

火炮振动分析与多体系统模型研究*

王德石[†] 史跃东

(海军工程大学兵器工程系, 武汉 430033)

摘要 研究火炮振动对于提高射击精度有重要意义. 冲击激励的特殊性和机械系统的复杂性, 使火炮振动成为长期关注的经典问题, 建立逼近火炮真实运动状态的动力学模型、分析掌握各种冲击作用下的振动特性, 是火炮振动的核心研究分支. 本文在发展多刚体与多柔体系统动力学理论的基础上, 研究了火炮动力学的 Lagrange 方程及 Guass 变分建模方法, 并由其建立了火炮振动的刚性、刚柔耦合多体系统模型; 针对案例分别研究了火炮系统的冲击响应规律及固有振动特性, 获得了火炮振动与其结构参数的内在联系. 研究成果对于改善火炮的振动性能、提高射击精度, 具有理论指导意义和工程应用价值.

关键词 火炮与射击精度, 振动与冲击, 多体动力学, Lagrange 方程, Guass 变分原理

引言

火炮作为是一类常规武器, 具有经济性好、威力大、作战效能高等特点, 在现代海战中担负着近程反导、打击海空目标、对岸支援、火力压制等多种作战任务. 近年来, 电磁炮、电热炮、近程反导武器系统(CIWS)、弹炮合一技术等各类新型发射原理和技术的出现, 进一步赋予了常规火炮新的内涵, 使之成为现代战争中不可缺少的兵器. 射击精度作为体现火炮作战使用性能的一项重要指标, 在射表方面和总体设计上, 都倍受使用与设计人员的关心, 如何提高火炮的射击精度因此也成为火炮设计与使用的核心问题.

火炮发射时, 由于高温、高压火药气体的作用, 使得弹丸在膛内的高速运动具有瞬时冲击特性, 同时在巨大冲击力作用下, 火炮各运动部件必将伴随惯性力产生振动现象, 因而自火炮出现之时, 振动就一直成为火炮研究者关心的主要问题. 由于火炮振动导致弹丸出口原有的射弹初始条件遭到破坏, 因而在影响火炮射击精度的诸多因素中, 火炮振动始终占据着主导地位. 与之不相适应的是, 在射击诸元的误差分配中, 振动的影响始终难以确定, 其根本原因在于火炮这种特殊机械系统的振动过于复杂, 使得振动模型难以充分逼近实际运动. 为逼近火炮发射的真实情况, 并给出通用的、可扩展的火

炮动力学模型, 可建立火炮振动的多体系统动力学模型. 多体系统理论将所研究对象抽象为由多个刚性或柔性部件组成的动力学系统, 并结合多种力学分析原理研究系统的动力学特性. 由于火炮机械结构符合多体系统的拓扑结构特征, 并且随着计算机计算能力的大幅度提高, 采用多体系统理论研究火炮振动一度成为火炮界的研究热点^[1].

国内外已有的部分研究工作表现在如下几个方面. 其一是将火炮机械系统处理为多刚体系统或刚-柔耦合系统. 其陈运生等^[2-3]运用 Kane 方法建立了自行火炮系统的多刚体动力学模型, 分析了射击时的炮口振动变化规律. 王德石^[4-5]基于 Lagrange 方程建立了舰炮系统的多刚体动力学模型, 并研究了舰炮的振动及减振设计问题. 文^[6]在文^[4-5]的基础上, 提出了火炮系统振动和实时控制的变分解法. 此外, 南京理工大学^[7], 北京理工大学^[8], 海军工程大学^[9], 军械工程学院^[10]等均开展过火炮多刚体动力学研究的. 由于火炮结构在冲击作用下将产生变形, 尤其是火炮身管本身就是运动中细长的梁, 所以有必要考虑身管乃至部分部件的柔性. 闵建平^[11-12]在火炮刚体模型基础上, 进一步研究了柔性变形下的多体系统动力学参数化建模理论, 分别应用 Kane 方法、Lagrange 方程法建立了自行火炮的多柔体动力学方程, 并讨论了身管柔性变形对炮口扰动的影响. 管红根^[13]则在

2012-10-09 收到第1稿, 2012-10-26 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(50875259)

[†] 通讯作者 E-mail: wdeshi@sina.com

火炮构件小变形的假设下^[14],借助虚功原理,使用浮动坐标系,推导了火炮发射系统动力学方程.朱怀亮^[15]建立了火箭炮系统刚柔耦合下的动力学方程.其二是运用结构和动力学分析软件进行振动分析.从机械的角度看,火炮就是一个还有运动部件的结构系统,所以可以直接利用 ADAMS, IDEAS, MultiGen Creator 等结构分析软件,或利用自动生成多体系统动力学方程的方法^[16-17],或利用计算机辅助设计技术开发的多体力学程序^[18-20]直接进行火炮振动和强度的模拟与分析.这样的分析可以避免多体系统建模过程中繁琐的运动学和动力学推导,降低对动力学理论的要求,对于从事火炮开发与设计的工作者是有意义的.事实上国内目前在火炮虚拟样机的研制、动力系统的仿真以及可视化^[21-28]等方面的工作,主要是依靠各类分析软件进行的.其三是火炮振动研究促进了动力学理论的应用和发展.火炮振动研究不仅为结构与多体分析软件提供了很好的应用案例,而且在利用多体系统动力学研究火炮振动的过程中,多体动力学理论也得到了发展.魏孝达^[29]将速度矩阵引入火炮多体建模过程,简化了动力学方程的烦琐推导过程,郭保全^[30]则改进了文[29]中的速度矩阵法,考虑了计及系统能量损耗下的火炮振动问题.芮筱亭将机械系统传递矩阵法与多体系统动力学分析方法相结合,给出多体系统传递矩阵法^[31-40],并将其应用于火炮多体系统的固有振动研究^[41-44].

虽然将多体系统理论用于研究火炮振动已取得了部分成果,但以往的研究工作基本上是围绕 Kane 方法或 Lagrange 方程建立火炮振动的多体系统模型,利用 Gauss 变分研究火炮柔性多体系统动力学的工作并不多见.由于变分原理是间接的建模方法,所以在约束与目标函数确定之后,可以直接利用优化软件进行振动分析,所以下面将在综合多体系统建模方法的基础上,建立基于 Gauss 变分的火炮多刚体、多柔体建模方法,同时发展多柔性体动力学的 Gauss 变分理论,给出普遍适用且能更加精确反映火炮振动的动力学模型,并分别运用变分方法和 Lagrange 方程,分析对比火炮振动系统的建模特点,并研究火炮射击过程的动力学响应与固有振动特性,发展多体动力学与火炮设计理论.

1 火炮振动的多体动力学建模方法

自上世纪 70 年代起,多体系统动力学已在运

动生物力学、航天器材控制、机器人学、机械动力学等领域受到广泛应用,并迅速成为经典刚体力学、分析力学与计算机科学相结合的重要力学分支.在上述研究领域中,多体动力学理论解决的是系统实时控制与运动仿真正逆两类问题.对于火炮而言,关注的是系统的振动特性.鉴于火炮机械结构符合多体系统的拓扑结构特征,因此相关研究成果可直接用于火炮系统的振动建模与分析.利用多体系统描述火炮拓扑结构,研究冲击作用下火炮振动对射击精度的影响,是开展火炮振动建模与分析的主要目的.

将火炮视为多体系统,可利用多种方法达到振动建模与分析的目的,包括 Newton—Euler 方程、Lagrange 方程、Roberson - Wittenburg 法、Kane 方法、Guass 变分法等^[45].

1.1 Newton - Euler 法

Newton - Euler 法的基础矢量力学,它将空间中的一般运动分解为随其上某点的平动和绕此点的转动,并分别利用牛顿定律和欧拉方程进行处理^[46]. Newton - Euler 法中要求对所研振动系统的每个振动单元列写动力学方程,由于铰约束力的存在,动力学方程中会出现大量未知理想约束反力.约束反力的计算有利于强度校核,但对火炮振动分析而言,约束力并非关注重点,因此在求解火炮振动方程时需将其消去,才能获得与振动系统自由度数目相同的动力学方程.由此可见依据 Newton - Euler 法建立火炮振动分析所需动力学方程并不方便,反而由于需附加考虑约束反力的消去问题,使后期振动建模变得愈加烦琐.

1.2 Lagrange 方程

Lagrange 方程法是振动分析中常用的一种能量分析方法,适合建立关于约束力学系统的振动方程. Lagrange 方程如(1)式所示.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (1)$$

(1)式为针对具有理想约束的 n 自由度完整系统的 Lagrange 方程,其中 q_k ($k=1,2,\dots,n$) 为系统独立的拉格朗日广义坐标, T 为系统动能, U 为系统势能, Q_k 为对应全部非有势主动力的广义力. Lagrange 方程用动能描述系统运动的动力学量,用广义力和势能描述主动力作用的动力学量,适用于理想约束的完整系统,方程中不含理想约束力.当系

统存在非理想约束时,将其解除,计算与该约束力相应的广义力,并计入(1)式右端.完整系统的 Lagrange 方程数目与系统自由度数相同.依据 Lagrange 方程法建立火炮振动分析所需动力学方程,可在很大程度上简化火炮各组成构件间的大量约束力运算,因此便于火炮系统的振动建模与分析.

1.3 Roberson - Wittenburg 法

Roberson - Wittenburg 法是由 Roberson^[47] 和 Wittenburg^[48-49] 提出的一种动力学分析方法.该方法利用图论相关概念和数学工具描述所研系统内各构件间的作用状况,对于复杂树形结构系统,可给出统一形式的数学模型,对于非树形结构系统,可利用铰切割法转化成树形结构系统处理. Roberson - Wittenburg 法的创造性在于采用图论工具描述系统拓扑结构,有利于运动学和系统动能的统一描述,最终获得的动力学方程表现形式也较理想,但由于图论分析中的关联矩阵含有大量零元素,使得相关数学模型的计算效率降低,除此之外,单管火炮的开链结构简单,运动学具有递推关系,因而无需采用图论工具.

1.4 Kane 方法

Kane 方法是一种广义速率(Lagrange 形式)下的 d'Alembert 原理,以伪速度^[50]作为独立变量来描述系统运动,所获数学模型是一阶微分方程组. Kane 方法既适用于完整系统,也适用于非完整系统,但其优势在于处理非完整系统,在不考虑柔性、双时变身管约束的情况下,利用 Kane 方法推得的火炮振动分析所需的动力学方程,其本质上就是 Lagrange 方程.伪速度就是广义坐标的导数,因此对于简化后为完整约束的火炮系统,采用 Kane 方法建立振动系统的模型,其过程和结果就是 Lagrange 方程.

1.5 Guass 变分法

变分法依据极值问题间接获得研究系统的动力学特性,Guass 变分法即其中的典型.前面给出的几种振动分析方法,都是根据某个直接描述系统运动规律的力学原理建立动力学方程,并通过求解方程确定所研系统的振动规律.而 Guass 变分法则是利用微分变分原理,即最小约束原理来解决系统的振动分析问题^[45].

最小约束原理:在理想约束条件下,系统在某一瞬时的真实运动与位置、速度、约束条件均相同

但加速度不同的可能运动相比较,其真实运动应使系统拘束度 Z 取最小值,即

$$\delta Z = 0 \quad (2)$$

变分的力学原理并不直接描述系统运动的客观规律,而是把真实运动与可能发生的运动进行比较,在相同条件所有可能发生的运动中,找出产生真实运动所应满足的条件.此方法无需建立系统的动力学方程,仅以加速度为变量,依据拘束度 Z 这个泛函的极值条件,直接求解系统的运动规律.其优点在于可利用各种有效的数学规划方法寻求泛函极值,同时对于带有控制的振动系统而言,振动分析过程可结合系统优化同步进行.

综上分析可知, Lagrange 方程法和 Guass 变分法较适用于火炮系统的振动建模与分析,文中将建立基于 Lagrange 方程、Guass 变分的火炮多刚体、多柔体振动建模与分析方法,同时发展火炮多体振动理论.

2 火炮振动的刚体系统模型

火炮系统可看成一个复杂的多体系统,采用多体系统动力学分析方法进行火炮的动力学建模与仿真,能够较全面的描述火炮发射的全过程,特别是后坐部分的大位移运动.同时,也能预测出火炮发射过程中的炮口动态响应,以及各组成构件的作用载荷及整个系统的瞬态运动与响应情况,从而可全面分析火炮系统的总体性能,并进行结构优化.

2.1 刚性多体模型

以某型单管舰炮为例,将其视为由刚体 $B_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 组成的具有四个自由度的多体系统,如图 1 所示.其中 B_0 为固定基座(甲板),不具有任何自由度; B_1 为旋回架,相对 B_0 有两个回转自由度(水平旋回、垂直俯仰),分别用广义坐标 q_1 与 q_2 表示; B_2 为摇架,相对旋回架有一个回转自由度,用广义坐标 q_3 表示; B_3 为后坐部分,相对摇架有一个滑移自由度,用广义坐标 q_4 表示.以上各部分构件间含有弹簧和阻尼器,分别代表驻退复进机、高低齿弧机、方向机的作用和甲板的弹性等.

取坐标系 $o_i - x_i y_i z_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 为刚体 B_i 的连体坐标系,当 $i = 0$ 时,为惯性坐标系.其中 o_0 为旋回架底面与旋回轴的交点; o_1 与 o_0 重合; o_2 为俯仰轴中点; o_3 在炮膛轴线上,初始位置位于包含炮

耳轴且与炮膛轴线垂直的平面内. 各坐标轴的具体选择如图1所示.

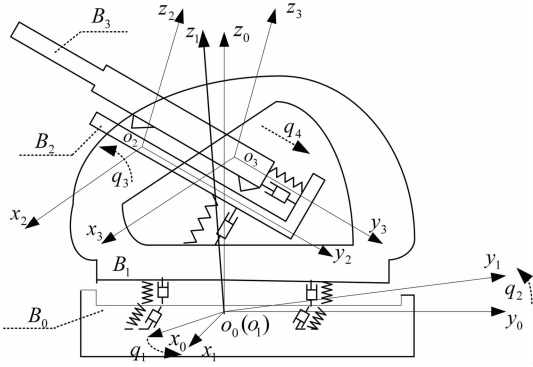


图1 舰炮刚性多体系统模型

Fig.1 Gun by the rigid multi-body system model

进行舰炮的多刚体动力学方程推导前,需作如下符号约定: r^i :空间任意向量 r 在 $o_i - x_i y_i z_i$ 坐标系中对应的坐标列阵; A_i^j : $o_i - x_i y_i z_i$ 坐标系与 $o_j - x_j y_j z_j$ 坐标系间的旋转变换矩阵, $r^i = A_i^j r^j$; l_i :坐标原点 o_i 在 $o_{i-1} - x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ 坐标系中的坐标列阵; P_i :刚体 B_i 的质心 z_c 在 $o_i - x_i y_i z_i$ 坐标系中的坐标列阵; r_i :质心 z_c 的绝对坐标列阵; v_i :质心 z_c 的绝对速度列阵; r_{oi} :原点 o_i 的绝对坐标列阵; v_{oi} :原点 o_i 的绝对速度列阵; J_i : $o_i - x_i y_i z_i$ 坐标系中刚体 B_i 相对其质心 z_c 的惯性张量矩阵; ω_i : $o_i - x_i y_i z_i$ 坐标系中刚体 B_i 的角速度列阵; I_3 :3阶单位矩阵; θ :火炮射角; m_i :刚体 B_i 的质量; g :重力加速度. 以上各量的矢量关系如图2所示.

