第 10 卷第 4 期 2012 年 12 月
1672-6553/2012/10(4)/289-4
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 10 No. 4
Dec. 2012

广义 Birkhoff 系统的梯度表示*

梅凤翔[1†]　吴惠彬[2]

(1. 北京理工大学宇航学院,北京　100081)(2. 北京理工大学数学学院,北京　100081)

摘要　研究广义 Birkhoff 系统的梯度表示. 给出广义 Birkhoff 系统可成为梯度系统的条件. 利用梯度系统的性质来研究广义 Birkhoff 系统的稳定性. 举例说明结果的应用.

关键词　广义 Birkhoff 系统，　梯度系统，　稳定性

引 言

Birkhoff 系统是 Hamilton 系统的一种推广[1-3]，广义 Birkhoff 系统又是 Birkhoff 系统的一种推广[4,5]. 文献[5-15]研究了广义 Birkhoff 系统的各类动力学问题,包括积分方法,稳定性等. 文献[16]第 9 章“大范围非线性技巧”中研究了两类重要系统,一类是梯度系统,另一类是 Hamilton 系统. 梯度系统是微分方程和动力系统中的重要问题,特别适合用 Lyapunov 函数来研究. 如果一个力学系统能够成为梯度系统,那么就可利用梯度系统的特性来研究力学系统的性质,特别是运动稳定性质. 本文研究广义 Birkhoff 系统成为梯度系统的条件,并利用梯度系统的性质来研究广义 Birkhoff 系统的稳定性.

1　梯度系统

梯度系统的微分方程有形式[16]

$$\dot{x}_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i},\quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{1}$$

其中 $V=V(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 称为势函数. 方程(1)可表示为矢量形式

$$\dot{X}=-\mathrm{grad}V(X) \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$$

$$\mathrm{grad}V=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_m}\right)$$

梯度系统有如下重要性质[16]：

1）函数 V 是系统(2)的一个 Lyapunov 函数,并且 $\dot{V}=0$,当且仅当 $\boldsymbol{X}$ 是一个平衡点；

2）设 $\boldsymbol{Z}$ 是一个梯度流的解的 α 极限点,或 ω 极限点,则 $\boldsymbol{Z}$ 为平衡点；

3）对于梯度系统(2),任一平衡点处的线性化系统都只有实特征值.

以上三条性质,特别是第一条和第三条性质,可用来研究可化成梯度系统的力学系统的平衡位置及其稳定性.

与第一条性质相关,只要势函数 V 成为 Lyapunov 函数,那么就有可能由 $\dot{V}$ 的形式,按 Lyapunov 定理研究系统的稳定性,或按 Rumyantsev 定理研究部分变量稳定性.

与第三条性质相关,据 Lyapunov 一次近似理论,如果线性化系统的特征根全为负实根,则系统是渐近稳定的;如果有正实根,则是不稳定的.

2　系统的梯度表示

广义 Birkhoff 系统的微分方程有形式[4]

$$\left(\frac{\partial R_v}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^v}\right)\dot{a}^v-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=-\Lambda_\mu,\quad (\mu,v=1,2,\cdots,2n) \tag{3}$$

其中 $B=B(t,a)$ 为 Birkhoff 函数,$R_\mu=R_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数组,$\Lambda_\mu=\Lambda_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 为附加项. 这里及以后我们约定:同一项中,相同的活动指标表示对其求和. 对自治情形

$$R_\mu=R_\mu(\boldsymbol{a}),B=B(\boldsymbol{a}),\Lambda_\mu=\Lambda_\mu(\boldsymbol{a}) \tag{4}$$

此时方程(3)可表示为

$$\Omega_{\mu v}\dot{a}^v-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\Lambda_\mu=0 \tag{5}$$

2012-09-14 收到第 1 稿,2012-11-02 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10932002, 10972031, 11272050);北京市重点学科基金资助项目
† 通讯作者 E-mail:meifx@bit.edu.cn

其中

$$\Omega_{\mu v}=\frac{\partial R_v}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^v} \tag{6}$$

设系统非奇异,即

$$\det(\Omega_{\mu v})\neq 0 \tag{7}$$

则方程(5)可表示为

$$\dot a^\mu=\Omega^{\mu v}\frac{\partial B}{\partial a^v}-\tilde\Lambda_\mu \tag{8}$$

其中

$$\Omega^{\mu\rho}\Omega_{\rho v}=\delta_v^\mu \tag{9}$$

$$\tilde\Lambda_\mu=\Omega^{\mu v}\Lambda_v \tag{10}$$

方程(8)一般不是一个梯度系统,仅在一定条件下才能成为梯度系统. 对方程(8),如果满足如下条件

$$\frac{\partial}{\partial a^\rho}(\Omega^{\mu v}\frac{\partial B}{\partial a^v}-\tilde\Lambda_\mu)-\frac{\partial}{\partial a^\mu}(\Omega^{\rho v}\frac{\partial B}{\partial a^v}-\tilde\Lambda_\rho)=0,\quad(\mu,v,\rho=1,2,\cdots,2n) \tag{11}$$

