

不确定性转子系统的随机有限元建模及响应分析*

白长青^{1†} 张红艳^{1,2}

(1. 西安交通大学航天航空学院, 机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049) (2. 长安大学理学院, 西安 710064)

摘要 随机特性和随机载荷会引起转子系统动力响应的不确定性, 是转子动力学分析中的重要影响因素. 本文基于 Timosheke 梁理论, 把转轴的材料和几何随机特性表示为一维随机场函数, 推导出随机转轴有限元列式, 建立转子系统随机动力学模型, 并给出随机载荷作用下随机转子系统动力响应统计量的分析方法. 分别对线性和非线性涡轮泵转子系统进行了随机动力响应分析, 并同 Monte Carlo 仿真结果进行对比, 结果表明所建立的随机有限元动力学模型和给出的随机响应分析方法是合理可行的, 可以有效应用于实际转子系统随机动力学分析和设计中.

关键词 随机有限元, 转子系统, 随机响应, 随机参数, 不确定性

引言

在旋转机械中, 许多因素, 如非均匀材料参数、制造和测试误差、外载荷的波动等, 导致系统参数和载荷不同层面的不确定性. 转子动力学问题中通常涉及两类随机性: 不确定参数和随机载荷. 在转子动力学分析和设计中应该考虑材料、几何参数和外载荷的不确定性.

旋转机械转子系统经常承受流体湍流、不均匀燃烧等引起的随机激励. 一些学者关注了随机载荷作用下转子系统的动力特性研究. Hashish 和 Sankar^[1]给出了一种柔性转子系统随机响应的简单计算方法. Namachchivaya^[2]研究了谐波载荷和平稳随机过程共同作用下转轴的均方稳定性. 文献[3-5]中分析了随机地震激励下转子系统的随机振动. Yong 等^[6]应用有限元法研究了随机轴向载荷作用下转子系统的横向振动. 上述研究中都没有考虑转子的材料和几何参数随机性.

转子系统中参数随机性问题已经出现在许多实际工程中, 尤其是高精尖旋转机械中. 对系统动力响应和动力特性有明显影响. Vinogradov^[7]提出一种方法用于研究部件的随机公差引起的振动和支承力的概率分布. Leng 等^[8]用 Monte Carlo 方法研究了裂纹转子的分岔和混沌现象. Dimentberg 和 Naess^[9]考虑内阻尼随机性分析了简单 Jeffcott 转子

的非线性振动. Driot 等^[10]研究几何参数不确定性影响下不对称 Jeffcott 转子的概率稳定性和平稳响应. 但是这些研究都是针对简单的 Jeffcott 转子用解析方法或 Monte Carlo 仿真进行分析, 很难应用于实际工程中复杂的转子系统.

随机有限元法在过去二十年中吸引了许多学者的研究兴趣, 已经扩展到许多研究领域, 如透平叶片随机振动和可靠性研究^[11,12], 随机结构响应分析^[13,14], 随机结构特征值问题研究^[15,16]以及其它领域的应用^[17-20]. 但是对于转子系统的随机动力学问题, 除了 Sankar 等^[21]的工作外, 受到的关注并不多. Sankar 等^[21]考虑转子系统材料特性的随机性, 基于 Rayleigh 梁理论提出了转轴随机有限元方法, 分析了转子系统涡动速度和模态统计量.

本文考虑材料和几何的随机特性, 提出了转轴的 Timoshenko 梁随机有限元法, 发展了随机响应分析方法, 使之推广到包括随机特性和随机载荷的转子系统响应分析中. 应用线性和非线性涡轮泵转子系统这两个算例, 通过和 Monte Carlo 仿真结果的比较, 验证了所提出的随机模型和分析方法.

1 转轴随机特性

考虑转轴绕中心线以角速度 ω 旋转, 用固定坐标系 xyz 来描述其运动. 坐标轴的原点位于转轴的左端, x 轴和转轴中心线重合, yz 平面是转轴横截面.

