

一类奇异线性脉冲系统的中心和焦点*

凌琳 刘苏雨 蒋贵荣[†]

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 桂林 541004)

摘要 利用离散映射讨论了一类二维奇异线性脉冲系统无穷多个周期解的存在性, 利用得到的周期解讨论了特征值不连续变化的现象以及中心和焦点存在的条件, 用数值例子给出了系统存在焦点和中心的相图, 很好的验证了理论分析结果.

关键词 线性脉冲系统, 周期解, 焦点, 中心

引言

二维常系数的奇异线性系统的动力学性质简单, 有零特征根, 存在奇线, 没有中心和焦点^[1,2]. 在航天技术、控制系统、通信、经济、信息科学等许多学科中, 系统的变量在变化过程中的某个时刻会发生突然的变化, 这种复杂的动力行为可用脉冲微分动力系统来描述^[3,4]. 脉冲的应用广泛, 如复杂网络的脉冲同步^[5,6], 碰撞动力学分析^[7]等等.

将脉冲效应引进线性微分系统后情况变得复杂起来. 尽管得到了一些类似于线性常微分系统理论, 如解的存在唯一性、稳定性等等, 但仍有许多未知的现象和解的性质有待人们探索. 由于周期解的重要性及其在实际中的应用, 人们想法寻找它存在的条件, 讨论它的稳定性. 性脉冲哈密顿系统的周期解可以用 Floquet 理论来讨论^[4], 文[8,9]讨论了周期解的存在性和稳定性. 但这里的周期解是唯一的, 对系统存在多个周期解的研究不多, 文[10]获得了系统存在3个周期解的条件.

本文讨论脉冲动力系统存在无穷多个周期解的条件, 并且利用周期解讨论特征值的不连续变化以及存在焦点和中心的条件.

1 奇异线性脉冲系统

考虑下列线性脉冲系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + by(t), \\ \dot{y}(t) = cx(t) - ay(t), \end{cases} \Bigg\} t \neq nT$$

$$\begin{cases} \Delta x = -(1-p)x, \\ \Delta y = -(1-r)y + h, \end{cases} \Bigg\} t = nT \quad (1)$$

在条件 $a^2 + bc = 0$ 下, (1) 中第一、二个方程组成的线性常微分系统是奇异的, 不存在中心和焦点. 为易于计算, 令 $T = 1/a$. 现假设系统(1)从初始点 $A_k(x_k, y_k)$ 出发的轨线在时刻 T 到达 $B_k(x_{k0}, y_{k0})$, 然后在脉冲地的作用下跳跃到点 $A_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$. 由系统(1)得映射(2):

$$F: \begin{cases} x_{k+1} = 2px_k + \frac{pb}{a}y_k \\ y_{k+1} = \frac{rc}{a}x_k + h, \end{cases} \quad ax_k + by_k \neq 0 \quad (2a)$$

$$G: \begin{cases} x_{k+1} = px_k \\ y_{k+1} = ry_k + h, \end{cases} \quad ax_k + by_k \neq 0 \quad (2b)$$

2 特征值的不连续变化

当 $h = 0$ 时, $A(0, 0)$ 是(2)有唯一的不动点, 特征值为 $\lambda_{1A} = p, \lambda_{2A} = r$. 在条件 $-1 < p, r < 1$ 下, 系统(2)有唯一的稳定的零解.

当 $h \neq 0$ 时, $B(\frac{pb}{a(1-2b+pr)}h, \frac{1-2p}{1-2b+pr}h)$ 为(2)的不动点. 在条件 $\frac{1}{3} < p < 1, -1 < r < 2 - \frac{1}{p}$ 下,

不动点 B 的特征值为 $\lambda_{12B} = p \pm \sqrt{p^2 - pr}$, 其中特征值 $\lambda_B > 1$ 在单位圆的外部. 故在(1)中, 随着 h 的变化, 不动点不发生跳跃, 特征值发生了跳跃. 下面考虑 $h = 0$ 和参数曲线 $L_1: r = -2 - \frac{1}{p}, L_2: r = \frac{1}{p}$.