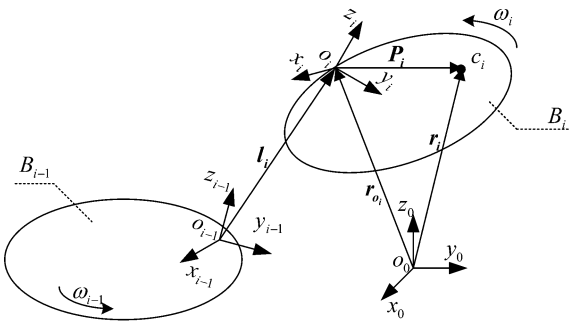


图2 运动矢量关系图

Fig.2 Vector relations of kinematics

对于图1中舰炮多体模型,以上各符号有以下关系式:

$$r_1 = r_{o_1} + A_0^1 P_1 \quad r_{o_1} = l_1 = 0 \quad (3)$$

$$r_2 = r_{o_2} + A_0^2 P_2 \quad r_{o_2} = A_0^1 l_2 + l_1 = A_0^1 l_2 \quad A_0^2 = A_0^1 A_1^2 \quad (4)$$

$$r_3 = r_{o_3} + A_0^3 P_3 \quad r_{o_3} = A_0^2 l_3 + A_0^1 l_2 + l_1$$

$$A_0^3 = A_0^1 A_1^2 A_2^3 \quad (5)$$

其中

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 \cos q_2 & \sin q_1 \sin q_2 \\ \sin q_1 & \cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_2 \cos q_1 \\ 0 & \sin q_2 & \cos q_2 \end{bmatrix}$$

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_3 + \theta) & -\sin(q_3 + \theta) \\ 0 & \sin(q_3 + \theta) & \cos(q_3 + \theta) \end{bmatrix}$$

$$A_2^3 = I_3$$

并且有

$$P_j = [x_{pj} \quad y_{pj} \quad z_{pj}]^T$$

$$l_j = [x_{lj} \quad y_{lj} + \delta(j-3)q_4 \quad z_{lj}]^T$$

这里各坐标列阵内元素($1 \leq j \leq 3$)由舰炮具体结构参数决定, δ 函数的定义如下

$$\delta(m-n) = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad m, n \text{ 为自然数} \quad (6)$$

2.2 基于 Lagrange 方程的动力学方程推导

利用 Lagrange 方程进行舰炮多刚体动力学方程的推导,首先需确定舰炮多体系统的动能、势能及广义力函数. 其中,动能由两部分组成,平动动能和转动动能,取值为

$$T = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2} m_k v_k^T v_k + \sum_{k=0}^N \frac{1}{2} \omega_k^T J_k \omega_k, N = 3 \quad (7)$$

其中

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} \quad v_k = \dot{r}_k \quad \omega_0 = 0$$

$$\omega_1 = [\dot{q}_2 \cos q_1 \quad \dot{q}_2 \sin q_1 \quad \dot{q}_1]^T$$

$$\omega_2 = \omega_3 = [\dot{q}_3 \quad 0 \quad 0]^T$$

势能的计算时,仅将重力作为有势力处理,其余有势力(如弹簧力等)均转化为等效力(矩),在广义力部分处理. 取 $o_0 - x_0 y_0$ 为零势能面,则有

$$U = \sum_{k=0}^N G_k^T r_k, \quad N = 3 \quad (8)$$

其中

$$G_k = [0 \quad 0 \quad m_k g]^T$$

对于舰炮而言,所受的主动动力有火药气体压力、驻退复进机力、高低机、方向机等效力矩、甲板反力矩以及各处的摩擦力. 其中火药气体压力为冲击力,其作用在炮膛上形成的炮膛合力是引起火炮振动的最重要的一类力,同时也是使火炮振动系统有别于其它振动系统的原因之一. 由弹道学相关理

论可知,炮膛合力(P_t)的数值计算应分两个阶段进行^[51].

第一阶段为内弹道时期,此时弹丸还未飞出炮口,炮膛合力(P_{nd})可由实验数据,插值、拟合后求得^[9].第二阶段为后效期,此时弹丸已飞出炮口,炮膛合力(P_{hx})迅速下降,理论上,其值可由式(8)确定.

$$\begin{cases} P_{hx} = P_g \exp[-(t - t_g)/b] & (t > t_g) \\ b = (\beta - 0.5)\xi v_0 / P_g \end{cases} \quad (9)$$

式中 $\exp(\cdot)$ 为指数函数, t_g 为弹丸出炮口时间, P_g 为弹丸出炮口瞬时炮膛合力, b 为炮膛合力衰减系数, v_0 为弹丸初速, ξ 为装药量, β 为火药气体作用系数. 驻退复进机力(R_t)的处理方式与火药气体压力类似,亦可由实验数据插值、拟合后求得.

为简化计算,高低机、方向机以及甲板的力(矩)作用均转化成相应的弹簧与阻尼器进行处理. 设轴向单位矢量为 e , 则相应弹簧 F_s 与阻尼器 F_d 的力可表示为

$$\begin{cases} F_s = -f(u, \dot{u})e \\ F_d = -g(u, \dot{u})e \end{cases} \quad (10)$$

式中, u, \dot{u} 为轴向运动位移与速率, $f(u, \dot{u})$ 与 $g(u, \dot{u})$ 是取决于舰炮结构与物理特性的函数. 对线性弹簧与线性阻尼器有

$$\begin{cases} f(u, \dot{u}) = k\dot{u} + k_0 \\ g(u, \dot{u}) = c\dot{u} + c_0 \end{cases} \quad (11)$$

式中 k 和 k_0, c 和 c_0 为等效刚度、阻尼系数.

Lagrange 方程中,外力是以广义力的形式出现的,因此需进一步将上述主动力转换为广义力. 设某主动力及其力的作用点在惯性坐标系中的坐标列阵分别为 F_j 和 R_j , 则此力所做虚功为

$$\delta W_j = F_j^T \delta R_j = B_j^T \delta q \quad (12)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 为等时变分函数, $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$, B_j 为与此主动力对应的广义力坐标列阵,进而舰炮系统的广义力坐标列阵为

$$Q = \sum_{j=0}^M B_j = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4]^T \quad (13)$$

其中 M 为舰炮系统所受全部主动力的个数.

求得系统动能、势能及广义力后,代入 Lagrange 方程(1)中,即可得舰炮多刚体系统的动力学方程

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)q = f(q, t) \quad (14)$$

其中 A, C, G, f 均为广义坐标 q 的矩阵函数,方程(13)的推导过程繁琐、结果复杂,其解析表达式可参见附录.

2.3 基于 Guass 变分的动力学方程推导

由前述分析可知,采用 Lagrange 方程法进行舰炮多体系统的振动建模,需首先确定舰炮系统的动能、势能和广义力函数,之后需对时间 t 和广义坐标 q 作求导与偏导运算,因而工作量较大,建模过程繁琐. 对于自由度较多的复杂多体系统,即使利用计算机求解,也需相当长的时间.

Guass 变分建模可避开 Lagrange 方程中的各类求导运算,在不推导封闭形式动力学方程的情形下进行舰炮射击振动的数值仿真. 同时,由于 Guass 变分建模采用递推运算方法,因此可在很大程度上降低动力学方程符号解算的运算量.

仍以前述舰炮为例,将其简化为由多个刚体 $B_i (i=0, 1, 2, 3)$ 组成的链状结构,如图3所示. 图中各符号含义及构件运动关系与图1相同,此处不再赘述. 需说明是,此模型假设舰炮各组成构件间具有铰链约束 $Res_i (i=1, 2, 3)$, 其上作用有驱动力(矩),分别代表高低、方向机等效力矩、甲板弹性反力矩及各处的摩擦力等.

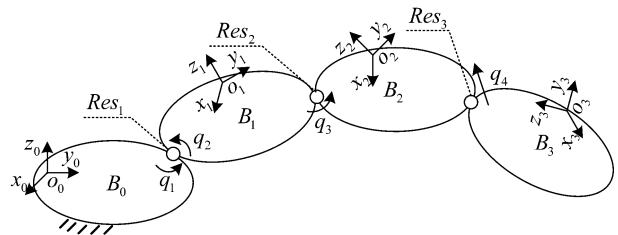


图3 舰炮链状结构模型

Fig. 3 Chain structure model of a gun

同样,推导舰炮多刚体动力学方程前,作如下符号约定:

${}^v m_i$:刚体 B_i 上任意质点 ${}^v P_i$ 的质量; m_i :刚体 B_i 的质量; ${}^v P_i^0$:质点在 $o_0 - x_0 y_0 z_0$ 坐标系中位置矢径对应的齐次坐标列阵^[45]; ${}^v \rho_i^i$:质点 ${}^v P_i$ 在 $o_i - x_i y_i z_i$ 坐标系中位置矢径对应的齐次坐标列阵; ${}^v f_i^0$:作用于质点 ${}^v P_i$ 上的主动力在 $o_0 - x_0 y_0 z_0$ 坐标系中对应的齐次坐标列阵; ${}^v f_i^i$:作用于质点 ${}^v P_i$ 上的主动力在 $o_i - x_i y_i z_i$ 坐标系中对应的齐次坐标列阵; l_i :原点 o_i 在 $o_{i-1} - x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ 坐标系中位置矢径对应的笛卡尔坐标列阵; P_i :刚体 B_i 的质心 z_{c_i} 在 $o_i - x_i y_i z_i$ 坐

标系中位置矢径对应的笛卡尔坐标列阵; T_i : 刚体 B_i 的位姿矩阵; A_i : 刚体 B_i 的相对位姿矩阵; Φ_i : 刚体 B_i 的主动动力矩阵; H_i : 刚体 B_i 的广义惯量矩阵; $\Theta_{r(x_i/y_i/z_i)}$: 刚体 B_i 相对 $x_i/y_i/z_i$ 轴的转动投影矩阵; $\Theta_{m(x_i/y_i/z_i)}$: 刚体 B_i 相对轴的移动投影矩阵; Z_i : 刚体 B_i 的拘束度; I_4 : 4 阶单位矩阵; θ : 火炮射角.

对于图 3 中舰炮多体链状模型, 以上各项有以下关系

$${}^v\rho_i^0 = T_i {}^v\rho_i^i \quad T_i = T_{i-1} A_i \quad (15)$$

$$H_i = \sum_v {}^v m_i {}^v \rho_i^i ({}^v \rho_i^i)^T \quad \Phi_i = \sum_v {}^v f_i^\theta ({}^v \rho_i^i)^T \quad (16)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 \cos q_2 & \sin q_1 \sin q_2 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_2 \cos q_1 & 0 \\ 0 & \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_3 + \theta) & -\sin(q_3 + \theta) & y_{l2} \\ 0 & \sin(q_3 + \theta) & \cos(q_3 + \theta) & z_{l2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = T_0 = I_4$$

$$\Theta_{r(d_i)} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta'(d_i = z_i) & \delta'(d_i = y_i) & 0 \\ \delta'(d_i = z_i) & 0 & -\delta'(d_i = x_i) & 0 \\ -\delta'(d_i = y_i) & \delta'(d_i = x_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{m(d_i)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta'(d_i = x_i) \\ 0 & 0 & 0 & \delta'(d_i = y_i) \\ 0 & 0 & 0 & \delta'(d_i = z_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_i = [x_{pi} \quad y_{pi} \quad z_{pi}]^T$$

$$l_i = [x_{li} \quad y_{li} + \delta(i-3)q_4 \quad z_{li}]^T$$

这里坐标列阵 P_i, l_i 内元素由舰炮具体结构参数决定, δ 函数的定义参见(6)式, δ' 函数的定义如下

$$\delta'(str) = \begin{cases} 1 & str \text{ 为真} \\ 0 & str \text{ 为假} \end{cases} \quad str \text{ 为逻辑表达式} \quad (17)$$

下面利用 Gauss 变分原理, 推导舰炮多刚体动力学方程. 首先计算系统的拘束度. 依据 Gauss 拘束定义^[45], 同时利用矢量运算特性 ($a^T b = \text{tr}(ab^T)$), 则有刚体 B_i 的拘束度为

$$Z_i = \frac{1}{2} \sum_v \text{tr} \{ {}^v m_i ({}^v \rho_i^0 - \frac{{}^v f_i^\theta}{{}^v m_i}) ({}^v m_i ({}^v \rho_i^0 - \frac{{}^v f_i^\theta}{{}^v m_i})^T \} \quad (18)$$

式中 $\text{tr}(\cdot)$ 函数为矩阵的迹函数. 舰炮系统的总拘束度 Z 可由各构件拘束度 Z_i 求和获得

$$Z = \sum_{i=0}^3 Z_i = \sum_{i=0}^3 \frac{1}{2} \text{tr} \{ \ddot{T}_i H_i \ddot{T}_i^T \} - \sum_{i=0}^3 \text{tr} \{ \Phi_i \ddot{T}_i^T \} + \dots \quad (19)$$

(19) 式中仅列出了与加速度相关的项. 当然舰炮系统的总拘束度还应包括与加速度无关的相关项, 但增加或减少这些项并不会影响系统拘束度取极小值时的加速度值, 因此在此并不列出. 等式右边主动动力矩阵 Φ_i 的计算, 仅考虑重力、火药气体压力和驻退复进机力的作用, 而高低、方向机等效力矩、甲板反力矩以及各处的摩擦力则等效为作用于铰链 Res_i 上的驱动力(矩), 在铰链约束部分处理. 主动力的分析、计算过程在 Lagrange 方程法中已有详细说明, 此处不再赘述.

处理铰链约束. 在图 3 所示舰炮链状结构中, 各构件间由铰链 Res_i 进行连接, 每个铰链给出的位置约束条件, 可由相对变化原理写出

$$\begin{cases} T_1 = T_0 A_1(q_1, q_2) \Leftrightarrow T_1 = T_* A_{1*}(q_2), \\ T_* = T_0 A_{*0}(q_1) \\ T_i = T_{i-1} A_i(q_{i+1}) \quad i=2, 3 \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$A_{*0} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{1*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_1 & -\sin q_2 & 0 \\ 0 & \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将(20)式对时间 t 求两次导数, 并略去与加速度无关的项, 可得铰链 Res_i 对加速度的约束条件

$$\begin{cases} \ddot{T}_1 = \ddot{T}_0 A_1(q_1, q_2) + T_0 \Theta_{r(z_0)} A_1(q_1, q_2) \ddot{q}_1 + \\ T_* \Theta_{r(x_1)} A_{1*}(q_2) \ddot{q}_2 + \\ \ddot{T}_i = \ddot{T}_{i-1} A_i(q_{i+1}) + C_i \ddot{q}_{i+1} + \dots i=2, 3 \end{cases} \quad (21)$$

式中

$$C_i = T_{i-1}[(1 - \varepsilon_i)\Theta_{r(x_i)} + \varepsilon_i\Theta_{m(y_i)}]A_i \quad (22)$$

其中 ε_i 为铰链系数,对于转动副 $\varepsilon_i = 0$,对于移动副 $\varepsilon_i = 1$. 铰链 Res_i 上作用有驱动力,由高低、方向机等效力矩、甲板反力矩以及各处的摩擦力等效形成,相应力的处理方法详见 Lagrange 方程法内容. 由文[45]可知,舰炮系统中所有铰链驱动力在约束表达式中相应的项为

$$Z' = - \sum_{i=1}^4 Q_i \ddot{q}_i \quad (23)$$

式中 Q_i 为折算到铰链 Res_i 轴上的对应于广义坐标 q_i 的广义力.