2012-04-16 收到第 1 稿, 2012-06-09 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(10902080, 11002106); 高等学校博士学科点专项科研基金(20090201120040)

† 通讯作者 E-mail: baichq@mail.xjtu.edu.cn

转轴的材料特性,即弹性模量 E 、剪切模量 G 和质量密度 ρ ,是沿长度方向关于其均值随机波动,可以表达为

$$E(x) = \bar{E}(1 + \varepsilon_1(x)) \quad (1)$$

$$G(x) = \bar{G}(1 + \varepsilon_2(x)) \quad (2)$$

$$\rho(x) = \bar{\rho}(1 + \varepsilon_3(x)) \quad (3)$$

其中 \bar{E} 、 \bar{G} 和 $\bar{\rho}$ 分别是 E 、 G 和 ρ 的均值. 当转轴离散为 N 个有限转轴单元,如果每个单元的横截面是圆形且不变,横截面面积 A 、惯性矩 I 、单位长度的横向和轴向转动惯量 J_d 和 J_p 可以表示为沿转轴长度的随机变量

$$A(x) = \bar{A}(1 + \varepsilon_4(x)) \quad (4)$$

$$I(x) = \bar{I}(1 + \varepsilon_5(x)) \quad (5)$$

$$J_p(x) = 2J_d(x) = J_p^e(1 + \varepsilon_6(x)) \quad (6)$$

其中 \bar{A} 、 \bar{I} 和 J_p^e 是 A 、 I 和 J_p 在第 e 个单元长度上的均值. 其中上标 e 表示单元数, $e = 1, 2, \dots, N$. $\varepsilon_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ 是均值为零、方差为 σ_k^2 的一维均匀随机场.

2 Timoshenko 转轴随机有限元

根据 Timoshenko 梁理论,长度为 l 的随机有限转轴单元的动能 T 和势能 P 分别为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \rho(x) A(x) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] + J_d(x) \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right] + \omega J_p(x) \left(\beta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \right\} dx \quad (7)$$

$$P = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ E(x) I(x) \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] + \kappa G(x) A(x) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \beta \right)^2 \right] \right\} dx \quad (8)$$

上式中 u 和 v 分别是横截面中线沿 y 和 z 方向的平动位移; α 和 β 分别是 xy 和 xz 平面内的随机角位移; t 是时间; κ 是截面剪切校正因子.

在每个转轴段应用八自由度两节点单元,单元 e 在节点 i 和 j 上的节点位移矢量为

$$\{q^e(t)\} = \{u_i \ v_i \ \alpha_i \ \beta_i \ u_j \ v_j \ \alpha_j \ \beta_j\}^T \quad (9)$$

每个单元长度内任意位置的随机平动位移和角位移, $\{w\} = \{u \ v\}^T$ 和 $\{\theta\} = \{\alpha \ \beta\}^T$, 可以用节点位移的形函数近似表达为

$$\{w(x, t)\} = [\psi(x)] \{q^e(t)\} \quad (10)$$

$$\{\theta(x, t)\} = [\phi(x)] \{q^e(t)\} \quad (11)$$

其中 ψ 和 ϕ 分别是转轴单元的平动和角位移的形函数. 关于弯曲和剪切变形的形函数中的转轴材料几何特性不依赖于 x , 取对应物理量的均值, 即 E 、 G 、 A^e 和 I^e . 因此, ψ 和 ϕ 可以采用 Timoshenko 旋转梁单元^[1]中采用的 Hermite 多项式形函数.

依照标准推导过程,用拉格朗日方程推导出如下随机有限转轴单元的动力学方程

$$[M^e] \{\ddot{q}^e\} - \omega [G^e] \{\dot{q}^e\} + [K^e] \{q^e\} = \{F_d^e\} + \{F_s^e\} \quad (12)$$