2012-04-20 收到第1稿, 2012-06-18 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11162004, 60964006)和广西自然科学基金资助项目(2012GXNSFAA053006)

[†] 通讯作者 E-mail: grjiang9@163.com

3 焦点

考虑 L_1 和 $h=0$, 复合映射 F^2 为

$$\begin{cases} x_{k+2} = (4p^2 + 2p + 1)x_k + \frac{2p^2b}{a}y_k, \\ y_{k+2} = \frac{(-4p-2)c}{a}x_k + (2p+1)y_k \end{cases} \quad (3)$$

令映射(3)的不动点为 (x_0, y_0) , 由(3)有 $(4p^2 + 2p)x_0 + \frac{2p^2b}{a}y_0 = 0, ax_0 + by_0 \neq 0$. 从而映射(3)具有无穷多个不动点, 系统(1)具有无穷多个周期-2解, 这些解上的初始点都在同一条直线 $L: (2p+1)x + \frac{pb}{a}y = 0$ 上.

现假设直线 L 过第二、四象限, 并且在 L 上取点 (x_k, y_k) , 其中 $x_k < 0, y_k > 0$. 令 $r = -2 - \frac{1}{p} + \beta$. 如果 (x_{k+2}, y_{k+2}) 仍然在第二象限, 并且 $x_k < x_{k+2} < 0, y_k > y_{k+2} > 0$, 则原点是稳定的焦点. 故有

$$\begin{cases} x_k < (4p^2 - p(-2 - \frac{1}{p} + \beta))x_k + \frac{2p^2b}{a}y_k < 0 \\ y_k > \frac{2p(-2 - \frac{1}{p} + \beta)c}{a}x_k - \\ p(-2 - \frac{1}{p} + \beta)y_k > 0 \end{cases} \quad (4)$$

由(5)和 $(x_k, y_k) \in L$ 有

$$\begin{cases} 0 < p\beta < 1, \\ -\frac{a(2p+1)}{p\beta} < -(1-p\beta)\frac{a(2p+1)}{p\beta} + \\ \frac{2p\beta c}{a} < 0 \end{cases} \quad (5)$$

如果 (x_{k+2}, y_{k+2}) 仍然在第二象限, 并且 $x_{k+2} < x_k < 0, y_{k+2} > y_k > 0$, 则原点是不稳定的焦点, 类似可得

$$\begin{cases} p\beta < 0, \\ -(1-p\beta)\frac{a(2p+1)}{p\beta} + \frac{2p\beta c}{a} < \\ -\frac{a(2p+1)}{p\beta} < 0 \end{cases} \quad (6)$$

定理 1 令 $r = -2 - \frac{1}{p} + \beta$ 和 $h=0$, 则系统(1)在条件(5)下存在一个稳定的焦点, 在条件(6)下存在一个不稳定的焦点.

4 中心

本节中令 $a=c=-b, h=0$, 考虑参数曲线 L_2 .

设初始点为 $(0, l)$, 当 $p \neq \pm \frac{\sqrt{1}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 由映射(2)有相继的6个点为:

$$\begin{aligned} & A(0, l), B(-pl, 0), C(-2p^2l, -l), \\ & D(p(1-4p^2)l, -2pl), \\ & E(4p^2(1-2p^2)l, (1-4p^2)l), \\ & F(p(12p^2-16p^4-1)l, 4p(1-2p^2)l). \end{aligned}$$

当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $(0, l), (0.5l, 0), (-0.5l, -l), (0.5l, 0), (0.5l, l), (0, l)$ 依次为解上的点, 这些点按逆时针回到起点, 系统存在周期-6解, 并且这些点关于原点对称. 当 l 取不同的值时, $|l|$ 的值大的相图包围着的值小的相图. 当 $l=0$ 时, 系统的解是零解, 原点是中心. 可以证明从任意点出发的解都是周期-6解, 有结论:

定理 2 系统(1)在条件 $h=0, r=2, p=0.5$ 下存在无穷多个周期-6解, 其中任意两个周期解中一个包围另一个, 从而原点是中心.