Guass 变分原理表明,系统约束度最小时的运动对应的是系统的真实运动. 由此可将求解舰炮射击过程中各运动构件的动力学问题,转化为满足约束方程(21)条件下求解约束函数 $Z + Z'$ 的极小值问题,即不建立解析形式的动力学方程,通过极值问题间接获得动力学或振动特性. 为方便求解极值问题,同时也为证明变分模型与 Lagrange 方程的等价性,引入 Lagrange 乘子矩阵 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 进一步把有约束条件的极小值问题化为无约束条件的极小值问题进行处理,则约束函数 $Z + Z'$ 可写为

$$\begin{aligned} Z + Z' = & \sum_{i=0}^3 \text{tr} \left\{ \frac{1}{2} \ddot{T}_i H_i \ddot{T}_i^T - \Phi_i \ddot{T}_i^T \right\} + \text{tr} \left\{ \lambda_1 (\ddot{T}_* - \right. \\ & \left. \ddot{T}_0 A_{*0} - T_0 \Theta_{r(z_0)} A_{*0} \ddot{q}_1)^T \right\} + \text{tr} \left\{ \lambda_2 (\ddot{T}_1 - \right. \\ & \left. \ddot{T}_* A_{1*} - T_* \Theta_{r(x_1)} A_{1*} \ddot{q}_2)^T \right\} + \sum_{i=0}^3 \text{tr} \left\{ \lambda_i (\ddot{T}_{i-1} - \right. \\ & \left. \ddot{T}_{i-2} A_{i-1} - C_{i-1} \ddot{q}_i)^T \right\} - \sum_{i=0}^3 Q_i \ddot{q}_i + \dots \quad (24) \end{aligned}$$

欲求函数 $Z + Z'$ 的极小值,可令其加速度的等时变分为零,即

$$\delta(Z + Z') = 0 \quad (25)$$

整理可得

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 A_{1*}^T \\ \lambda_i = \lambda_{i+1} A_i^T + \Phi_i - \ddot{T}_{i-1} H_{i-1} \quad i = 2, 3, 4 \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} Q_1 + \text{tr} \left\{ \lambda_1 (T_0 \Theta_{r(z_0)} A_{*0})^T \right\} = 0 \\ Q_2 + \text{tr} \left\{ \lambda_2 (T_* \Theta_{r(x_1)} A_{1*})^T \right\} = 0 \\ Q_i + \text{tr} \left\{ \lambda_i C_{i-1}^T \right\} = 0 \quad i = 3, 4 \end{cases} \quad (27)$$

$$\text{tr} \left\{ \lambda_5 \delta \ddot{T}_3^T \right\} = 0 \quad (28)$$

这里(26)至(28)式分别为舰炮链状多体系统的对偶条件、力恒等条件和边界条件. 其中:(26)式中引入的非奇异矩阵 A_4 为4阶单位阵;(28)式中也

引入了一个拉格朗日乘子矩阵 λ_5 ,考虑到刚体 B_3 上无附加约束,由边界条件可取 $\lambda_5 = 0$. 确定乘子矩阵 λ_5 后,由(26)式进行递推运算,可求出其余乘子矩阵 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$. 将其代入(27)式中,可进一步获得动力学方程,即

$$U(q)\ddot{q} + L(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)q = V(q, t) \quad (29)$$

式中 $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$, U, L, G, V 分别为 q 的矩阵函数. 实际振动分析中,无需给出类似于(29)式的动力学方程,而仅依赖(26)至(28)式即可完成舰炮链状多体系统的动力学计算,这也正是基于 Guass 变分建模的独特之处. 对比(14)式和(29)式后可知,基于 Guass 变分推得的动力学方程与利用 Lagrange 方程推得的动力学方程实际是等价关系.

3 考虑柔性身管振动的刚柔耦合建模

前面建模过程均将火炮视为由多个刚体组成的系统,但鉴于射击过程中的身管变形是射击精度必须考虑的因素,刚性身管的假设势必带来振动分析的误差,因此,为更精确地分析火炮振动,应将身管弹性纳入建模考虑范围,尤其是中小口径火炮必须考虑身管的变形. 在考虑弹性身管的情形下,需要建立柔性体系统动力学模型. 与刚体系统动力学相比,柔性系统动力学除了含有有限个广义坐标描述的运动之外,还含有无限个弹性体的振型函数,即含有无限个广义模态坐标,并且连体坐标系会随着柔性体的振动产生浮动,采用何种力学原理、假定何种形式的变形函数、截取多少阶的模态坐标,建立何种形式的浮动坐标,获得何种方式的耦合振动方程等,至今仍然是理论研究所关心的焦点.

3.1 刚柔耦合模型

仍以某型单管舰炮为例,将其视为由多个刚性体和柔性体组成的混合多体系统,如图4所示. 其中刚性体部分由刚体 $B_i (i = 0, 1, 2)$ 构成. B_0 为固定基座(甲板),不具有任何自由度; B_1 为旋回架,相对 B_0 有两个回转自由度(水平旋回、垂直俯仰),分别用广义坐标 q_1 与 q_2 表示; B_2 为摇架,相对旋回架有一个回转自由度,用广义坐标 q_3 表示. 柔性体部分由柔性身管 B_3 构成,相对摇架有一个滑移自由度,用广义坐标 q_4 表示,其上各点的柔性变形由变形向量 u_f 表示. 以上各部分构件间含有弹簧和阻尼器,分别代表驻退复进机、高低齿弧机、方向机、甲板的弹性等. 各刚、柔性构件上建立有连

体坐标系,坐标原点与坐标轴的选择如图4.

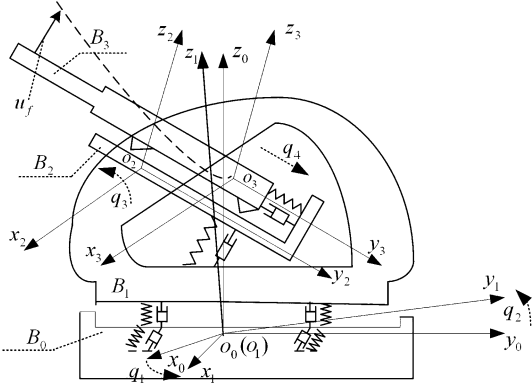


图4 舰炮刚柔耦合多体系统模型

Fig. 4 Rigid-flexible coupling multibody system model of a gun

为便于舰炮系统的多体建模,进一步将柔性体 B_3 简化为 Euler-Bernoulli 悬臂梁,仅考虑舰炮射击时身管横向振动引起的柔性变形,则此时柔性变形向量 u_f 简化为梁的弯曲挠度 u_f . 综合运用柔性多体动力学、机械振动理论,采用模态分析法描述柔性体 B_3 的柔性变形 u_f 如下

$$u_f = \Lambda q_f = [\Lambda_1(-y_3) \quad \Lambda_2(-y_3) \quad \cdots \quad \Lambda_n(-y_3)] [q_5 \quad q_6 \quad \cdots \quad q_n]^T \quad (30)$$

其中行矩阵 Λ 为描述柔性体 B_3 变形模式的形函数矩阵,其元素的选取与时间 t 无关;列矩阵 q_f 为与之相应的柔性变形广义坐标向量; y_3 为图4中 $o_3 - y_3 z_3$ 平面内任意一点的横坐标. 依据 Euler-Bernoulli 悬臂梁的横向振动特性,经分离变量法处理后的梁挠度亦可分解为(30)式中行矩阵与列矩阵的乘积形式,由此可取 $\Lambda_n(-y_3)$ 为

$$\Lambda_n(-y_3) = [\text{ch}\lambda_n y_3 - \cos\lambda_n y_3 + \frac{\text{sh}\lambda_n l - \sin\lambda_n l}{\text{ch}\lambda_n l + \cos\lambda_n l} (\text{sh}\lambda_n y_3 - \sin\lambda_n y_3)] \quad (31)$$

式中 l 为身管长度, $\lambda \approx (n - 0.5) \frac{\pi}{l}$.

鉴于模型中刚性体部分的符号含义已在刚性多体建模中给出过详细说明,此处仅针对柔性体部分进行符号说明.

描述柔性体 B_3 在其连体坐标系 $o_3 - x_3 y_3 z_3$ 中任意微元段 dy_3 的符号有: Zr : 绝对坐标列阵; Zv : 绝对速度列阵; l' : 柔性变形坐标列阵; $\rho(y_3)$: 质量密度; $A(y_3)$: 横截面积; $E(y_3)$: 弹性模量; $I(y_3)$: 截面惯性矩. 以上各项有以下关系式

$$Zr = \sum_{i=0}^3 A_0^{i-1} l_i + A_0^3 l' \quad (32)$$

其中

$$A_0^3 = A_0^2 \quad l_3 = [x_{l3} \quad y_{l3} + q_4 \quad z_{l3}]^T$$

$$l' = [0 \quad -y_3 \quad \sum_{j=0}^3 \Lambda_j(-y_3) q_{j+4}]^T$$

3.2 基于 Lagrange 方程的动力学方程推导

分别确定系统动能、势能、主动力和广义力. 系统动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \omega_i^T J_i \omega_i + \frac{1}{2} \int_{-l_1}^{l_2} \rho(y_3) A(y_3) Zv^T Zv dy_3 \quad (33)$$

式中前两项为舰炮刚性部分的动能,由平动动能、转动动能两部分组成,最后一项为计及身管柔性变形后额外出现的舰炮柔性部分的动能. 其中参数 l_1, l_2 的选取,由身管的具体结构决定,且有 $l_1 + l_2 = l$. 与系统动能类似,系统势能也分为刚性重力势能与柔性体弹性势能两部分. 取 $o_0 - x_0 y_0$ 平面为零势能面,则有系统势能为

$$U = \sum_{i=1}^3 G_i^T r_i + \frac{1}{2} \int_{-l_1}^{l_2} E(y_3) I(y_3) \left(\frac{\partial u_f}{\partial y_3} \right)^T \left(\frac{\partial u_f}{\partial y_3} \right) dy_3 \quad (34)$$

主动力和广义力的处理,与刚性建模完成相同,此处不再赘述. 至此,可由 Lagrange 方程推得舰炮系统的刚柔耦合多体动力学方程

$$A(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) q = f(q, t) \quad (35)$$

此方程的推导过程与刚性条件下相比,要繁琐、复杂得多,所得的表达式也相当冗长,作为例子,在此仅列出质量矩阵 $A(q)$ 的一个元素 a_{11} 如下

令:

$$s_3 = \sin(q_2 + q_3 + \theta) \quad c_3 = \cos(q_2 + q_3 + \theta)$$

$$s_4 = \sin(q_2 + q_3 - q_1 + \theta) \quad c_4 = \cos(q_2 + q_3 - q_1 + \theta)$$

$$s_5 = \sin(q_1 + q_2 + q_3 + \theta) \quad c_5 = \cos(q_1 + q_2 + q_3 + \theta)$$

$$R_1 = \cos q_1 (z_{l2} \sin q_2 - y_{l2} \cos q_2) - 0.5 [(c_4 + c_5)(y_{l3} + q_4) + (s_4 + s_5) z_{l3}]$$

$$R_2 = \sin q_1 (z_{l2} \sin q_2 - y_{l2} \cos q_2) + 0.5 [(s_4 - s_5)(y_{l3} + q_4) + (c_4 - c_5) z_{l3}]$$

$$V_i = \frac{2i-1}{2} \pi \quad K_i = \frac{\text{sh} V_i - \sin V_i}{\text{ch} V_i + \cos V_i} \quad M_i = \frac{2q_{4+i} K_i}{V_i}$$

$$a_{11} = J_{y1} \sin^2 q_2 + J_{y21} \sin 2q_2 + J_{z1} \cos^2 q_2 + [(y_{p1}^2 - z_{p1}^2) \cos^2 q_2 + x_{p1}^2 - y_{p1} z_{p1} \sin 2q_2 + z_{p1}^2] m_1 + [z_{l2} \sin q_2 - y_{l2} \cos q_2 + z_{p2} s_3 - y_{p2} c_3]^2 m_2 + 0.5 \{ (R_1^2 + R_2^2) + [(s_4 - s_5) R_2 - (c_4 +$$

$$c_5)R_1]l + [(s_4 + s_5)R_1 + (c_4 - c_5)R_2](M_1 + M_2 + \dots + M_n)\}m_3 \quad (36)$$

式中 m_3 的系数为刚柔耦合项,其中 M_i 的取值由柔性体 B_3 的变形模态决定;去除 a_{11} 表达式的最后一项后,剩余部分的表达式与刚性建模条件下获得的计算结果完全一致,符合文中仅考虑身管柔性变形这一基本假设; J_{y1} 、 J_{z1} 、 J_{x1} 为惯性张量矩阵 J_1 中的相应元素。

3.3 基于 Gauss 变分的动力学方程推导

将前述火炮视为一刚柔耦合多体链状结构,包括三个刚性体 $B_i (i=0,1,2)$, 一个柔性体 B_3 , 如图5所示。图中各符号含义及构件运动关系与图4相同,此处不再赘述。其中, B_3 为柔性身管,其上各点的柔性变形由3.1节中的变形向量 u_f 表示。以上各构件间具有铰链约束 $Res_i (i=1,2,3)$, 其上作用有驱动力(矩), 分别代表高低、方向机等效力矩、甲板弹性反力矩及各处的摩擦力等。

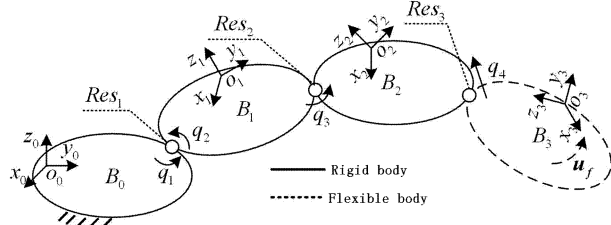


图5 舰炮刚柔耦合链状结构模型

Fig.5 Gun's model by the rigid-flexible coupling chain structure

同样,刚性体部分的符号含义已在刚性多体建模中给出过详细说明,此处仅针对柔性体部分进行符号说明。对柔性体 B_3 的描述,除包含与刚性部分相同的符号说明外,还需引入一些新的符号说明: $H_{ep} (p=1,2,3,4)$:相对广义惯量矩阵 H_3 的附加矩阵; Φ_e :相对主动力矩阵 Φ_3 的附加矩阵。以上各项与 $v^p \rho_3^3$ 的关系式如下

$$H_{e1} = \sum_v^v m_i v_i^3 (\rho_3^3)^T \quad H_{e2} = \sum_v^v m_i v_i^3 (\rho_3^3)^T$$

$$H_{e3} = \sum_v^v m_i v_i^3 (\rho_3^3)^T \quad H_{e4} = \sum_v^v m_i v_i^3 (\rho_3^3)^T \quad (37)$$

$$\Phi_e = \sum_v^v J_3^0 (\rho_3^3)^T \quad (38)$$

其中

$$v^p \rho_3^3 = [0 \quad -y_3 \quad \sum_{j=1}^n A_j (-y_3) q_{j+4} \quad 1]^T$$

