 3 Yoo H H, Shin S H. Vibration analysis of rotating cantilever beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 212 (5): 807 ~ 828
- 4 方建士, 章定国. 旋转悬臂梁的刚柔耦合动力学建模与频率分析. *计算力学学报*, 2012, 29 (3): 333 ~ 339 (Fang J S, Zhang D G. Rigid-flexible coupling dynamic modeling and frequency analysis of a rotating cantilever beam. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, 29(3): 333 ~ 339 (in Chinese))
- 5 Khulief Y. A. vibration frequencies of a rotating tapered beam with end mass. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, 134: 87 ~ 97
- 6 Bazoune A, Khulief Y. A. A finite beam element for vibration analysis of rotating tapered Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 156(1): 141 ~ 164
- 7 陈思佳, 章定国. 中心刚体-变截面梁系统的动力学特性研究. *力学学报*, 2011, 43(4): 790 ~ 794 (Chen S J, Zhang D G. Dynamics of hub-variable section beam system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(4): 790 ~ 794(in Chinese))
- 8 蔡国平, 洪嘉振. 旋转运动柔性梁的假设模态方法研究. *力学学报*, 2005, 37(1): 48 ~ 56 (Cai G P, Hong J Z. Assumed mode method of a rotating flexible beam. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(1): 48 ~ 56 (in Chinese))
- 9 Cai GP, Hong JZ, Yang S. X. Dynamic analysis of a flexible hub-beam system with tip mass. *Mechanics Research Communications*, 2005, 32: 173 ~ 190
- 10 Ozdemir O, Kaya M. O. Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 289: 413 ~ 420

DYNAMIC ANALYSIS OF A ROTATING TAPERED CANTILEVER BEAM BASED ON BEZIER CURVE INTERPOLATION *

Fan Jihua¹ Zhang Dingguo^{1†} Hong Jiazhen²

(1. School of sciences, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

(2. Department of engineering mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract The natural frequencies and the dynamic response of a rotating tapered cantilever Euler-Bernoulli beam were investigated. The height and the width of the tapered beam vary linearly along its length. The approach of Bezier curve interpolation was used to describe the deformation of the flexible beam. Both the transversal and the longitudinal deformations of the flexible beam were considered. And in the total longitudinal deformation, the non-linear coupling term, also known as the longitudinal shortening caused by transversal deformation, was considered. The rigid-flexible coupling dynamic equations of the system were established via employing the second kind of Lagrange's equation. A software package for the dynamic simulation of the rotating tapered cantilever beam was developed. Then the natural frequencies and the dynamic response of the rotating tapered cantilever beam were investigated and compared. The simulation shows that dynamics response and natural frequencies of different tapered beams will be significantly different. Reasonable modeling of the actual system will be necessary to get more accurate simulation results.

Key words tapered beam, Bezier curve interpolation, taper ratio, natural frequency