类似的, 考虑点 C , 当 $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 系统(1)存在

无穷多个周期-8解; 考虑点 D , 当 $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 系统(1)存在无穷多个周期-12解; 考虑 E , 当 $p = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 时, 系统(1)存在无穷多个周期-16解. 对于不为上述特殊值的 $p > 0$, 系统(1)的解不是周期解, 但这些解的脉冲点围成一个椭圆. 所有这些椭圆中的任意两个椭圆中一个包围着另一个, 原点仍然是中心, 有结论:

定理 3 系统(1)在条件 $h=0, r=1/p > 0$ 下任意两个解中一个包围另一个, 从而原点是中心.

5 数值模拟

在系统(1)中, 取 $a=c=-b=1$ 令初始点为 $(-10, 0.1), p=-0.5, \beta=-0.1$ 条件(5)成立, $p=-0.5, \beta=0.1$ 条件(6)成立, 图1和图2分别画出了系统稳定和不稳定的焦点, 验证了定理1.

取 $p=0.5$ 和 $p=0.75$, 系统(1)的相图分别如图3和图4所示, 系统存在中心, 验证了定理2.

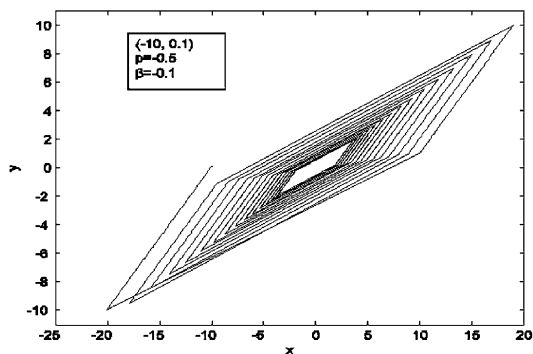


图1 系统(1)在 $p = -0.5, \beta = -0.1, r = -0.1$ 时的相图
Fig. 1 A solution of (1) with $p = -0.5, \beta = -0.1, r = -0.1$

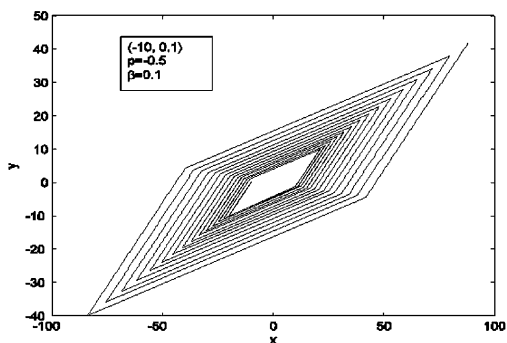


图2 系统(1)在 $p = -0.5, \beta = 0.1, r = 0.1$ 时的相图
Fig. 2 A solution of (1) with $p = -0.5, \beta = 0.1, r = 0.1$

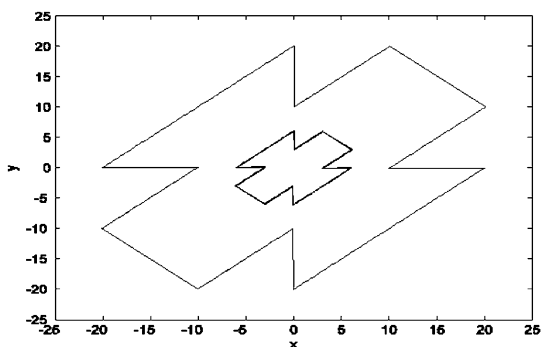


图3 系统(1)在 $p = 0.5, r = 2$ 时的相图
Fig. 3 Phase portrait of (1) with $p = 0.5, r = 2$

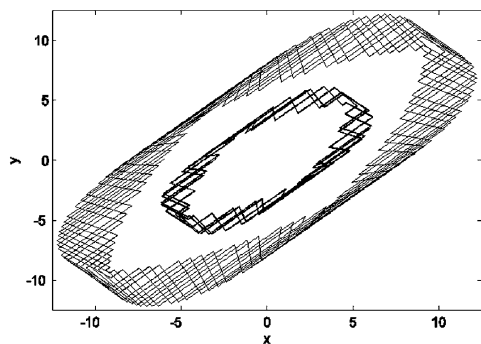


图4 系统(1)在 $p = 0.75, r = 0.75^{-1}$ 时的相图
Fig. 4 Phase portrait of (1) with $p = 0.75, r = 0.75^{-1}$