进行变分解算前,首先计算系统的拘束度。考

虑身管的柔性变形后,舰炮系统的拘束度与刚性建模(取 $u_f=0$)下的结果相比有较大不同,如(39)式所示

$$Z = \sum_{i=0}^3 Z_i = \sum_{i=0}^3 \frac{1}{2} \text{tr} \{ \ddot{T}_i H_i \ddot{T}_i^T \} - \sum_{i=0}^3 \text{tr} \{ \Phi_i \ddot{T}_i^T \} + 2\text{tr} \{ \dot{T}_3 H_{e1} \dot{T}_3^T \} + \text{tr} \{ T_3 H_{e2} \dot{T}_3^T \} + 2\text{tr} \{ \dot{T}_3 H_{e3} T_3^T \} + \frac{1}{2} \text{tr} \{ T_3 H_{e4} T_3^T \} - \text{tr} \{ \Phi_e T_3^T \} + \dots \quad (39)$$

与(19)式类似,上式中略去了与加速度无关的相关项,其中最后五项表达式 $2\text{tr} \{ \dot{T}_3 H_{e1} \dot{T}_3^T \}$ 、 $\text{tr} \{ T_3 H_{e2} \dot{T}_3^T \}$ 、 $2\text{tr} \{ \dot{T}_3 H_{e3} T_3^T \}$ 、 $0.5\text{tr} \{ T_3 H_{e4} T_3^T \}$ 、 $-\text{tr} \{ \Phi_e T_3^T \}$ 为舰炮刚柔耦合多体建模过程中,计及身管柔性变形后,系统拘束中出现的附加项。可以看出,此时的计算工作量要远大于刚性建模。这里等式右边主动力矩阵 Φ_i 、 Φ_3 附加矩阵 Φ_e 的计算,仅考虑重力、火药气体压力和驻退复进机力的作用,而高低、方向机等效力矩、甲板反力矩以及各处的摩擦力则等效为作用于铰链 Res_i 上的驱动力(矩),在铰链约束部分进行处理。各类主动力、驱动力的计算方法,已于刚性建模中给出明确说明,此处不再赘述。

处理系统的铰链约束。比较图3和图5可知,舰炮刚柔耦合多体链状结构中的铰链约束,与刚性多体链状结构中的铰链约束完全相同,都由三个铰链约束 $Res_i (i=1,2,3)$ 构成,无额外附加约束。因此,刚柔耦合多体建模中的铰链位置约束条件、加速度约束条件也可由(20) - (22)式确定。最终,铰链驱动力在拘束表达式中相应的项为

$$Z' = - \sum_{i=1}^4 Q_i \ddot{q}_i \quad (40)$$

式中 Q_i 为折算到铰链 $Res_i (i=1,2,3)$ 轴上的对应于刚性广义坐标 $q_i (i=1,2,3,4)$ 的广义力,而与柔性广义坐标 $q_i (i=5, \dots, n)$ 无关。

由 Gauss 变分原理,同时引入拉格朗日乘子矩阵 $\lambda_i (i=1,2,3,4)$, 将满足约束方程(21)条件下拘束函数 $Z + Z'$ 的极小值问题,转化为无约束条件的极小值问题,此时,拘束函数可写为

$$Z + Z' = \sum_{i=0}^3 \text{tr} \{ \frac{1}{2} \ddot{T}_i H_i \ddot{T}_i^T - \Phi_i \ddot{T}_i^T \} + 2\text{tr} \{ \dot{T}_3 H_{e1} \dot{T}_3^T \} + \text{tr} \{ T_3 H_{e2} \dot{T}_3^T \} + 2\text{tr} \{ \dot{T}_3 H_{e3} T_3^T \} + \frac{1}{2} \text{tr} \{ T_3 H_{e4} T_3^T \} - \text{tr} \{ \Phi_e T_3^T \} + \text{tr} \{ \lambda_1 (\ddot{T}_* - \ddot{T}_0 A_{*0} - T_0 \Theta_{r(z_0)} A_{*0} \ddot{q}_1)^T \} + \text{tr} \{ \lambda_2 (\ddot{T}_1 - \ddot{T}_* A_{1*} -$$

$$T_* \Theta_{r(x_1)} A_{1*} \ddot{q}_2)^T + \sum_{i=3}^4 \text{tr} \{ \lambda_i (\ddot{T}_{i-1} - \ddot{T}_{i-2} A_{i-1} - C_{i-1} \dot{q}_i)^T \} - \sum_{i=1}^4 Q_i \dot{q}_i + \dots \quad (41)$$

欲求(41)式的极小值,令其加速度的等时变分为零,整理可得如下方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 A_{1*}^T \\ \lambda_i = \lambda_{i+1} A_i^T + \Phi_i - \ddot{T}_{i-1} H_{i-1} \quad i=2,3,4 \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} Q_1 + \text{tr} \{ \lambda_1 (T_0 \Theta_{r(z_0)} A_{*0})^T \} = 0 \\ Q_2 + \text{tr} \{ \lambda_2 (T_* \Theta_{r(x_1)} A_{1*})^T \} = 0 \\ Q_i + \text{tr} \{ \lambda_i C_{i-1}^T \} = 0 \quad i=3,4 \\ \sum_v P(3) \Lambda_j (-y_3) = 0 \quad j=1, \dots, n \end{cases} \quad (43)$$

$$\text{tr} \{ \lambda_5 \ddot{\delta T}_3^T \} = 0 \quad (44)$$

其中:(42)式中引入的非奇异矩阵 A_4 为4阶单位阵;(43)式中的 ${}^v P(3)$ 由(45)式确定;(44)式中引入的拉格朗日乘子矩阵 λ_5 为零矩阵.

$${}^v P = {}^v m_3 \ddot{T}_3^T [\ddot{T}_3 {}^v \rho_3^3 + 2 \dot{T}_3 {}^v \rho_3^3 + T_3 {}^v \rho_3^3 - {}^v f_3^0] = [{}^v P(1) \quad {}^v P(2) \quad {}^v P(3) \quad {}^v P(4)]^T \quad (45)$$

与刚性建模时类似,这里的(42) - (44)式,也分别为舰炮刚柔耦合多体链状结构的对偶条件、力恒等条件和边界条件,利用这一系列条件,无需推导刚柔耦合多体动力学方程即可进行舰炮射击过程的振动分析. 确定乘子矩阵 λ_5 后,由(42)式进行递推运算,可求出其余乘子矩阵 $\lambda_i (i=1,2,3,4)$,将其代入(43)式中,整理后也可获得舰炮链状结构的刚柔耦合多体动力学方程

$$U(q) \ddot{q} + K(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) q = V(q, t) \quad (46)$$

式中 $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, U, L, G, V 分别为 q 的矩阵函数.

4 火炮振动案例

4.1 多刚体建模算例

(1) Lagrange 方程

根据上文推得的动力学方程(14),针对某型舰炮的射击过程进行数值仿真. 参数选取:状态初值 $x(t=0) = [q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3, q_4, \dot{q}_4]^T = 0$,射角 $\theta = 45^\circ$,身管长度 $l = 5.5\text{m}$,炮膛截面积 $S = 7.9 \times 10^{-3}\text{m}^2$,炮膛合力衰减系数 $b = 2.5 \times 10^{-3}$,弹丸出炮口时间 $t_g = 8 \times 10^{-3}\text{s}$,甲板、高低机、方向机等刚度系数 $k_j = 8 \times 10^8\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, $k_g = 5 \times 10^8\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$,

$k_f = 1 \times 10^8\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$,等效阻尼系数 $c_j = 1 \times 10^6\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$, $c_g = 3 \times 10^5\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$, $c_f = 3 \times 10^5\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$. 炮膛合力 P_i 、驻退复进机力 R_i 由文[9]中实验数据插值、拟合后确定. 不考虑舰炮各处的摩擦力,可得仿真结果如图6所示.

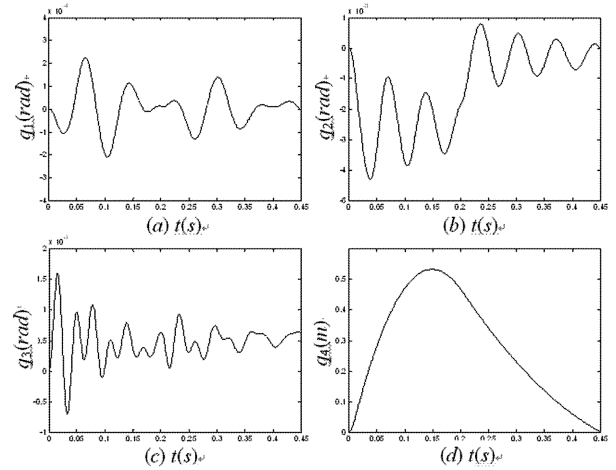


图6 广义坐标 $q_i (i=1,2,3,4)$

Fig. 6 Generalized coordinates $q_i (i=1,2,3,4)$

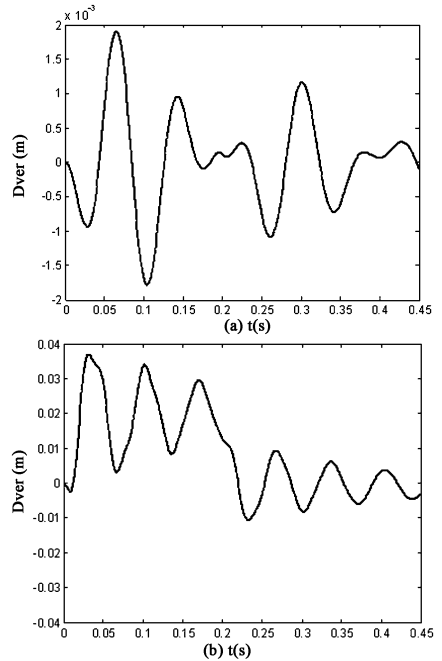


图7 炮口振动位移曲线

Fig. 7 Muzzle vibration displacement curves

图6(a) - (d)给出了火炮射击过程中广义坐标 $q_i (i=1,2,3,4)$ 随时间变化的曲线. 从图中可以看出,火炮在450ms内完成一次射击,最大后坐距离约为53cm;广义坐标 $q_i (i=1,2,3)$ 偏离初始平衡位置做非对称振动,数量级分别为 10^{-4}rad 与 10^{-3}rad ;火炮振动主要集中在垂直方向上,且由广

义坐标 $q_i (i = 2, 3)$ 决定。

为便于进行炮口振动分析,将炮口简化为一质点,其在连体坐标系 $o_3 - x_3y_3z_3$ 中位置矢径对应的坐标列阵近似为 $[0, -1, 0]^T$ 。考虑炮口偏离初始射击位置的水平 (Dhor)、垂直 (Dver) 方向振动位移,仿真结果如图 7 所示。

比较图 7 (a)、(b) 两图可以发现,炮口垂直方向振幅远大于水平方向振幅,即炮口振动主要体现在垂直方向上,且最大幅值可达 $3 \sim 4\text{cm}$,与文[9]中实验数据最大幅值约 3.6cm 相符合。

分别改变甲板、高低机的等效刚度,其余初值条件保持不变,重新进行炮口垂直方向振动位移的数值仿真,结果如图 8 所示。(a) 图为甲板刚度变化的情况,(b) 图为高低机刚度变化的情况。图中虚线代表等效刚度降低 $1 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ 后 ($k_j = 7 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ 、 $k_g = 4 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$) 获得的仿真结果,点划线代表等效刚度增大 $1 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ 后 ($k_j = 9 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ 、 $k_g = 6 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$) 获得的仿真结果,实线代表参数不作改变的情况。

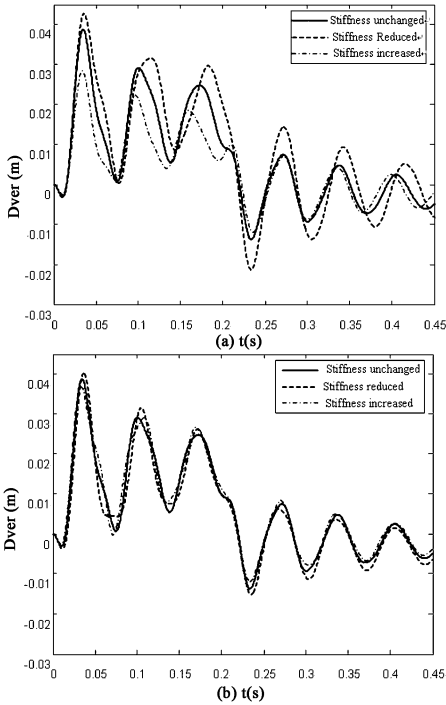


图 8 等效刚度变化后炮口振动位移曲线
Fig. 8 Muzzle vibration displacement curves when changed the equivalent stiffness

比较图 8 (a)、(b) 两图后可发现甲板刚度对炮口垂直振动的影响要远大于高低机刚度,且随着甲板刚度的提高,炮口振动幅度逐渐减少,反之炮口

振幅增加。因此提高火炮安装底座的甲板刚度,是一种有效的降低炮口振动的方法。值得注意的是高低机刚度对炮口振动的影响与甲板的规律有所不同,需分三个阶段进行说明。刚度增加:后坐初期 ($0\text{s} \sim 0.05\text{s}$), 振动幅度减小;后坐后期 ($0.05\text{s} \sim 0.2\text{s}$), 炮口振动变化规律不明显;复进期 ($0.2\text{s} \sim 0.45\text{s}$), 振动幅度减小。刚度减小,变化规律则与之相反。

(2) Guass 变分法

参数选取与 4.1 节①中相同,不考虑舰炮各处的摩擦力,仿真结果如图 9 所示。图 9 (a) - (d) 为基于高斯变分建模给出的舰炮射击过程中广义坐标 $q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的仿真曲线。由图可知,舰炮完成一次射击动作所需的时间为 450ms ,后坐的最大距离约为 53cm ;广义坐标 $q_i (i = 1, 2, 3)$ 在初始平衡位置附近做非对称振动,振幅的数量级分别为 10^{-4}rad 与 10^{-3}rad ;垂直方向上的振动为主要振动,且由广义坐标 $q_i (i = 2, 3)$ 决定。事实上,图 9 中给出的广义坐标 q_i 仿真结果与图 6 基本一致,这从另一侧面反映了 Guass 变分建模方法的可行性,同时也可看出 Guass 变分原理与 Lagrange 方程是等价的。

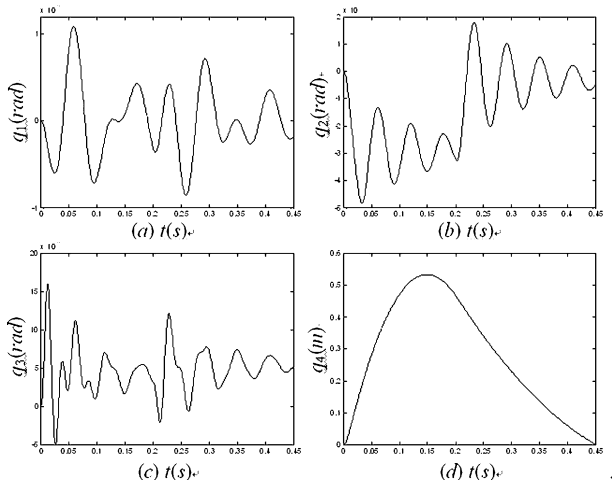


图 9 广义坐标 $q_i (i = 1, 2, 3, 4)$
Fig. 9 Generalized coordinates $q_i (i = 1, 2, 3, 4)$

图 10 为将炮口简化为一质点后,进行振动分析,所得的炮口射击振动变化曲线。其中 (a) 图为炮口偏离初始射击位置的水平 (Dhor) 方向振动位移变化曲线,(b) 图为相应的垂直 (Dver) 方向振动位移变化曲线。比较图 10 (a)、(b) 两图中曲线,可发现炮口垂直方向的振动变化范围远大于水平方

