

# 考虑非线性轮轨关系的高速客车横向动力学研究\*

马彪<sup>†</sup> 丁旺才 李国芳  
(兰州交通大学机电工程学院, 兰州 730070)

**摘要** 随着列车运行速度的提高,高速客车横向稳定性一直是近年来研究的热点. 建立9自由度半车数学模型,利用数值方法对该系统的横向稳定性与分岔问题进行了研究,得到车辆系统发生蛇行运动时的临界速度及分岔后各运动状态的转变过程. 结果表明系统超过临界速度后会发生复杂的动力学行为,包括单周期、两周期、混沌运动等,并且由对称向不对称,最后再向对称运动转化.

**关键词** 轮轨碰撞, 分岔, 混沌, 蛇行运动

## 引言

高速车辆在运行中存在很多的非线性因素,如非线性蠕滑力、非线性几何接触等等,车辆系统非线性动力学一直以来都是研究的热点. 文[1]中建立了轮对的非线性模型,并用谐波平衡法研究蛇行运动. 文[2]中首先注意到非线性因素的影响,将纵向和横向蠕滑力(不考虑自旋蠕滑)进行非线性修正来研究车辆的非线性行为. 文[3]中考虑干摩擦力和轮轨相互碰撞作用等非线性因素,建立了3自由度的货车转向架非线性横向振动的数学模型,应用数值方法研究了该模型蛇行运动的 Hopf 分岔和临界速度,

积分法对其进行数值模拟,得到1位轮对横向位移分岔图,通过 Poincare 截面绘制了构架横向位移分岔图;另外根据关键速度下1位轮对的相图和庞加莱映射图可判定系统做何种运动以及轮轨碰撞情况(对称碰撞或不对称碰撞).

## 1 半车系统数学模型

考虑车体的横移  $y_c$  和侧滚  $\phi_c$ , 构架的横移  $y_l$ 、摇头  $\psi_l$  和侧滚  $\phi_l$ , 轮对的横移  $y_{wi}$  和摇头  $\psi_{wi}$  ( $i=1, 2$ ), 共9个自由度(不考虑车体的摇头<sup>[4]</sup>), 其状态向量  $X = (y_{w1}, \psi_{w1}, y_{w2}, \psi_{w2}, y_l, \psi_l, \phi_l, y_c, \phi_c)$ .

### 1.1 非线性轮轨接触几何关系

车轮采用锥形踏面,其轮轨接触几何参数可近似认为是轮对横移量  $y_w$  的非线性函数:

$$\begin{cases} r_l, r_r = r_0 \pm \lambda y_w \\ \delta_l, \delta_r = \delta_0 \pm \varepsilon_0 y_w / a_0 \\ \phi_w = \sigma y_w / a_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $r_l, r_r$  为左、右轮滚动圆半径,  $\delta_l, \delta_r$  为左、右轮轨接触角,  $\phi_w$  为轮对侧滚角,  $r_0$  为车轮名义滚动圆半径,  $\delta_0$  为轮对居中时左、右轮接触角,  $\varepsilon_0$  为轮对横移时引起的接触角变化参数,  $\sigma$  为侧滚角参数,  $\lambda$  为车轮踏面斜度,  $a_0$  为轮轨接触点横向距离之半, 当下标为  $l$  时,  $\pm, \mp$  取上面的符号, 下标为  $r$  时,  $\pm, \mp$  取下面的符号(后同).

### 1.2 轮轨非线性接触力

轮对纵向、横向、自旋蠕滑率分别为<sup>[5]</sup>:

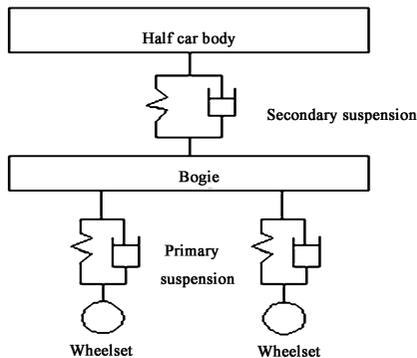


图1 半车模型  
Fig. 1 The half railway vehicle model

发现蛇行运动存在两个 Hopf 分岔不变圈, 其中一个稳定的, 另一个则是不稳定的. 本文建立了更加完善的力学模型和车辆运动数学模型, 采用直接

2012-05-28 收到第1稿, 2012-06-18 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11162007)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: 565349374@qq.com

$$\begin{cases} \xi_{x(l,r)} = \frac{v + \psi_w \dot{y}_w + r_{(l,r)} (\psi_w \dot{\phi}_w - \Omega) \mp a_0 \dot{\psi}_w}{v} \\ \xi_{y(l,r)} = \frac{-v \psi_w + \dot{y}_w + r_{(l,r)} \dot{\phi}_w}{v \cos(\delta_{(l,r)})} \\ \xi_{sp(l,r)} = \frac{m(\Omega - \psi_w \dot{\phi}_w) \sin(\delta_{(l,r)}) + \dot{\psi}_w \cos(\delta_{(l,r)})}{v} \end{cases} \quad (2)$$

上式中  $l, r$  分别表示左、右轮;  $v$  为车辆行驶速度,  $\Omega = v/r_0$  为车轮滚动角速度. 根据 Kalker 线性蠕滑理论, 轮轨间蠕滑力可表示为:

$$\begin{cases} f_x = -f_{11} \xi_x \\ f_y = -f_{22} \xi_y - f_{23} \xi_{sp} \\ m_z = f_{23} \xi_y - f_{33} \xi_{sp} \end{cases} \quad (3)$$

式中  $f_{11}$   $f_{22}$   $f_{23}$   $f_{33}$  分别为纵向、横向、横向/旋转、自旋蠕滑系数. 根据沈氏蠕滑理论对上述线性蠕滑力进行非线性修正, 引入修正参数  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 - \frac{\beta}{3} + \frac{\beta^2}{27} & \beta \leq 3 \\ \frac{1}{\beta} & \beta > 3 \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $\beta = \frac{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}{\mu N}$ ,  $\mu$  为轮轨间摩擦系数,  $N$  为轮轨

法向力. 最后得到非线性蠕滑力为:

$$\begin{cases} F'_x = \varepsilon f_x \\ F'_y = \varepsilon f_y \\ M'_z = \varepsilon m_z \end{cases} \quad (5)$$

将上述得出的蠕滑力和蠕滑力矩转化到轨道坐标系内才能运用到系统运动微分方程中, 具体转化关系为:

$$\begin{aligned} F_{(l,r)x} &= F'_{(l,r)x} \cos(\psi_w) - \\ & F'_{(l,r)y} \cos(\delta_{(l,r)} \pm \phi_w) \sin(\psi_w) \\ F_{(l,r)y} &= F'_{(l,r)x} \sin(\psi_w) + \\ & F'_{(l,r)y} \cos(\delta_{(l,r)} \pm \phi_w) \cos(\psi_w) \\ F_{(l,r)z} &= \pm F'_{(l,r)z} \sin(\delta_{(l,r)} \pm \phi_w) \\ M_{(l,r)x} &= \pm M'_{(l,r)z} \sin(\delta_{(l,r)} \pm \phi_w) \sin(\psi_w) \\ M_{(l,r)y} &= \mp M'_{(l,r)z} \sin(\delta_{(l,r)} \pm \phi_w) \cos(\psi_w) \\ M_{(l,r)z} &= M'_{(l,r)z} \cos(\delta_{(l,r)} \pm \phi_w) \end{aligned} \quad (6)$$

### 1.3 法向力与轮缘力

$N_{lz}$   $N_{rz}$   $N_{ly}$   $N_{ry}$  分别为轮对左、右轮所受法向力在  $z$  轴、 $y$  轴上的分量, 其值为:

$$N_{(l,r)z} = 0.5W \quad (7)$$

$$N_{(l,r)y} = \mp N_{(l,r)z} \tan(\delta_{(l,r)} \pm \phi_w) \quad (8)$$

式中  $W$  为轴载荷.