式中 $\{F_d^e\}$ 和 $\{F_s^e\}$ 分别表示作用在单元节点上的确定性和随机性载荷; $[M^e]$ 、 $[G^e]$ 和 $[K^e]$ 分别是单元的随机质量、陀螺和刚度矩阵,其系数计算公式如下

$$m_{ij} = \int_0^l \rho(x) A(x) \psi_i \psi_j dx + \int_0^l J_d(x) \phi_i \phi_j dx = \int_0^l \bar{\rho} \bar{A} (1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_3 \varepsilon_4) \psi_i \psi_j dx + \frac{1}{2} \int_0^l J_p (1 + \varepsilon_6(x)) \phi_i \phi_j dx \quad (13)$$

$$g_{ij} = \int_0^l J_p(x) (\phi_{2i} \phi_{1j} - \phi_{1i} \phi_{2j}) dx = \int_0^l J_p (1 + \varepsilon_6) (\phi_{2i} \phi_{1j} - \phi_{1i} \phi_{2j}) dx \quad (14)$$

$$k_{ij} = \int_0^l E(x) I(x) \psi_i'' \psi_j'' dx + \int_0^l \kappa G(x) A(x) (\psi_i' - \phi_i) (\psi_j' - \phi_j) dx = \int_0^l \bar{E} \bar{I} (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_5 + \varepsilon_1 \varepsilon_5) \psi_i'' \psi_j'' dx + \int_0^l \kappa \bar{G} \bar{A} (1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_2 \varepsilon_4) (\psi_i' - \phi_i) (\psi_j' - \phi_j) dx \quad (15)$$

其中 m_{ij} 、 g_{ij} 和 k_{ij} 分别是 $[M^e]$ 、 $[G^e]$ 和 $[K^e]$ 的系数. 撇号指示关于空间坐标的求导,关于时间的求导用符号上面的圆点表示. 注意关于质量密度和横截面面积的随机场 ε_3 和 ε_4 本质上是互不相关的. 可以把 $\varepsilon_3 \varepsilon_4$ 定义为一个新的随机场 ε_7 , 其统计特性为均值 $E(\varepsilon_7) = E(\varepsilon_3 \varepsilon_4) = 0$ 和方差 $\sigma_7^2 = \text{Var}(\varepsilon_7) = \text{Var}(\varepsilon_3 \varepsilon_4) = \sigma_3^2 \sigma_4^2$, 其中 $E(\cdot)$ 和 $\text{Var}(\cdot)$ 表示均值和方差算子. 同样可以定义 $\varepsilon_8 = \varepsilon_1 \varepsilon_5$ 和 $\varepsilon_9 = \varepsilon_2 \varepsilon_4$ 是两个均值为零、方差为 $\sigma_8^2 = \sigma_1^2 \sigma_5^2$ 和 $\sigma_9^2 = \sigma_2^2 \sigma_4^2$ 的随机场.

3 转子系统随机有限元方程

组合每个转轴单元并考虑阻尼力,可以推导出整体随机转子系统的动力有限元方程

$$\begin{aligned} [M]\{\dot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} - \omega[G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \\ \{F_d\} + \{F_s\} \end{aligned} \quad (16)$$

其中节点上刚性盘传递来的载荷和轴承刚度可以直接引入相应的矩阵。\$[M]\$、\$[D]\$、\$[G]\$和\$[K]\$分别是整体转子系统的随机质量、阻尼、陀螺和刚度矩阵。\$\{F_d\}\$和\$\{F_s\}\$分别表示作用在整体转子系统上的确定性和随机载荷。其它载荷,如不平衡力、密封和叶轮引起的非线性流体激振力等,包含在\$\{F_d\}\$中。

4 随机矩阵和载荷的扩展形式

式(16)中转子系统的随机矩阵可以分别写为如下形式

$$[M] = [M^0] + \sum_{i=1}^9 \frac{\partial [M]}{\partial \varepsilon_i} \varepsilon_i = [M^0] + \sum_{i=1}^9 [M^i] \varepsilon_i \quad (17)$$

$$[G] = [G^0] + \sum_{i=1}^9 \frac{\partial [G]}{\partial \varepsilon_i} \varepsilon_i = [G^0] + \sum_{i=1}^9 [G^i] \varepsilon_i \quad (18)$$

$$[K] = [K^0] + \sum_{i=1}^9 \frac{\partial [K]}{\partial \varepsilon_i} \varepsilon_i = [K^0] + \sum_{i=1}^9 [K^i] \varepsilon_i \quad (19)$$