向,即炮口的振动主要表现在垂直方向上,且垂直方向的最大振动幅值可达3~4cm,与最大幅值约3.6cm的实验结果符合较好,同时也与图7的炮口振动仿真结果一致。

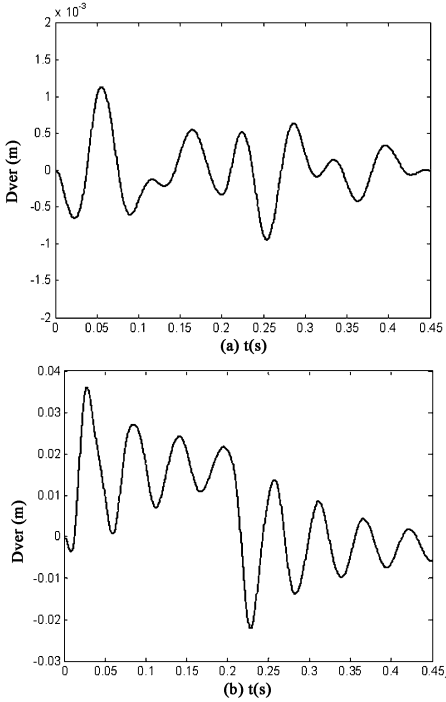


图10 炮口振动位移曲线

Fig. 10 Muzzle vibration displacements

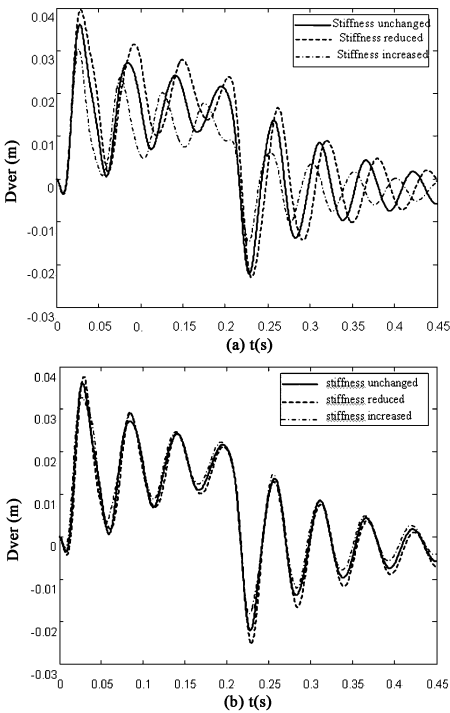


图11 等效刚度变化后炮口振动位移曲线

Fig. 11 Muzzle vibration displacements with changed the equivalent stiffness

依次改变甲板、高低机的等效刚度,其余仿真参数保持不变,重新进行炮口垂直方向振动位移的数值仿真,结果如图11所示.其中(a)图为改变甲板刚度后的仿真结果,(b)图为改变高低机刚度后的仿真结果,且虚线代表等效刚度降低的情况($k_j = 7 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $k_g = 4 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$),点划线代表等效刚度增大的情况($k_j = 9 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $k_g = 6 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$),实线代表刚度未调整的情况。

比较图11(a)、(b)两图,并关注等效刚度调整后的炮口垂直振动曲线变化幅度可知,甲板刚度为影响炮口垂直振动的关键因素,其影响要远大于高低机刚度,且甲板刚度越高,炮口振动幅度越小,反之则炮口振幅增大.考虑到射击过程中炮口的振动主要表现在垂直方向上,而甲板刚度又为影响炮口垂直振动的主要因素,因此提高舰炮安装底座的甲板刚度,对于炮口减振来说,是一种行之有效的措施.类似可讨论高低机刚度变化对炮口振动幅度的影响规律,与甲板刚度有所不同,此时需分三个阶段进行说明.第一阶段为后坐初期(0s~0.05s),此时高低机刚度变化对炮口振动的影响规律与甲板相同,即刚度越大,振幅越小;第二阶段为后坐后期(0.05s~0.2s),此时影响规律与第一阶段相反,变为刚度越大,振幅越大;第三阶段为复进期(0.2s~0.45s),此时影响规律又恢复为刚度越大,振幅越小.由此可见,高低机刚度对炮口振动的影响较为复杂,应恰当设计其等效刚度,以达到降低炮口振动、改善射击性能的目的.另外值得说明的是,此处获得的刚度变化对炮口振动影响的各种规律,与4.1节①中给出的结论一致,这从数值计算的角度再次印证了Guass变分原理与Lagrange方程的等价性。

4.2 刚柔耦合建模算例

(1) Lagrange方程

由上文推得的舰炮刚柔耦合动力学方程(35),编制相应计算程序,并针对某型舰炮的发射过程进行数值仿真.参数选取:状态初值 $x_{(t=0)} = [q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \dots, q_n, \dot{q}_n]^T = 0$,身管长度 $l = 5.5 \text{ m}$,密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$,惯性矩 $I = 1.39 \times 10^{-5} \text{ m}^4$,身管模态截维数取为3,其余参数选取与刚性建模一致,不考虑舰炮各处的摩擦力。

图 12-16 为利用 Lagrange 方程进行刚柔耦合建模获得的动力学仿真结果. 其中图 12 为广义坐标 $q_i (i=1,2,3,4)$ 在舰炮射击过程中随时间变化的仿真结果. 从图中可以看出: 舰炮在 450ms 内完成一次射击, 最大后坐距离约为 53cm; 广义坐标 q_1, q_2, q_3 偏离初始平衡位置做非对称振动, 数量级分别为 $10^{-4} rad$ 与 $10^{-3} rad$; 舰炮振动主要集中在垂直方向上, 由广义坐标 q_2, q_3 决定. 图 13 为柔性变形广义坐标 $q_i (i=5,6,7)$ 随时间变化的仿真结果. 其中 q_5 的数量级为 0.1mm, 远大于 q_6, q_7 的幅值变化范围, 因此在计算身管的柔性变形时起主导作用. 身管的模态截维数还可取得更高, 但随着舰炮系统自由度的不断增加, 会导致动力学方程 (35) 的求解工作量呈几何级数迅速增大, 因此本文并未给出其仿真结果. 实际上, 文 [14, 52] 中已经证明此类问题仅取有限截断项即可满足足够的计算精度.

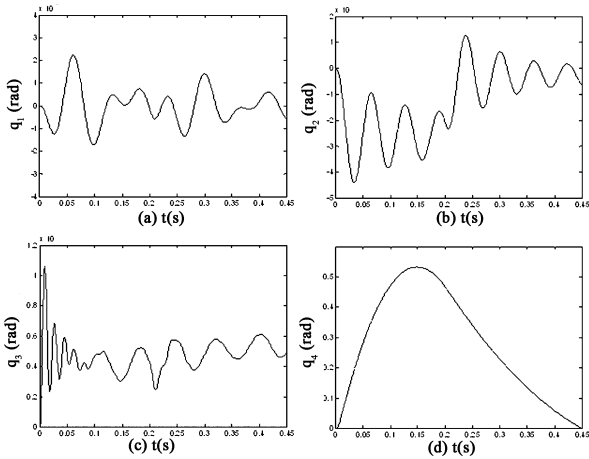


图 12 广义坐标 $q_i (i=1,2,3,4)$

Fig. 12 Generalized coordinates $q_i (i=1,2,3,4)$

将炮口简化为一质点, 分别考虑其在刚性、柔性建模条件下偏离初始射击位置的水平、垂直方向振动位移, 结果如图 14 所示. 图中实线为刚性建模条件(取 $u_f=0$)下的仿真结果, 点划线为柔性建模条件下的仿真结果.

从图 14 中可看出, 无论是柔性建模, 还是刚性建模, 炮口水平、垂直方向振动位移的最大幅值分别约为 1.8mm 和 3.3cm, 与实验数据最大幅值 2mm 和 3.6cm 符合较好. 身管的柔性变形对炮口水平、垂直方向的振动位移都会产生影响, 只是与炮口的刚性位移相比, 垂直方向上柔性位移所占的

百分比很小, 在图 14 中难以观察出来.

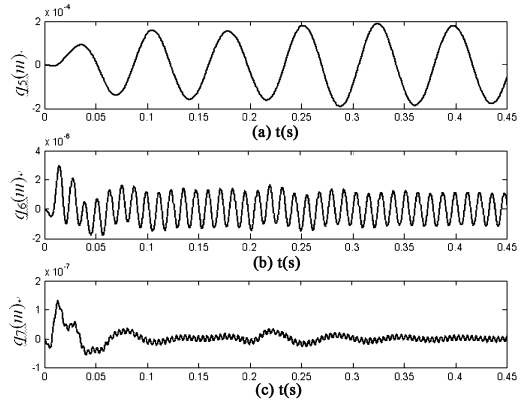


图 13 柔性广义坐标 $q_i (i=5,6,7)$

Fig. 13 Flexible generalized coordinates $q_i (i=5,6,7)$

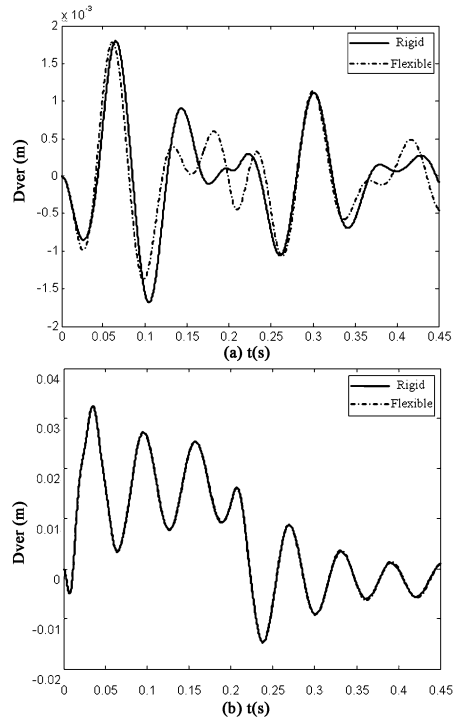


图 14 炮口振动位移曲线

Fig. 14 Muzzle vibration displacements

图 15 为局部放大的炮口振动位移曲线. 从图 15 中可以看出, 在弹丸飞出炮口瞬时 ($t=8ms$), 与刚性建模下的结果相比, 身管的柔性变形对炮口的水平、垂向方向振动位移都产生了影响, 进而影响弹丸飞出炮口的初始扰动, 并最终影响射击精度. 图 16 为局部放大的炮口振动速度曲线.

通过以上仿真分析可以发现, 采用 Lagrange 方程, 对舰炮系统进行刚柔耦合多体动力学分析, 其获得的结果与纯刚性建模下的结果相比, 更贴近于舰炮的实际发射情况. 虽然考虑身管柔性变形下的

动力学建模过程远比刚性情况复杂,但对于计算精度要求较高的场合(如炮口振动),有必要采用此种建模方法.仿真结果同时表明,身管的柔性变形影响弹丸飞出炮口的初始扰动,并最终影响射击精度.因此,在进行舰炮总体的动力学建模时,将身管视为柔性体是必要的.

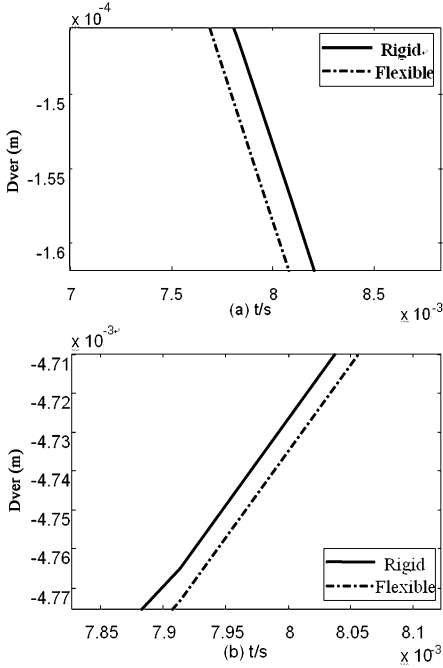


图 15 局部放大的炮口振动位移曲线

Fig. 15 Partial enlarged muzzle vibration displacements

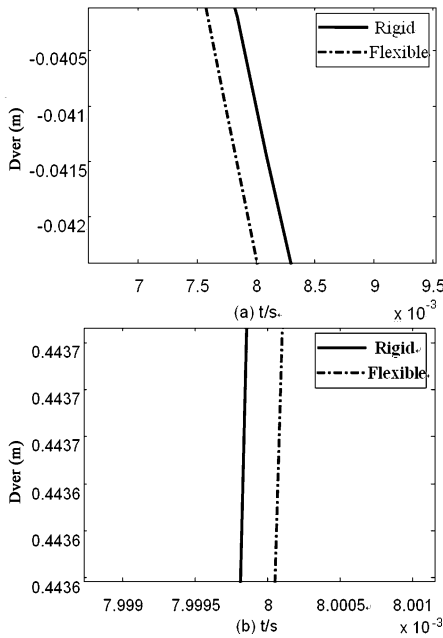


图 16 局部放大的炮口振动速度曲线

Fig. 16 Partial enlarged muzzle vibration displacements

(2) Gauss 变分法

选取与 4.2 节①中相同初始参数,开展舰炮射击振动的数值仿真,结果如图 17-20 所示.其中:图 17 为舰炮射击过程中广义坐标 $q_i (i=1,2,3,4)$ 随时间变化的仿真结果;图 18 为柔性变形广义坐标 $q_i (i=5,6,7)$ 随时间变化的仿真结果;图 19 为刚性(取 $u_f=0$)、柔性建模条件下,炮口偏离初始射击位置的水平、垂直方向振动位移仿真结果;图 20 为局部放大的炮口振动位移曲线.

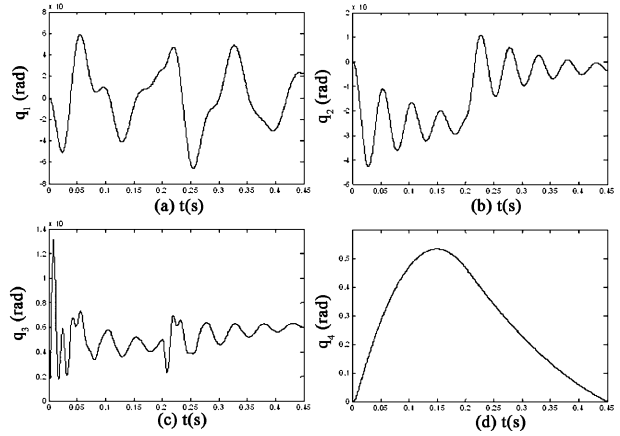


图 17 广义坐标 $q_i (i=1,2,3,4)$

Fig. 17 Generalized coordinates $q_i (i=1,2,3,4)$

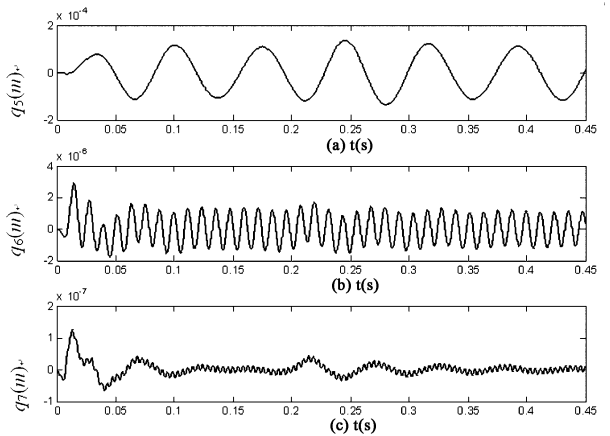


图 18 柔性广义坐标 $q_i (i=5,6,7)$

Fig. 18 Flexible generalized coordinates $q_i (i=5,6,7)$

将以上各图与利用 Lagrange 方程建模获得的仿真图形进行比较,可以发现,尽管由于不同建模方法导致不同的误差累使得两种建模方法的仿真曲线取值并不完全相同,然而两者无论在幅度方面,还是在变化规律方面总体上都比较吻合.故对于舰炮系统的刚柔耦合的建模问题,不仅理论上可以严格证明该等价性,由仿真曲线也可看出, Gauss 变分原理与 Lagrange 方程是两种等价的分

析方法.