轮缘力可以假设成刚度很大的弹簧, 可以表示为一段线性函数:

$$F_t = \begin{cases} k_0(y_w - \eta) & y_w > \eta \\ 0 & |y_w| \leq \eta \\ k_0(y_w + \eta) & y_w < -\eta \end{cases} \quad (9)$$

其中  $k_0$  为弹簧刚度,  $\eta$  为轮轨间隙.

### 1.4 一系和二系悬挂作用力

1). 一系悬挂横向力、纵向力、垂向力 ( $i=1 \sim 2$ )

$$\begin{aligned} F_{yf(l,r)i} &= K_{py} [y_{wi} - y_t + H_{tw} \phi_t + (-1)^i l_t \psi_t] + \\ & C_{py} [\dot{y}_{wi} - \dot{y}_t + H_{tw} \dot{\phi}_t + (-1)^i l_t \dot{\psi}_t] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} F_{xf(l,r)i} &= K_{px} (\pm d_w \psi_t \mp d_w \psi_{wi}) + \\ & C_{px} (\pm d_w \dot{\psi}_t \mp d_w \dot{\psi}_{wi}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F_{zf(l,r)i} &= K_{pz} (\pm d_w \phi_{wi} \mp d_w \phi_t) + \\ & C_{pz} (\pm d_w \dot{\phi}_{wi} \mp d_w \dot{\phi}_t) \end{aligned} \quad (12)$$

2) 二系悬挂横向力、纵向力、垂向力

$$\begin{aligned} F_{yt(l,r)} &= K_{sy} [y_t - y_c + H_{Bt} \phi_t + H_{cB} \phi_c] + \\ & C_{sy} [\dot{y}_t - \dot{y}_c + H_{Bt} \dot{\phi}_t + H_{cB} \dot{\phi}_c] \end{aligned} \quad (13)$$

$$F_{xt(l,r)} = K_{sx} (\mp d_s \psi_t) + C_{sx} (\mp d_s \dot{\psi}_t) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} F_{zt(l,r)} &= K_{sz} (\pm d_s \phi_t \mp d_s \phi_c) + \\ & C_{sz} (\pm d_s \dot{\phi}_t \mp d_s \dot{\phi}_c) \end{aligned} \quad (15)$$

式中,  $K_{py}$   $C_{py}$   $K_{px}$   $C_{px}$   $K_{pz}$   $C_{pz}$  分别为一系悬挂横向、纵向、垂向刚度和阻尼,  $d_s$  为二系悬挂横向距离之半;  $H_{cB}$  为二系悬挂上平面至车体质心的距离;  $H_{Bt}$  为构架质心至二系悬挂下平面的距离;  $H_{tw}$  为构架质心到轮对中心垂向距离;  $d_w$  为一系悬挂横向距离之半;  $l_t$  为转向架轮对定距之半.

### 1.5 半车模型动力学方程

$$M_w \ddot{y}_{wi} = -F_{yfl} - F_{yfr} + F_{lyi} + F_{ryi} + N_{lyi} + N_{ryi} - F_{ti} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} I_{wz} \ddot{\psi}_{wi} &= a_0 (F_{rx} - F_{lx}) + M_{lzi} + M_{rzi} + \\ & a_0 \psi_{wi} (F_{lyi} + N_{lyi} - F_{ryi} - N_{ryi}) + \\ & d_w (F_{yfl} - F_{yfr}) - I_{wy} \dot{\phi}_{wi} \Omega \end{aligned} \quad (17)$$

$$M_t \ddot{y}_t = F_{yfl} + F_{yfl2} + F_{yfr1} + F_{yfr2} - F_{ytl} - F_{ytr} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} I_{tz} \ddot{\psi}_t &= I_t (F_{yfl} + F_{yfr} - F_{ytl} - F_{ytr}) + d_w (F_{yfr1} + \\ & F_{yfr2} - F_{yfl1} - F_{yfl2}) + d_s (F_{xtl} - F_{xtr}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} I_{tx} \ddot{\phi}_t &= -H_{tw} (F_{yfl} + F_{yfr} + F_{yfl2} + F_{yfr2}) + \\ & d_w (F_{yfl1} + F_{yfl2} - F_{yfr1} - F_{yfr2}) + d_s (F_{xtl} - \\ & F_{xtr}) - H_{Bt} (F_{ytl} + F_{ytr}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$M_c \ddot{y}_c = F_{ytl} + F_{ytr} \quad (21)$$

$$I_{cx} \ddot{\phi}_c = -H_{cB}(F_{ytl} + F_{ytr}) + d_s(F_{ztl} - F_{ztr}) \quad (22)$$