6 结论

本文讨论了一类二维奇异线性脉冲系统动力学性质. 利用离散映射讨论了特征值不连续变化的现象; 分析得到了系统存在无穷多个周期-2解的充分条件, 继而得到了系统存在稳定和不稳定焦点的条件; 分析得到了系统存在无穷多个周期-6解的充分条件, 继而得到了系统中心的条件. 值得一提的是, 对于本文中的二维奇异线性脉冲系统的中心情形, 存在非周期解包围着另一个非周期的现象, 这与常微分方程里的中心情形不同. 数值结果也很好的验证了理论分析的正确性.

参 考 文 献

- 1 王高雄等. 常微分方程(第二版). 北京: 高等教育出版社, 2003 (Wang G X. Ordinary differential equation. Beijing: Higher Education Press, 2003 (in Chinese))
- 2 马知恩, 周义仓. 常微分方程与稳定性理论. 北京: 科学出版社, 2001 (Ma Z E, Zhou Y C. Ordinary differential equation and stability theory. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese))
- 3 Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of impulsive differential equations. Singapore: World Scientific; 1989
- 4 Bainov D D, Simeonov P S. Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications. New York: Longman Scientific & Technical; 1993
- 5 张刚, 张伟. 复杂网络的脉冲同步. 动力学与控制学报, 2009, 7(1): 1~4 (Zhang Y M, Zhang W. Impulsive synchronization of complex network. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(1): 1~4 (in Chinese))
- 6 张华, 颜青, 吴泉军, 周进. 具有脉冲耦合复杂时滞动力网络的同步. 动力学与控制学报, 2011, 9(4): 348~351 (Zhang H, Yan Q, Wu Q J, Zhou J. Synchronization in complex delayed dynamical networks with impulsive coupling. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(4): 348~351 (in Chinese))
- 7 刘佳斌, 龙新华. 双悬臂梁在简谐力作用下的碰撞动力学分析. 动力学与控制学报, 2011, 9(3): 227~232 (Liu J B, Long X H. Dynamic analysis on vibro-impact between two cantilevers excited by harmonic force. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(3): 227~32 (in Chinese))
- 8 陈福来, 文贤章. 具有脉冲和无穷时滞的捕食-食饵系统

- 的正周期解. 湖南师范大学自然科学学报, 2003, 26(1): 6 ~ 11 (Chen F L, Wen X Z. Positive periodic solution of predator-prey system with impulses and infinite delays. *Journal Nat Scie Hunan Norm Uni*, 2003, 26(1): 6 ~ 11 (in Chinese))
- 9 杨志春, 徐道义. 具有反馈控制和无穷分布时滞的脉冲型竞争系统的正周期解及其稳定性. 应用数学学报, 2009, 32(1): 132 ~ 142 (Yang Z C, Xu D Y. Positive periodic solution and its stability of a impulsive competition system with feedback control and infinite delay. *Acta Mathematicae Applicatae Ninica*, 2009, 32(1): 132 ~ 142 (in Chinese))
- 10 汪代明, 冯春华. 一类时滞脉冲微分方程的 3 个正周期解. 吉林大学学报(理学版), 2011, 49(3): 391 ~ 396 (Wang D M, Feng C H. Three positive periodic solutions to a kind of impulsive differential equations with delay. *Journal of Jilin University*, 2011, 49(3): 391 ~ 396 (in Chinese))

FOCUS AND CENTER OF A SINGULAR LINEAR IMPULSIVE SYSTEM*

Ling Lin Liu Suyu Jiang Guirong[†]

(School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract The existence of periodic solutions of a singular linear impulsive system was studied by using discrete maps. The discontinuous change of eigenvalues and the existence conditions for focus and center were investigated. Numerical results for focus and center, illustrated with an example, are in good agreement with the theoretical analysis.

Key words linear impulsive system, periodic solution, pulse vaccination, focus, center