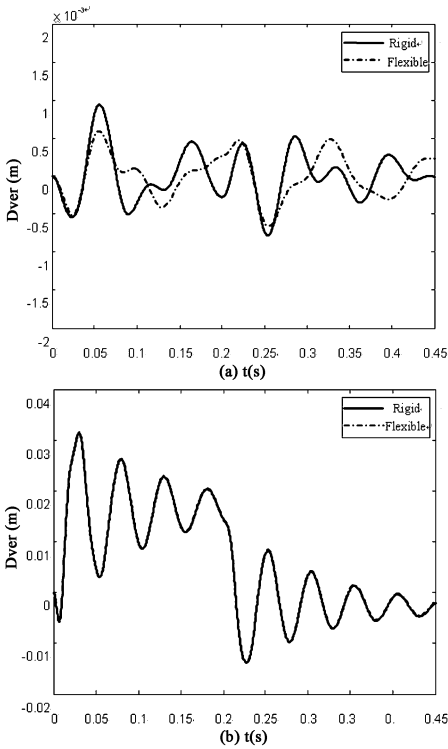


图19 炮口振动位移曲线

Fig.19 Muzzle vibration displacements

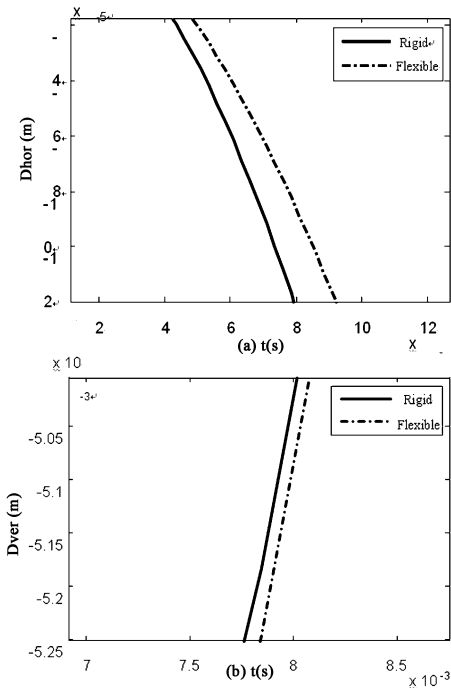


图20 局部放大的炮口振动位移曲线

Fig.20 Partial enlarged muzzle vibration displacements

5 火炮振动固有频率分析

火炮振动致使火炮射击精度变差. 长期以来, 几阶共振频率在火炮振动中起主导作用一直是个

难题,且精确的确定更加困难. 火炮作为复杂的机械系统,所含固有频率较多,经典的弹簧-质量块系统由于模型差异并不能完全、准确的确定火炮系统固有频率. 而火炮多体模型,既能满足对火炮动力学系统的简化需求,又能较全面的逼近火炮运动的真实情况,因此可更精确,更完全的计算火炮系统的固有频率. 本节利用前述推导的火炮多体系统发射动力学方程进行火炮系统的固有振动频率计算,并试图找出影响火炮射击振动的共振频率分量.

5.1 刚性建模固有频率计算

首先给出刚性建模条件下推得的火炮多体系统动力学方程

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)q = f(q, t) \quad (47)$$

式中 q 为多刚体系统的广义坐标列阵, $A(q)$ 、 $G(q)$ 、 $C(q, \dot{q})$ 分别为相应的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵,其相应解析表达形式可参见附录内容. 不考虑火炮系统的阻尼,则由方程(47)可得火炮系统的固有振动方程为

$$A(q)\ddot{q} + G(q)q = 0 \quad (48)$$

可进一步将火炮系统的固有振动频率计算问题转化为特征方程(48)的特征值求解问题

$$\det(G(q) - (2\pi f)^2 A(q)) = 0 \quad (49)$$

式中 $\det(\cdot)$ 为矩阵的行列式函数, f 为系统固有振动频率.

由(49)式,计算刚性建模条件下火炮系统的固有振动频率. 取火炮射角 $\theta = 0^\circ$, 计算火炮系统的固有振动频率如表1所示. 其中无后座时取 $q_4 = 0\text{m}$, 后座时取 $q_4 = 0.1\text{m}$.

表1 刚体火炮系统固有振动频率

Table 1 Natural vibration frequency of the rigid gun system

order	Recoilless (hz)	Recoil (hz)	Experimental (hz)	Relative error (%)
0	0	0		
	Rigid modal	Rigid modal		
1	8.97	9.21	8.65	3.70
2	15.98	16.40	15.25	4.79
3	30.42	32.17	28.75	5.81

考虑表1中无后座时火炮系统的固有振动频率. 一阶固有振动频率为0,代表火炮系统中存在纯刚性运动. 其余固有振动频率的计算结果与模态实验结果[9](未后坐)符合较好,且计算误差小,从而验证了本文理论与方法的可行性. 表1中还给

出了身管后坐0.1m时火炮系统的固有振动频率,由此可知,文中给出的火炮多体建模方法,不仅可以计算传统的火炮静止时的固有振动频率,还可用于计算火炮多类工况下的固有振动频率,为火炮固有振动频率的计算提供了一条新途径;同时,欲计算更高阶的火炮系统固有振动频率,可通过进一步细化火炮多体系统模型来实现。

观察表1中数据还可发现,火炮系统的最低阶固有振动频率为8.97Hz,而文中所选型号火炮的发射率为10发/min~90发/min(0.17Hz~1.5Hz),远低于火炮系统的最低阶固有振动频率,因此在该型火炮正常工作的情况下是不会产生共振现象的,即火炮发射率对全炮的振动影响不大。但对于某些射速较高的小口径火炮而言,则可能会出现发射率接近低阶固有振动频率的情形,此时应合理控制火炮的发射率,以抑制火炮发射时的全炮振动。同时,也可通过调整火炮的部分结构参数,改变火炮系统的固有振动频率分布,避免射击共振现象发生。

5.2 刚柔耦合建模固有频率计算

与刚性建模类似,首先给出火炮刚柔耦合系统动力学方程,为便于与刚性系统动力学方程(47)区分,写成如下形式

$$A_c(q_c)\ddot{q}_c + C_c(q_c, \dot{q}_c)\dot{q}_c + G_c(q_c)q_c = f_c(q_c, t) \quad (50)$$

式中下标c代表刚柔耦合项, q_c 、 A_c 、 C_c 、 G_c 分别为火炮刚柔耦合多体系统的广义坐标列阵、质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵。同样,利用特征方程(51)的特征值即可求解火炮刚柔耦合多体系统的固有振动频率 f_c 。

$$\det(G_c(q_c) - (2\pi f_c)^2 A_c(q_c)) = 0 \quad (51)$$

上式中,广义坐标列阵 q_c 的柔性截断维数取为3。同样,取射角 $\theta = 0^\circ$,讨论火炮有、无后坐两种工况下刚柔耦合系统的固有振动频率,如表2所示。其中无后座时取 $q_4 = 0\text{m}$,后座时取 $q_4 = 0.1\text{m}$ 。

比较表2与表1中数据可发现,计及身管柔性的火炮系统固有振动频率计算结果与刚性建模情况并不完全一致。此时,在原有刚性多体系统固有振动频率的基础上,附加出现了另外3个固有振动频率,分别为2.44Hz、4.60Hz、5.92Hz。分析可知,计及身管柔性后,身管的刚度降低,除相对摇架作后坐、复进平动外,还在与其轴线垂直的方向上作横

向振动。因此,在0Hz~8.87Hz之间出现了3个附加的固有振动频率,这与刚柔耦合建模时选定的柔性截断维数3相吻合,但鉴于与该部分频率相对应的横向振动幅度较小,模态实验时并未激发出来。类似,表2中也给出了身管后坐过程中刚柔耦合火炮系统的固有振动频率,再次验证了文中多体建模方法在火炮系统固有振动频率计算方面的优势。表2中第4、5、6阶固有振动频率与表1中第1、2、3阶固有振动频率十分接近,且与模态实验结果吻合,表明文中刚柔耦合动力学模型与刚性动力学模型都能较好的逼近火炮系统的固有振动特性。表3为不同建模条件下,火炮系统固有振动频率的计算结果比较情况。

表2 刚柔耦合火炮系统固有振动频率

Table 2 Natural vibration frequency of the Rigid-flexible coupling gun system

order	Recoilless (hz)	Recoil (hz)	Experimental (hz)	Relative error (%)
0	0	0		
	Rigid modal	Rigid modal		
1	2.44	2.44		
2	4.60	4.61		
3	5.92	5.93		
4	8.87	9.19	8.65	2.54
5	15.83	16.28	15.25	3.80
6	29.78	31.40	28.75	3.58

表3 不同建模条件下火炮系统固有振动频率比较

Table 3 The natural frequency of the gun system under different modeling conditions

Experimental (hz)	Rigid (hz)	Rigid error (%)	Rigid-flexible Coupling/(hz)	Coupling error/(%)
8.65	8.97	3.70	8.87	2.54
15.25	15.98	4.79	15.83	3.80
28.75	30.42	5.81	29.78	3.58

由表3中数据可知,刚柔耦合模型下求得火炮系统固有振动频率与刚性模型相比,更加贴近实验结果。因此,为获得较高精度的火炮系统固有振动特性,有必要考虑身管的柔性变形。

6 结论

振动影响火炮的射击精度。文中研究了火炮发射动力学建模问题,在分析多体动力学基本原理的基础上,比较了火炮动力学建模方法的特点,提出了火炮振动的变分建模方法,建立了方便、通用、精

确的火炮动力学模型,分析了火炮的冲击与振动特性,获得了火炮振动规律,并发展了火炮动力学和多体系统动力学理论.主要工作与成果如下:

(1) 建立了舰炮的多刚体动力学模型,该模型适用于各型舰炮乃至火炮的动力学分析.运用多刚体系统动力学理论,将舰炮简化为基座、旋回架、摇架和后坐部分组成的多体系统,推导了舰炮的动力学方程及相应的解析表达式,给出了舰炮射击过程中各种主要外力,尤其是火药气体冲击力的处理方法.结合相关实验、资料数据,分析了舰炮射击过程中各组成构件的运动特性,并讨论了影响炮口振动的主要因素.研究表明:甲板刚度为引起炮口振动的主要因素,提高舰炮安装底座的甲板刚度,可有效降低炮口振动;高低机刚度对炮口振动的影响较为复杂,应进行合理设计以达到对炮口振动的最佳抑制.

(2) 建立了舰炮多体系统的 Guass 变分模型. Guass 变分方法基于 Guass 变分原理,通过将舰炮转化为由多个构件组成的链状结构,从系统拘束的角度描述舰炮各组成构件的约束关系,进而给出系统运动规律. Guass 变分方法不需推导封闭形式的动力学方程,仅依赖链状结构的对偶方程、力恒等方程和边界方程即可完成多体系统的动力学分析,分析结果与 Lagrange 方程符合较好,两者实际上是等价关系.

(3) 形成了舰炮多体系统的刚柔耦合动力学分析理论.在舰炮多刚体系统模型的基础上,附加考虑身管的柔性形变,建立了舰炮的刚柔耦合多体动力学模型;采用模态分析法,引入柔性广义坐标刻画身管的柔性形变,分别采用 Lagrange 方程和 Guass 变分原理推导了封闭形式的刚柔耦合动力学方程,给出了舰炮射击过程的动态仿真结果,并与刚性建模下的仿真结果进行了比较分析.分析表明:计及身管柔性的舰炮刚柔耦合多体动力学方程推导过程,远比刚性的情况复杂,但其获得的仿真结果与刚性建模下相比,更贴近于舰炮的实际发射情况;身管的柔性变形影响弹丸飞出炮口的初始扰动,进而影响射击精度.因而,在进行火炮系统的多体建模时,尤其是中小口径火炮的建模时,将身管视为柔性体是十分必要的.柔性 Guass 变分方法发展了多体系统动力学理论.

(4) 利用文中建立的火炮多体动力学理论,系

统的研究了火炮系统的固有振动特性,并分别计算了刚性建模、刚柔耦合建模下舰炮系统的固有振动频率.计算表明:所建多体系统模型能有效模拟火炮的动力学性能,所得固有振动频率与模态实验结果符合较好;为满足对火炮系统固有振动特性精确分析的需求,有必要将身管视为柔性体;给出的封闭形式通用动力学方程,可同时计算多种工况下火炮系统的固有振动频率.

文中工作建立了普遍性的火炮动力学建模与振动分析方法,丰富了火炮多体动力学理论;以舰炮为案例,获得了发射过程中动力学模型与振动特性.需进一步开展的研究工作有:

(1) 进行各种情形下的射击实验与振动测试.

(2) 考虑更多的子结构以及部件运动等因素,建立模型,并研究各运动构件间的接触、间隙与弹性对射击振动特性的影响.

(3) 进一步考虑舰艇平台摇摆、身管双支撑时变约束等问题,推广火炮动力学与振动模型.

(4) 在火炮进行动力学建模与振动分析的基础上,发展火炮身管的吸振、减振理论与技术.