## 2 数值分析

代入高速客车相关参数<sup>[6]</sup>,图2给出了1位轮对最大横向位移分岔图(选取车辆行驶速度作为分岔变量),由图可以看出当速度小于65.9m/s时,系统是稳定的,受激励以后最终会衰减到零,65.9m/s即为系统的非线性临界速度,也就是系统首次出现极限环对应的速度;并且随着速度的增大,极限环幅值也逐渐增大,直至速度增至134m/s,单周期运动结束。

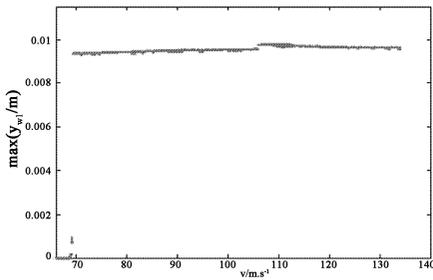


图2 1位轮对最大横向位移分岔图

Fig.2 Bifurcation diagram of the largest lateral amplitude of 1-wheelset

为进一步研究系统在超过134m/s后的运动状态,选取 $\dot{y}_i = 0, y_i < 0$ 为Poincare截面.图3为通过Poincare截面绘制的构架横向位移分岔图:

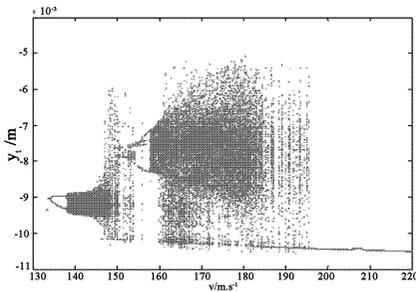


图3 构架分岔图

Fig.3 The bifurcation diagram of framework

从图3可以看出,当速度超过134m/s时,系统作两周期运动,随着速度的提高,仅从分岔图上不能确切区分系统作何种运动(拟周期运动或者混沌运动),因此必须通过其它图形进行分析。

几个关键速度下的相图和庞加莱映射图:

- (1)  $v = 120\text{m/s}$ ;
- (2)  $v = 136\text{m/s}$ ;