则它是一个梯度系统. 此时,可求得势函数 $V=V(\boldsymbol{a})$,使得

$$\Omega^{\mu v}\frac{\partial B}{\partial a^v}-\tilde\Lambda_\mu=-\frac{\partial V}{\partial a^\mu},\quad(\mu,v=1,2,\cdots,2n) \tag{12}$$

Birkhoff 系统是广义 Birkhoff 系统的特殊情形. 对自治 Birkhoff 系统,式(11)成为

$$\frac{\partial}{\partial a^\rho}(\Omega^{\mu v}\frac{\partial B}{\partial a^v})-\frac{\partial}{\partial a^\mu}(\Omega^{\rho v}\frac{\partial B}{\partial a^v})=0,\quad(\mu,v,\rho=1,2,\cdots,2n) \tag{13}$$

而式(12)成为

$$\Omega^{\mu v}\frac{\partial B}{\partial a^v}=-\frac{\partial V}{\partial a^\mu},\quad(\mu,v=1,2,\cdots,2n) \tag{14}$$

3 稳定性

广义 Birkhoff 系统成为梯度系统后,便可利用梯度系统的性质来研究广义 Birkhoff 系统的稳定性.

首先,根据梯度系统第三条性质,考察线性化系统特征方程的根是否全为负实根,是否有正实根. 如果根全为负的,则运动是稳定的;如果有正实根,则运动是不稳定的. 其次,与梯度系统第一条性质相关,如果势函数 V 能够成为 Lyapunov 函数,按方程求 $\dot V$,再由 $\dot V$ 的符号由 Lyapunov 定理可判断系统的稳定性,或由 Rumyantsev 定理判断部分变量稳定性.

4 算例

例 1 广义 Birkhoff 系统为

$R_1=a^2$,

$R_2=0$,

$B=a^1a^2$,

$\Lambda_1=-2a^2-(a^2)^2$,

$\Lambda_2=a^1-(a^1)^2$

试将其化为梯度系统,并研究其零解的稳定性.

解:方程(8)给出

$\dot a^1=a^2-a^1+(a^1)^2$

$\dot a^2=a^1-2a^2-(a^2)^2$

容易验证,它是一个梯度系统,其势函数为

$$V=\frac{1}{2}(a^1)^2+(a^2)^2-a^1a^2-\frac{1}{3}(a^1)^3+\frac{1}{3}(a^2)^3$$

它可作为 Lyapunov 函数,在 $a^1=a^2=0$ 的邻域内是正定的. 按方程求 $\dot V$,得

$$\dot V=6a^1a^2-2(a^1)^2-5(a^2)^2+2(a^1)^3-4(a^2)^3+2a^1(a^2)^2-2a^2(a^1)^2-(a^1)^4-(a^2)^4$$

它在 $a^1=a^2=0$ 的邻域内是负定的. 由 Lyapunov 定理知,零解 $a^1=a^2=0$ 是渐近稳定的. 同时,也可用线性化系统来判断系统零解的稳定性. 因方程的线性化系统的两个特征根都是负的,故由 Lyapunov 一次近似理论知,系统的零解是渐近稳定的.

例 2 广义 Birkhoff 系统为

$R_1=\frac{1}{2}a^2,R_2=-\frac{1}{2}a^1$,

$B=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2$,

$\Lambda_1=-a^1+a^2-(a^2)^2$,

$\Lambda_2=a^2-a^1-(a^1)^2$

试将其化为梯度系统,并研究其零解的稳定性.

解:方程(8)给出

$\dot a^1=a^1+(a^1)^2$

$\dot a^2=-a^2+(a^2)^2$

容易验证,它是一个梯度系统,其势函数为

$$V=\frac{1}{2}(a^2)^2-\frac{1}{2}(a^1)^2-\frac{1}{3}(a^1)^3-\frac{1}{3}(a^2)^3$$

按方程求 $\dot{V}$,得

$$\dot{V}=-(a^1)^2-(a^2)^2-2(a^1)^3+2(a^2)^3-(a^1)^4-(a^2)^4$$

可见,V 相对变量 a^1 是负定的,$\dot{V}$ 相对 a^1 也是负定的,由 Rumyantsev 部分变量稳定性定理知,系统零解 $a^1=a^2=0$ 相对变量 a^1 是不稳定的. 而 V 相对变量 a^2 是正定的,$\dot{V}$ 相对 a^2 是负定的,由 Rumyantsev 定理知,零解 $a^1=a^2=0$ 相对变量 a^2 是稳定的,并且是渐近稳定的.

例 3　Birkhoff 系统为

$$R_1=0,$$
$$R_2=a^1,$$
$$B=\frac{1}{2}(a^1)^2-\frac{1}{2}(a^2)^2+ta^1+2ta^2$$

试将其化为梯度系统,并研究其解的稳定性.