参 考 文 献

- 1 康新中. 多体理论及其在火炮工程中的应用前景. 火炮发射与控制学报, 1996, (4): 7 ~ 11 (Kang X Z. Multi-body theory and its application in artillery engineering. *Journal of Gun Launch & Control*, 1996, (4): 7 ~ 11 (in Chinese))
- 2 陈运生, 杨国来. 自行火炮动力学的 Kane 方法建模研究. 火炮发射与控制学报, 1996, (1): 1 ~ 8 (Chen Y S, Yang G L. Study on kane method modeling of self-propelled artillery dynamics. *Gun Launch & Control Journal*, 1996, (1): 1 ~ 8 (in Chinese))
- 3 冯长根, 温波, 李才葆. 自行火炮行进间射击动力学研究. 兵工学报, 2002, 23 (4): 457 ~ 461 (Feng C G, Wen Bo Li Caibo. Dynamic analysis of a self a self-propelled gun firing on the move. *Acta Armamentarii*, 2002, 23 (4): 457 ~ 461 (in Chinese))
- 4 王德石. 舰炮系统多刚体动力学分析. 火炮发射与控制学报, 1999, (4): 1 ~ 6 (Wang D S. Multi-Body dynamics analysis of gun system. *Gun Launch and Control Journal*, 1999, (4): 1 ~ 6 (in Chinese))
- 5 Wang D S, Xiao R B, Ouyang G Y. Vibrations analysis for

- gun systems by multibody dynamics . Proceedings of the 1999 ASME International Design Engineering Technical Conference. USA, Las Vegas, 1999:111 ~ 116
- 6 王德石. 火炮系统振动与实时控制的变分解法. 非线性动力学学报, 1998, 5(1):40 ~ 44 (Wang D S. The artillery system vibration and real-time control variational method. *Nonlinear Dynamics Journal*, 1998, 5(1):40 ~ 44 (in Chinese))
 - 7 何永. 火炮总体设计方法研究[博士学位论文]. 南京: 南京理工大学, 1995 (He Yong. Study on the overall design method of gun [PHD Thesis]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 1995 (in Chinese))
 - 8 赵文江. 自行火炮发射动力学仿真[博士学位论文]. 北京: 北京理工大学, 1998 (Zhao W J. Self-propelled artillery emission dynamics simulation [PHD Thesis]. Beijing: Beijing University of Science and Technology, 1998 (in Chinese))
 - 9 王德石. 大口径舰炮振动特性及射击精度研究[博士学位论文]. 武汉: 海军工程学院, 1997 (Wang D S. Study on the large and medium-sized caliber guns vibration characteristics and design Accuracy [PHD Thesis]. Wuhan: Naval College of Engineering, 1997 (in Chinese))
 - 10 马吉胜. 双35高炮动力学分析及优化设计[博士学位论文]. 石家庄: 军械工程学院, 1991 (Ma J S. Dual 35 Anti-aircraft artillery dynamics analysis and optimal design [PHD Thesis]. Shijiazhuang: Ordnance Engineering College, 1991 (in Chinese))
 - 11 闵建平, 陈运生, 杨国来. 身管柔性对炮口扰动的影响. 火炮发射与控制学报, 2000, (2):28 ~ 31 (Min J P, Chen Y S, Yang G L. Influence of barrel flexible on the barrel flexible. *Journal of Gun Launch & Control*, 2000, (2):28 ~ 31 (in Chinese))
 - 12 闵建平, 杨国来, 杨伯忠, 等. 自行火炮多体发射动力学仿真研究. 兵工学报, 2001, 22(1):34 ~ 36 (Min J P, Yang G L, Yang B Z, et al. Study on launching dynamics simulation of self-propelled artillery. *Acta Armamentarii*, 2001, 22(1):34 ~ 36 (in Chinese))
 - 13 管红根, 高树滋, 郑建国. 火炮系统多体动力学分析的一般方法. 火炮发射与控制学报, 1997(4):1 ~ 7 (Guan H G, Gao S Z, Zhen J G. The general method for analysis of artillery system by multibody dynamics. *Journal of Gun Launch & Control*, 1997(4):1 ~ 7 (in Chinese))
 - 14 Hauges P C. Modal identities for elastic bodies with application to vehicle dynamics and control. *Applied Mechanics*, 1980, 47(1):35 ~ 42
 - 15 朱怀亮. 刚柔耦合下火箭炮多体系统的动力方法探讨. 火炮发射与控制学报, 1995, (2):13 ~ 17 (Zhu H L. Rockets gun multi-body system dynamics method under rigid-flexible coupling. *Journal of Gun Launch & Control*, 1995, (2):13 ~ 17 (in Chinese))
 - 16 Schiehlen W O, Kreuzer E J. Symbolic computerized derivation of equations of motion. The conference of dynamics of multibody systems. Germany, Munich, 1977:141 ~ 153
 - 17 Schiehlen W O. Computer generation of equations of motion. *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical Systems Dynamics*, 1984, F9:77 ~ 81
 - 18 Chace M A. Methods and experience in computer aided design of large displacement mechanical systems. *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical Systems Dynamics*, 1984, F9:43 ~ 50
 - 19 Haug E J. Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems. *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical Systems Dynamics*, 1989, F14:12 ~ 23
 - 20 Nikravesh P E. Computer-aided analysis of mechanical systems. Berlin: Prentice Hall, 1988
 - 21 杨国来, 陈运生, 曾晋春, 等. 火炮虚拟样机的总体框架及初步应用. 弹道学报, 2006, 18(4):51 ~ 54 (Yang G L, Chen Y S, Zeng J C, Ge J L, et al. Overall framework and preliminary application of artillery virtual prototyping. *Journal of Ballistics*, 2006, 18(4):51 ~ 54 (in Chinese))
 - 22 王长武, 杨国来, 闵建平, 等. 火炮发射动力学的三维实体仿真. 弹道学报, 2000, 12(3):22 ~ 26 (Wang C W, Yang G L, Ming J P, Cheng Y S, et al. 3-Dimension solid dynamic simulation based on I-DEAS of self-propelled gun at firing. *Journal of Ballistics*, 2000, 12(3):22 ~ 26 (in Chinese))
 - 23 王长武, 陈强, 杨国来, 等. 可视化在火炮发射动力学仿真中的应用研究. 南京理工大学学报, 2000, 24(4):307 ~ 310 (Wang C W, Chen Q, Yang G L, et al. Visualization of gun launch dynamics simulation. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2000, 24(4):307 ~ 310 (in Chinese))
 - 24 马吉胜, 马英忱. 基于虚拟样机技术的自行火炮接地压力分布研究. 计算机仿真, 2005, 22(7):139 ~ 141 (Ma J S, Ma Y C. Research on the ground pressure distribution of a self-propelled gun based on virtual prototype technology. *Computer Simulation*, 2005, 22(7):139 ~ 141 (in Chinese))
 - 25 杨军荣, 何永, 米粮川. 基于虚拟样机技术的双管火炮耦合发射动力学仿真. 南京理工大学学报, 2006, 30

- (4):439~443(Yang J R, He Y, Mi L C. Dynamic simulation of coupling firing for twin-tube gun based on virtual prototype technique. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2006,30(4):439~443 (in Chinese))
- 26 杭焱,王晓峰,陈运生. 基于多体动力学的火炮虚拟现实系统实时仿真. 弹道学报,2006,18(1):55~58(Hang Y, Wang X F, Chen Y S. Real-time simulation based on multi-body dynamics in virtual reality of gun. *Journal of Ballistics*, 2006,18(1):55~58(in Chinese))
- 27 杭焱,王晓峰,杨国来,等. 火炮发射动力学的可视化仿真. 弹道学报,2007,19(3):85~88(Hang Y, Wang X F, Yang G L, Chen Y S, et al. Visual simulation of gun launching dynamics. *Journal of Ballistics*, 2007,19(3):85~88 (in Chinese))
- 28 杭焱,王晓峰,杨国来,等. 层次建模技术在火炮虚拟现实系统中的应用. 火炮发射与控制学报,2008,(1):30~34(Hang Y, Wang X F, Yang G L, Chen Y S, et al. Application of hierarchical modeling technology in gun virtual reality system. *Journal of Gun Launch & Control*, 2008,(1):30~34 (in Chinese))
- 29 魏孝达. 多体完整系统的速度矩阵法. 兵工学报,1996,17(3):193~197(Wei X D. The velocity matrix method on multibody-holonomic system. *Acta Armamentarii*, 1996,17(3):193~197 (in Chinese))
- 30 郭保全,侯宏花,潘玉田. 改进的速度矩阵法在火炮动力学上的应用研究. 华北工学院学报,2002,23(1):50~55(Guo B Q, Hou H H, Pan Y T. The application of improved velocity matrix method on gun dynamics. *Journal of North University of China*, 2002,23(1):50~55 (in Chinese))
- 31 芮筱亭,刘亚飞. 梁系统振动的传递矩阵法. 力学与实践,1993,15(5):66~67(Rui X T, Liu Y F. Transfer matrix method of beam system vibration. *Mechanics and Engineering*, 1993,15(5):66~67(in Chinese))
- 32 芮筱亭,隋文海,邵允中. 刚体的场传递矩阵及其在多体动力学中的应用. 宇航学报,1993,14(4):82~87(Rui X T, Sui W H, Shao Y Z. Transfer matrix of rigid body and its application in multibody system dynamics. *Journal of Astronautics*, 1993,14(4):82~87 (in Chinese))
- 33 芮筱亭,王士明,孙一平. 带有集中质量和弹簧及刚体的分布质量梁系统振动的传递矩阵法. 南京理工大学学报,1993,17(6):76~80(Rui X T, Wang S M, Sun Y P. Transfer matrix method of vibration of beam system with spring, rigid body, lumped mass and distributed mass. *Journal of Nanjing University of Science and Technology (Natural Science)*, 1993,17(6):76~80(in Chinese))
- 34 芮筱亭,陆毓琪. 多体系统振动的传递矩阵法. 宇航学报,1995,16(3):41~47(Rui X T, Lu Y Q. Transfer matrix method of multibody system vibration. *Journal of Astronautics*, 1995,16(3):41~47(in Chinese))
- 35 Rui X T, He B, Lu Y Q. Discrete time transfer matrix method for multibody system dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2005,14:317~344
- 36 Rui X T, Wang G P, Lu Y Q. Transfer matrix method for linear multibody system. *Multibody System Dynamics*, 2008,19:179~207
- 37 He B, Rui X T, Wang G P. Riccati discrete time transfer matrix method of multibody system for elastic beam undergoing large overall motion. *Multibody System Dynamics*, 2007,18:579~598
- 38 芮筱亭,何斌,陆毓琪,等. 刚柔多体系统动力学离散时间传递矩阵法. 南京理工大学学报,2006,30(4):390~394(Rui X T, He B, Lu Y Q, Yun L F, et al. Discrete time transfer matrix method for rigid-flexible multibody system dynamics. *Journal of Nanjing University of Science and Technology(Natural Science)*, 2006,30(4):390~394(in Chinese))
- 39 何斌,芮筱亭,陆毓琪. 多体系统动力学 Riccati 离散时间传递矩阵法. 兵工学报,2006,27(4):622~625(He B, Rui X T, Lu Y Q. Riccati discrete time transfer matrix method for multibody system dynamics. *Acta Armamentarii*, 2006,27(4):622~625(in Chinese))
- 40 芮筱亭,俞来峰,陆毓琪,等. 多体系统传递矩阵法及其应用. 北京:科学出版社,2008(Rui X T, Yun L F, Lu Y Q, et al. Transfer matrix method of multi-body and its application. Beijing: Science Press, 2008(in Chinese))
- 41 芮筱亭,党双喜,张金奎,等. 多体系统传递矩阵法在火炮动力学中的应用. 力学与实践,1995,17(4):42~44(Rui X T, Dang S X, Zhang J K, et al. Transfer matrix method of multi-body and its application in artillery dynamic. *Mechanics and Engineering*, 1995,17(4):42~44(in Chinese))
- 42 芮筱亭,邱凤昌. 多体火炮系统的固有振动特性. 兵工学报,1995,16(2):6~12(Rui X T, Qiu F C. Natural vibration of multibody gun system-transfer matrix method of mltibody system dynamics. *Acta Armamentarii*, 1995,16(2):6~12(in Chinese))
- 43 芮筱亭. 用传递矩阵法研究火炮系统特性. 兵工学报,

- 1996,17(1):75~78(Rui X T, Qin Y X, Yi Z Q. Etc. Vibration characteristics of gun systems studied through the transfer matrix method. *Acta Armamentarii*, 1996,17(1):75~78(in Chinese))
- 44 Rui X T, Qiu F C. Natural vibration of multibody gun system. *International Symposium on Cannon and Gun technology*, China, Nanjing, 1993:494~502
- 45 袁士杰,吕哲勤. 多刚体系统动力学. 北京:北京理工大学出版社,1992(Yun S J, Lu Z Q. Multi-rigid body system dynamics. Beijing:Beijing institute of Technology Journal, 1992(in Chinese))
- 46 徐诚,王亚平. 火炮与自动武器动力学. 北京:北京理工大学出版社,2006(Xu C, Wang Y P. Artillery and automatic weapons dynamics. Beijing: Beijing institute of Technology Journal, 2006(in Chinese))
- 47 Roberson R E, Wittenburg J. A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodied . Proceedings of the 3rd International Formalism Analysis Conference. UK, London, 1968:141~166
- 48 Wittenburg J. Dynamics of systems of rigid bodies . Stuttgart:B. G. Teubner, 1977
- 49 Wittenburg J, Wolz U. The program for robot dynamics simulation. *Robotics Research*, 1986,70:96~122
- 50 陆佑方. 柔性多体系统动力学. 北京:高等教育出版社,1993(Lu Youfang. Flexible Multi-Body System Dynamics. Beijing:Higher Education Press, 1993(in Chinese))
- 51 周曾素,黄惠冲. 弹道学. 武汉:海军工程学院,1996(Zhou Z S, Huang H C. Study of ballistics. Wuhan: Naval College of Engineering, 1996(in Chinese))
- 52 杨国来,陈运生. 火炮动力学模型降阶的一种方法. 弹道学报,1999,11(2):62~65(Yang G L, Chen Y S. A method applied to reduction of artillery dynamic models. *Journal of Ballistics*, 1999,11(2):62~65(in Chinese))

RESEARCH ON GUNS VIBRATION AND MODELING METHODS BY MULTIBODY DYNAMICS*

Wang Deshi[†] Shi Yuedong

(Department of Weaponry Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract Gun's vibration is significant for the firing accuracy, which has been a classical problem concerned for long time due to particularity of the shock excitation and complexity of the mechanism system, it is the dominant research branch to establish a dynamic model approaching the true movement of gun and to obtain the vibration characteristic under the various excitations corresponding to such a problem. This paper develops the modeling methods for gun's vibration based on the dynamics of the rigid bodies and multi-flexible bodies systems respectively by Lagrange equation and Gaussian variational principle, and uses the rigid models and rigid-flexible coupling models to analyze gun's vibration. Besides, the vibration response of gun system to the shock is simulated and the natural vibration characteristic is treated for the gun's mechanism. Finally, the amplitudes variety of the vibration with the structural parameters of gun are obtained. The research results indicate the mechanism for improving the vibration performance of gun to increasing the firing accuracy, and have value to engineering application.