$$(3) v = 139\text{m/s};$$

$$(4) v = 165\text{m/s};$$

$$(5) v = 210\text{m/s};$$

1)图4说明系统作单周期运动,并且相图中极限环左右轨迹相同,所以此速度下系统与左右轨道碰撞为对称碰撞。

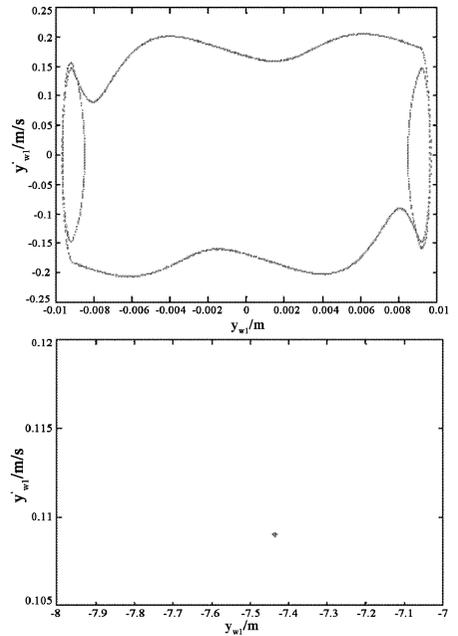


图4 1位轮对运动相图和庞加莱映射图

Fig.4 The phase and poincare map plot of 1-wheelset

2)图5说明系统作2周期运动,并且相图中极限环左右轨迹不同,所以此速度下系统与左右轨道碰撞为不对称碰撞。

3)图6中相轨线左右轨迹不同,说明此速度下系统与左右轨道碰撞为不对称碰撞,另外根据庞加莱映射图为典型的混沌吸引子,可判定此速度下系统处于混沌状态。

4)图7庞加莱映射图为一一些杂乱无序的点,说明系统处于混沌状态。

5)图8说明系统作单周期运动,并且相图中极限环左右轨迹相同,所以此速度下系统与左右轨道碰撞为对称碰撞。

## 3 结论

1)研究结果表明:当速度低于65.9m/s时,系统处于稳定状态,各刚体的运动位移最终趋向于

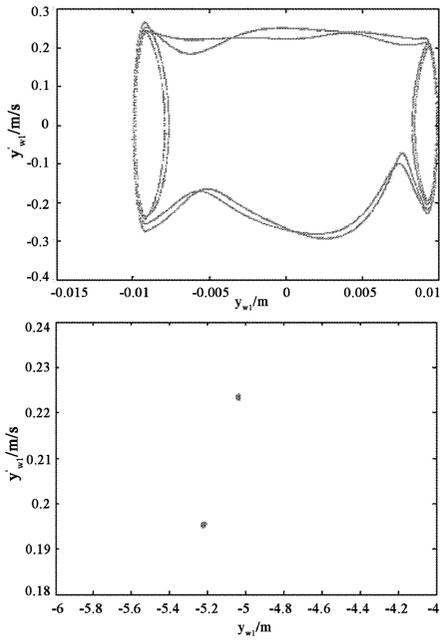


图5 1位轮对运动相图和庞加莱映射图

Fig.5 The phase and poincare map plot of 1 - wheelset

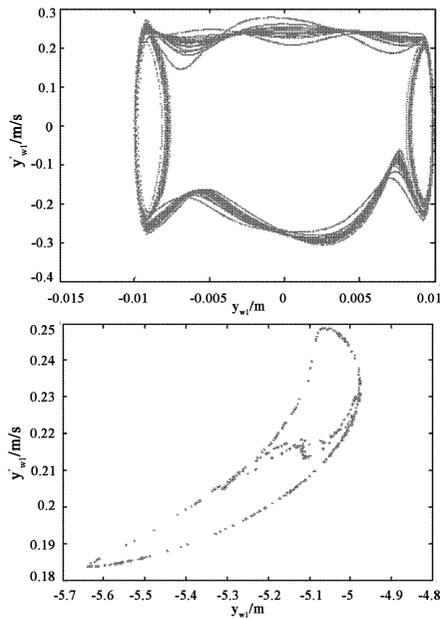


图6 1位轮对运动相图和庞加莱映射图

Fig.6 The phase and poincare map plot of 1 - wheelset

零,其相图为渐进稳定的焦点;当系统速度在 65.9 - 134m/s 范围内时,各刚体的相图为一封闭的极限环,并且随着速度的增大,极限环的幅值也随之增大;当速度大于 134m/s 时,系统表现出复杂的动力学行为,首先由单周期变为两周期运动,然后进入混沌状态;随着速度的增大,系统重新进入单周期 - 双周期 - 混沌运动的转变过程。