解:方程(3)给出

$$\dot{a}^1=a^2-2t$$
$$\dot{a}^2=a^1+t$$

它有解

$$a_0^1=2-t,\quad a_0^2=2t-1$$

作变换,令

$$a^1=a_0^1+\xi_1,\quad a^2=a_0^2+\xi_2$$

则方程可表示为

$$\dot{\xi}_1=\xi_2,\quad \dot{\xi}_2=\xi_1$$

它是一个梯度系统,其势函数为

$$V=-\xi_1\xi_2$$

方程的特征根一正一负,因此,解 $\xi_1=\xi_2=0$ 是不稳定的.

参　考　文　献

1　Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅱ. New York: Springer-Verlag, 1983

2　梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff 系统动力学. 北京:北京理工大学出版社, 1996 (Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B. Dynamics of Birkhoffian system. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996 (in Chinese))

3　Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P, Khwan A M. Analytical dynamics of Helmholtz, Birkhoff, Nambu systems. Moskow: UFN, 1997(in Russian)

4　Mei F X. The Noether's theory of Birkhoffian systems. *Science in China*, *Series A*, 1993, 36(12): 1456 ~ 1467

5　梅凤翔,张永发,何光等. 广义 Birkhoff 系统动力学的基本框架. 北京理工大学学报, 2007, 27(12): 1035 ~ 1038(Mei F X, Zhang Y F, He G, et al. Fundamental framework of generalized Birkhoff system dynamics. *Trans. of Beijing Inst. of Tech.*, 2007, 27(12): 1035 ~ 1038 (in Chinese))

6　梅凤翔,蔡建乐. 广义 Birkhoff 系统的积分不变量. 物理学报, 2008, 57(8): 4657 ~ 4659 (Mei F X, Cai J L. Integral invariants of a generalized Birkhoff system. *Acta Phys. Sin.*, 2008, 57(8): 4657 ~ 4659 (in Chinese))

7　Mei F X, Xie J F, Gang T Q. A conformal invariance for generalized Birkhoff equations. *Acta Mech. Sin.*, 2008, 24: 583 ~ 585

8　Shang M, Mei F X. Poisson theory of generalized Birkhoff equations. *Chin. Phys.*, 2009, 18(8): 3155 ~ 3157

9　李彦敏,梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统的循环积分及降阶法. 北京理工大学学报, 2010, 30(5): 505 ~ 507 (Li Y M, Mei F X. Cyclic integral and reduction of generalized Birkhoff system. *Trans. of Beijing Inst. of Tech.*, 2010, 30(5): 505 ~ 507 (in Chinese))

10　Mei F X, Wu H B. Form invariance and new conserved quantity of generalized Birkhoffian system. *Chin. Phys. B*, 2010, 19(5): 050301

11　李彦敏,梅凤翔. 一类广义 Birkhoff 系统的广义正则变换. 物理学报, 2010, 59(8): 5219 ~ 5222 (Li Y M, Mei F X. Generalized canonical transformations of a kind of generalized Birkhoff systems. *Acta Phys. Sin.*, 2010, 59 (8): 5219 ~ 5222 (in Chinese))

12　Li Y M, Mei F X. Stability for manifolds of equilibrium states of generalized Birkhoff system. *Chin. Phys. B*, 2010, 19(8): 080302

13　李彦敏,梅凤翔. 广义 Birkhoff 方程的积分方法. 物理学报, 2010, 59(9): 5930 ~ 5933 (Li Y M, Mei F X. Integral methods for the generalized Birkhoff equations. *Acta Phys. Sin.*, 2010, 59(9): 5930 ~ 5933 (in Chinese))

14　崔金超,梅凤翔. 广义 Birkhoff 方程的平衡稳定性. 动力学与控制学报,2010, 8(4): 297 ~ 299 (Cui J C, Mei F X. Stability of equilibrium for generalized Birkhoff equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(4): 297 ~ 299 (in Chinese))

15　Mei F X, Cui J C. Lie symmetries and conserved quantities for generalized Birkhoff system. *Journal of Beijing Inst. of Tech.*, 2011, 20(3): 285 ~ 288

16　Hirsch M W, Smale S, Devaney R L. Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos. Singapore: Elsevier, 2008

A GRADIENT REPRESENTATION FOR GENERALIZED BIRKHOFF SYSTEM *

Mei Fengxiang[1†] Wu Huibin[2]

(1. *School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

(2. *School of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

Abstract A gradient representation for the generalized Birkhoff system was studied. The condition under which the generalized Birkhoff system can be considered as a gradient system was given. The stability of the system was discussed by using the property of gradient system. Some examples were given to illustrate the application of the results.

Key words generalized Birkhoff system, gradient system, stability

Received 14 September 2012, revised 2 November 2012.

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (10932002, 10972031, 11272050) and the Beijing Municipal Key Disciplines Fund for General Mechanics and Foundation of Mechanics

† Corresponding author E-mail: meifx@ bit. edu. cn