Key words gun and firing accuracy, shock and vibration, multibody dynamics, Lagrange equation, Gaussian variational principle

附录:

3.2节中的舰炮多刚体系统动力学方程为:

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)q = f(q, t)$$

其中 $A(q)$ 、 $G(q)$ 、 $C(q, \dot{q})$ 、 $f(q, t)$ 分别为多刚体系统的质量矩阵、刚度矩阵、阻尼矩阵和整理后的广义力矩阵. 设矩阵 $A(q)$ 、 $G(q)$ 、 $C(q, \dot{q})$ 、 $f(q, t)$ 内元素分别为 a_{ij} 、 g_{ij} 、 c_{ij} 、 f_i , 且有

$$s_1 = \sin 2(q_3 + \theta + q_2) \quad c_1 = \cos 2(q_3 + \theta + q_2)$$

$$s_2 = \sin(q_3 + \theta + 2q_2) \quad c_2 = \cos(q_3 + \theta + 2q_2)$$

$$s_3 = \sin(q_3 + \theta + q_2) \quad c_3 = \cos(q_3 + \theta + q_2)$$

k_f 、 k_j 、 k_g 分别为方向机、甲板、高低机等效刚度

c_f 、 c_j 、 c_g 分别为方向机、甲板、高低机等效阻尼

θ 为火炮射角、 m_i 为刚体 B_i 质量

P_i 为炮膛合力, R_i 为后坐复进过程中的阻力

$$P_i = [x_{pi} \quad y_{pi} \quad z_{pi}]^T \quad l_i = [x_{li} \quad y_{li} + \delta(i-3)q_4 \quad z_{li}]^T$$

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{xi} & J_{xyi} & J_{xzi} \\ J_{yxi} & J_{yi} & J_{yzi} \\ J_{zxi} & J_{zyi} & J_{zi} \end{bmatrix}$$

$$J_{xyi} = J_{yxi} \quad J_{xzi} = J_{zxi} \quad J_{zyi} = J_{zyi}$$

则矩阵 $A(q)$ 、 $G(q)$ 、 $C(q, \dot{q})$ 、 $f(q, t)$ 的表达式如下:

(1) 质量矩阵 $A(q)$

$$a_{11} = J_{y1} \sin^2 q_2 + J_{y21} \sin 2q_2 + J_{z1} \cos^2 q_2 + [(y_{p1}^2 - z_{p1}^2) \cos^2 q_2 + x_{p1}^2 - y_{p1} z_{p1} \sin 2q_2 + z_{p1}^2] m_1 + [z_{l2} \sin q_2 - y_{l2} \cos q_2 + z_{p2} s_3 - y_{p2} c_3]^2 m_2 + [z_{l2} \sin q_2 - y_{l2} \cos q_2 + (z_{l3} + z_{p3}) s_3 - (q_4 + y_{l3} + y_{p3}) c_3]^2 m_3$$

$$a_{12} = -x_{p1} (z_{p1} \cos q_2 + y_{p1} \sin q_2) m_1 +$$

$$J_{xy1} \sin q_2 + J_{xz1} \cos q_2$$

$$a_{13} = a_{14} = 0 \quad a_{21} = a_{12}$$

$$a_{22} = J_{x1} + (z_{p1}^2 + y_{p1}^2) m_1 + \{ [-y_{p2} \sin(q_3 + \theta) - z_{p2} \cos(q_3 + \theta) - z_{l2}]^2 + [y_{l2} + y_{p2} \cos(q_3 + \theta) - z_{p2} \sin(q_3 + \theta)]^2 \} m_2 + \{ [-z_{l3} - z_{p3} - z_{l2} \cos(q_3 + \theta) + y_{l2} \sin(q_3 + \theta)]^2 + [y_{p3} + y_{l2} \cos(q_3 + \theta) + y_{l3} + q_4 + z_{l2} \sin(q_3 + \theta)]^2 \} m_3$$

$$a_{23} = [y_{p2}^2 + z_{p2}^2 + \sin(q_3 + \theta)(y_{p2} z_{l2} - y_{l2} z_{p2}) + \cos(q_3 + \theta)(z_{p2} z_{l2} + y_{l2} y_{p2})] m_2 + \{ y_{p3}^2 + z_{l3}^2 + z_{p3}^2 + y_{l3}^2 + q_4^2 + 2[z_{l3} z_{p3} + y_{l3} y_{p3} + q_4(y_{l3} + y_{p3})] + \cos(q_3 + \theta)[z_{l2}(z_{l3} + z_{p3}) + y_{l2}(y_{l3} + q_4 + y_{p3})] + \sin(q_3 + \theta)[z_{l2}(y_{p3} + q_4 + y_{l3}) - y_{l2}(z_{l3} + z_{p3})] \} m_3$$

$$a_{24} = [- (z_{l3} + z_{p3}) + y_{l2} \sin(q_3 + \theta) -$$

$$z_{l2} \cos(q_3 + \theta)] m_3$$

$$a_{31} = a_{13} \quad a_{32} = a_{23}$$

$$a_{33} = J_{x2} + J_{x3} + (y_{p2}^2 + z_{p2}^2) m_2 + [(y_{p3} + y_{l3} + q_4)^2 + (z_{l3} + z_{p3})^2] m_3$$

$$a_{34} = - (z_{p3} + z_{l3}) m_3$$

$$a_{41} = a_{14} \quad a_{42} = a_{24} \quad a_{43} = a_{34} \quad a_{44} = m_3$$

(2) 刚度矩阵 $G(q)$

$$g_{11} = k_f \quad g_{22} = k_j \quad g_{33} = k_g \quad g_{24} = c_3 m_3 g \quad g_{34} = c_3 m_3 g$$

$$g_{12} = g_{13} = g_{14} = g_{21} = g_{23} = g_{31} =$$

$$g_{32} = g_{41} = g_{42} = g_{43} = g_{44} = 0$$

(3) 阻尼矩阵 $C(q, \dot{q})$

$$-c_{11} = \dot{q}_2 [(y_{p1}^2 - z_{p1}^2) \sin 2q_2 + 2y_{p1} z_{p1} \cos 2q_2] m_1 + \{ s_1 (\dot{q}_3 + \dot{q}_2) y_{p2}^2 + [(s_2 y_{l2} + 2c_1 z_{p2} - \cos(q_3 + \theta)) z_{l2} + y_{l2} \sin(q_3 + \theta) + c_2 z_{l2}] \dot{q}_3 + 2(s_2 y_{l2} + c_2 z_{l2} + c_1 z_{p2}) \dot{q}_2 \} y_{p2} + [2y_{l2} z_{p2} c_2 + (y_{l2}^2 - z_{l2}^2) \sin 2q_2 - 2z_{l2} z_{p2} s_2 + 2y_{l2} z_{l2} \cos 2q_2 - z_{p2}^2 s_1] \dot{q}_2 + [-z_{p2}^2 s_1 - z_{l2} z_{p2} s_2 + z_{l2} z_{p2} \sin(q_3 + \theta) + y_{l2} z_{p2} \cos(q_3 + \theta) + y_{l2} z_{p2} c_2] \dot{q}_3 \} m_2 + \{ s_1 [\dot{q}_2 y_{l3}^2 - \dot{q}_3 (z_{l3}^2 + z_{p3}^2)] + [2\dot{q}_2 (y_{l3}) s_1 + y_{l2} s_2 + z_{p3} c_1 + z_{l3} c_1 + z_{l2} c_2 + q_4 s_1] + \dot{q}_3 (c_2 z_{l2} + 2z_{l3} c_1 - z_{l2} \cos(q_3 + \theta) + 2q_4 s_1 + s_2 y_{l2} + 2z_{p3} c_1 + 2y_{l3} s_1 + \sin(q_3 + \theta)) - (c_1 + 1) \dot{q}_4 \} y_{p3} + \dot{q}_2 [2(z_{l3} y_{l2} + y_{l3} z_{l2} + q_4 z_{l2} + z_{p3} y_{l2}) c_2 + 2(z_{p3} q_4 + y_{l3} z_{l3} + z_{p3} y_{l3} + q_4 z_{l3}) c_1 + (2y_{l3} q_4 - 2z_{p3} z_{l3} + q_4^2 + y_{p3}^2 - z_{l3}^2 - z_{p3}^2) s_1 + 2(y_{l2} y_{l3} + y_{l2} q_4 - z_{l2} z_{p3} - z_{l2} z_{l3}) s_2 + 2y_{l2} z_{l2} \cos 2q_2 + (y_{l2}^2 - z_{l2}^2) \sin 2q_2] + \dot{q}_3 [2(z_{p3} q_4 + y_{l3} z_{l3} + z_{p3} y_{l3} + q_4 z_{l3}) c_1 + (z_{l3} + y_{l2} + y_{l3} z_{l2} + q_4 z_{l2} + z_{p3} y_{l2}) c_2 + (2y_{l3} q_4 - 2z_{p3} z_{l3} + q_4^2 + y_{p3}^2 + y_{l3}^2) s_1 + (y_{l2} y_{l3} + y_{l2} q_4 - z_{l2} z_{p3} - z_{l2} z_{l3}) s_2 + (z_{p3} y_{l2} + y_{l2} z_{l3} - q_4 z_{l2} - y_{l3} z_{l3}) \cos(q_3 + \theta) + (z_{l2} z_{l3} + q_4 y_{l2} + z_{l2} z_{p3} + y_{l2} y_{l3}) \sin(q_3 + \theta)] + \dot{q}_4 [(z_{l3} + z_{p3}) s_1 - (y_{l3} + q_4) c_1 + z_{l2} (s_2 - \sin(q_3 + \theta)) - y_{l2} (c_2 + \cos(q_3 + \theta)) - y_{l3} - q_4] \} m_3 + \dot{q}_2 [-2J_{y21} \cos 2q_2 + (J_{z1} - J_{y1}) \sin 2q_2] - c_f$$

$$-c_{12} = \dot{q}_2 [J_{xz1} \sin q_2 - J_{xy1} \cos q_2 + m_1 (y_{p1} \cos q_2 - z_{p1} \sin q_2) x_{p1}]$$

$$c_{13} = c_{14} = 0$$

$$-c_{21} = \dot{q}_1 \{ [0.5(z_{p1}^2 - y_{p1}^2) \sin 2q_2 - y_{p1} z_{p1} \cos 2q_2] m_1 + [0.5(y_{p2}^2 + z_{p2}^2) s_1 + (z_{p2} z_{l2} - y_{p2} y_{l2}) s_2 -$$

$$\begin{aligned}
& y_{p2}z_{p2}c_1 - (z_{l2}y_{p2} + y_{l2}z_{p2})c_2 + 0.5(z_{l2}^2 - \\
& y_{l2}^2)\sin 2q_2 - z_{l2}y_{l2}\cos 2q_2 \} m_2 + \{ [0.5(z_{p3}^2 + \\
& z_{l3}^2 - q_4^2 - y_{p3}^2 - y_{l3}^2) - y_{l3}q_4 + z_{p3}z_{l3} - (z_{l3} + \\
& q_4)y_{p3} \} s_1 + [z_{l2}(z_{l3} + z_{p3}) - y_{l2}(y_{l3} + y_{p3} + \\
& q_4)] s_2 - (q_4 + y_{p3} + y_{l3})(z_{l3} + z_{p3})c_1 - \\
& [z_{l2}(y_{p3} + q_4 + y_{l3}) + y_{l2}(z_{l3} + z_{p3})] c_2 + \\
& 0.5(z_{l2}^2 - y_{l2}^2)\sin 2q_2 - z_{l2}y_{l2}\cos 2q_2 \} m_3 + \\
& 0.5(J_{y1} - J_{z1})\sin 2q_2 + J_{y1}\cos 2q_2 \} \\
-c_{22} = & 2\dot{q}_3[(y_{p2}y_{l2} + z_{p2}z_{l2})\sin(q_3 + \theta) + (z_{p2}y_{l2} - \\
& y_{p2}z_{l2})\cos(q_3 + \theta)] m_2 + 2\{ [(y_{l2}(y_{p3} + y_{l3} + \\
& q_4) + z_{l2}(z_{p3} + z_{l3}))\dot{q}_3 - \dot{q}_4z_{l2}]\sin(q_3 + \theta) + \\
& [(y_{l2}(z_{p3} + z_{l3})) - z_{l2}(y_{l3} + y_{p3} + q_4)]\cos(q_3 + \\
& \theta) - \dot{q}_4(y_{l3} + y_{p3} + q_4) \} m_3 - c_j \\
-c_{23} = & \{ [(y_{l2}y_{p2} + z_{p2}z_{l2})\sin(q_3 + \theta) + (z_{p2}y_{l2} - \\
& z_{l2}y_{p2})\cos(q_3 + \theta)] m_2 + \{ [y_{l2}(y_{p3} + y_{l3} + \\
& q_4) + z_{l2}(z_{l3} + z_{p3})]\sin(q_3 + \theta) + [y_{l2}(z_{p3} + \\
& z_{l3}) - z_{l2}(y_{p3} + y_{l3} + q_4)]\cos(q_3 + \\
& \theta) \} m_3 \} \dot{q}_3 - 2\dot{q}_4[y_{l3} + q_4 + y_{p3} + z_{l2}\sin(q_3 + \\
& \theta) + y_{l2}\cos(q_3 + \theta)] m_3 \\
c_{24} = & 0 \\
-c_{31} = & \dot{q}_1 \{ 0.5[(z_{p2}^2 - y_{p2}^2)s_1 + (z_{l2}z_{p2} - \\
& y_{l2}y_{p2})s_2 - 2z_{p2}y_{p2}c_1 - (y_{l2}z_{p2} + z_{l2}y_{p2})c_2 + \\
& (z_{l2}y_{p2} - y_{l2}z_{p2})\cos(q_3 + \theta) - (z_{l2}z_{p2} + \\
& y_{l2}y_{p2})\sin(q_3 + \theta)] m_2 + \{ [z_{l3}z_{p3} - y_{l3}q_4 + \\
& 0.5(z_{l3}^2 + z_{p3}^2 - y_{p3}^2 - q_4^2 - y_{l3}^2) - (q_4 + \\
& y_{l3})y_{p3} \} s_1 + 0.5[z_{l2}(z_{l3} + z_{p3}) - y_{l2}(y_{l3} + q_4 + \\
& y_{p3})] s_2 - (z_{l3} + z_{p3})(y_{l3} + q_4 + y_{p3})c_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.5[z_{l2}(y_{l3} + q_4 + z_{p3}) + y_{l2}(z_{l3} + z_{p3})] c_2 - \\
& 0.5[z_{l2}(z_{l3} + z_{p3} + y_{l3}) + y_{l2}(q_4 + y_{p3})]\sin(q_3 + \\
& \theta) + 0.5[z_{l2}(y_{l3} + q_4 + y_{p3}) - y_{l2}(z_{l3} + \\
& z_{p3})]\cos(q_3 + \theta) \} m_3 \} \\
-c_{32} = & \dot{q}_2 \{ [(z_{l2}y_{p2} - y_{l2}z_{p2})\cos(q_3 + \theta) - \\
& (y_{l2}y_{p2} + z_{l2}z_{p2})\sin(q_3 + \theta)] m_2 + \{ [z_{l2}(y_{l3} + \\
& q_4 + y_{p3}) - y_{l2}(z_{l3} + z_{p3})]\cos(q_3 + \theta) - \\
& [y_{l2}(y_{l3} + q_4 + y_{p3}) + z_{l2}(z_{l3} + z_{p3})]\sin(q_3 + \\
& \theta) \} m_3 \} - 2\dot{q}_4(y_{l3} + q_4 + y_{p3}) m_3 \\
-c_{33} = & -2\dot{q}_4(y_{l3} + q_4 + y_{p3}) m_3 - c_g \\
c_{34} = & 0 \\
-c_{41} = & 0.5\dot{q}_1[(y_{p3} + q_4 + y_{l3})c_1 + y_{l2}c_2 - (z_{l3} + \\
& z_{p3})s_1 - z_{l2}s_2 + z_{l2}\sin(q_3 + \theta) + y_{l2}\cos(q_3 + \\
& \theta) + y_{p3} + y_{l3} + q_4 + y_{l2}] m_3 \\
-c_{42} = & \dot{q}_2[y_{p3} + y_{l3} + q_4 + z_{l2}\sin(q_3 + \theta) + \\
& y_{l2}\cos(q_3 + \theta)] m_3 + 2\dot{q}_3(y_{p3} + y_{l3} + q_4) m_3 \\
-c_{43} = & \dot{q}_3(y_{p3} + y_{l3} + q_4) m_3 \\
c_{44} = & 0
\end{aligned}$$

(4) 整理后的广义力矩阵 $f(q, t)$

$$\begin{aligned}
f_1 = & 0 \\
f_2 = & \{ (z_{p1}\sin q_2 - y_{p1}\cos q_2) m_1 + (z_{l2}\sin q_2 - \\
& y_{l2}\cos q_2 + z_{p2}s_3 - y_{p2}c_3) m_2 + [(z_{l3} + z_{p3})s_3 - \\
& (y_{l3} + y_{p3})c_3] m_3 \} g + P(t)S[y_{l2}\sin(q_3 + \\
& \theta) - z_{l2}\cos(q_3 + \theta) - z_{l3}] \\
f_3 = & \{ (z_{p2}s_3 - y_{p2}c_3) m_2 + [(z_{l3} + z_{p3})s_3 - (y_{l3} + \\
& y_{p3})c_3] m_3 \} g - P_t z_{l3} \\
f_4 = & -R_t - s_3 m_3 g + P_1
\end{aligned}$$