2) 轮轨碰撞方面,由上述关键速度下的相图可以看出,系统在超过临界速度后首先由对称碰撞变

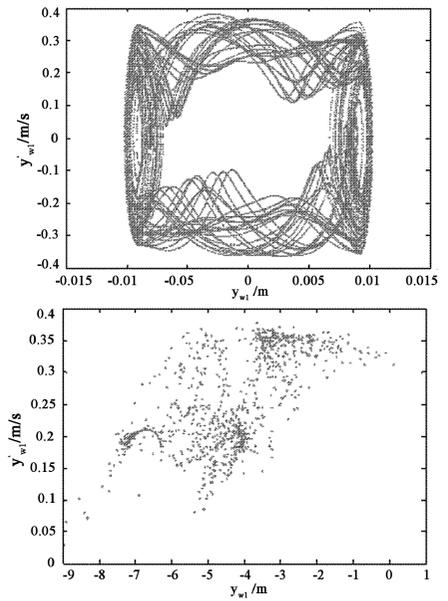


图7 1位轮对运动相图和庞加莱映射图

Fig.7 The phase and poincare map plot of 1 - wheelset

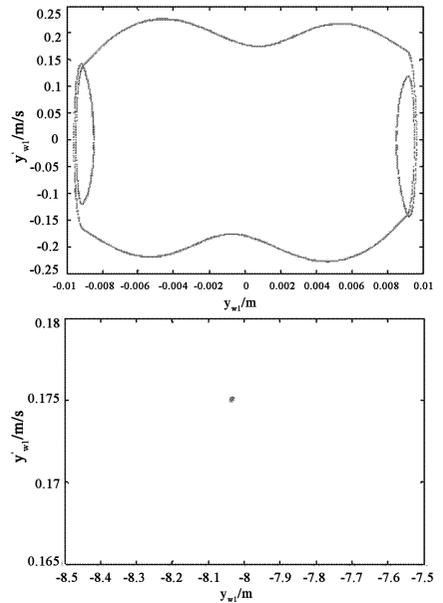


图8 1位轮对运动相图和庞加莱映射图

Fig.8 The phase and poincare map plot of 1 - wheelset

为不对称碰撞,最终又转变为对称碰撞,运动形式复杂,所以为保证行车安全,车辆行驶速度一定不能超过临界速度。

3) 半车模型虽较之于整车模型有了较大的简化,但是能准确反映出各个速度下系统的运动状态,而且大大减少了计算时间,因此可以作为分析高速客车横向和垂向问题的一种有效手段。

## 参 考 文 献

- 1 De Pater A D. A nonlinear model of a single wheelset moving with constant speed on a purely straight track. *Int Journal Non-linear Mechanics*, 1980,15(4-5):315~324
- 2 Cooperrider N K. The hunting behavior of conventional railway tracks. *ASME Journal of Engineering and Industry*, 1972, 94: 752~762
- 3 丁旺才,谢建华,王俊涛. 考虑轮轨碰撞的转向架蛇行振动的非线性分析. 兰州理工大学学报, 2004,30(1): 45~49 (Ding W C, Xie J H, Wang J T. Nonlinear analysis of hunting vibration of truck due to wheel-rail impact. *Journal of Lanzhou University of Technology*, 2004,30(1): 45~49 (in Chinese))
- 4 吕可维. 车辆系统非线性动力学问题研究[博士学位论文]. 成都:西南交通大学,2004(Lv K W. Study on the nonlinear dynamic problems for railway vehicle systems [PhD Thesis]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2004 (in Chinese))
- 5 高学军. 铁道客车系统横向运动对称/不对称分岔行为与混沌研究[博士学位论文]. 成都:西南交通大学, 2010(Gao X J. Study on symmetric/asymmetric bifurcation and chaos of lateral motion of railway passenger car system [PhD Thesis]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2010 (in Chinese))
- 6 翟婉明. 车辆-轨道耦合动力学(第三版). 北京:科学出版社,2007(Zhai W M. Vehicle-track coupling dynamics (3rd Edition). Beijing: China Science Press, 2007 (in Chinese))

## STUDY ON LATERAL DYNAMICS OF HIGH-SPEED RAILWAY PASSENGER CAR DUE TO NONLINEAR WHEEL-RAIL RELATION\*

Ma Biao<sup>†</sup> Ding Wangcai Li Guofang

(School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract** With the development of the train's speed, the lateral stability of high-speed passenger car is the research focus in recent years. A mathematical model of half railway vehicle model is established with 9 degree freedom. Numerical method is used to study the system's lateral stability and bifurcation problems, the critical speed and transition process of motion state are obtained. The results indicate that some complex dynamical behavior included simple periodic, two periodic, chaotic motion and so on are existed, and it changes from symmetric to asymmetric, finally changes into symmetric motion, which are found beyond critical speed.

**Key words** wheel-rail impact, bifurcation, chaos, hunting motion