其中上标0表示随机变量的均值对应的确定性项。如果阻尼矩阵的变动可以用均值为零方差为\$\sigma_{10}^2\$的随机场\$\varepsilon_{10}(x)\$表征,随机阻尼矩阵可以分解为均值部分和波动部分

$$[D] = [D^0] + [D^0] \varepsilon_{10} \quad (20)$$

注意由于随机载荷矢量\$\{F_s\}\$的存在,微分方程(16)是和随机激励时间相关的。由于随机载荷作用在转子支承位置,比较转子支承间的跨度可以忽略随机载荷的空间相关性。假设随机载荷沿不同方向相关性可以用权重系数反映,\$\{F_s\}\$可以认为围绕其概率平均振幅\$f_0\$波动,可以重新表示为

$$\{F_s(t)\} = (f_0 + f(t))\{I\} \quad (21)$$

式中\$\{I\}\$是随机载荷作用位置指示矢量,并且包含有不同方向的权重系数。\$f(t)\$是载荷作用的随机过程,可以离散为^[17]

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^n f_m \delta(t - t_m) \Delta t \quad (22)$$

其中\$f_m\$是零均值的离散随机变量;\$\Delta t\$是时间增量;\$\delta(t - t_m)\$是脉冲函数,满足

$$\int_{t_m - \Delta t/2}^{t_m + \Delta t/2} \delta(t - t_m) dt = 1 \quad (23)$$

然后,\$\{F_s\}\$可以从均值\$f_0\$扩展为

$$\{F_s\} = f_0\{I\} + f_m \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^n \delta(t - t_m) \Delta t \{I\} \quad (24)$$

5 随机响应分析的摄动方程

在火箭发动机涡轮泵、喷气发动机等实际的高精尖旋转机械中,随机转子参数的波动量相对是个小量,其变异系数也是个少量。因此,在这类随机转子系统的随机响应分析中应用摄动技术是合理有效的。

节点位移矢量\$\{q\}\$的二阶摄动方程可以表达为

$$\begin{aligned} \{q\} = \{q^0\} + \frac{\partial \{q\}}{\partial f_m} f_m + \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial \{q\}}{\partial \varepsilon_i} \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial^2 \{q\}}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \varepsilon_i \varepsilon_j \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \{q\}}{\partial f_m^2} f_m^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \frac{\partial^2 \{q\}}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \varepsilon_i \varepsilon_j \end{aligned} \quad (25)$$

因为关于转子材料几何特性和载荷是互不相关的,关于\$\varepsilon f_m\$的响应成分在后面随机响应分析中并不需要,所以关于\$\varepsilon f_m\$的项可以从上面展开式中移走。当参数激励在系统方程中不存在时,因为关于\$f_m^2\$的响应成分为0,关于\$f_m^2\$的项也是不必要的。由此,式(25)可以简化为

$$\begin{aligned} \{q\} = \{q^0\} + \frac{\partial \{q\}}{\partial f_m} f_m + \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial \{q\}}{\partial \varepsilon_i} \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \frac{\partial^2 \{q\}}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \varepsilon_i \varepsilon_j \\ = \{q^0\} + \{q_j^1\} f_m + \sum_{i=1}^{10} \{q_i^1\} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \{q_{ij}^2\} \varepsilon_i \varepsilon_j \end{aligned} \quad (26)$$

把式(17-20)和式(24、25)代入式(16),可以获得转子系统随机响应问题的零阶、一阶和二阶方程,分别如下:

零阶方程

$$\begin{aligned} [M^0]\{\dot{q}^0\} + [D^0]\{\dot{q}^0\} - \omega[G^0]\{\dot{q}^0\} + \\ [K^0]\{q^0\} = \{F_d\} + f_0\{I\} \end{aligned} \quad (27)$$

一阶方程

$$\begin{aligned} [M^0]\{\dot{q}_f^0\} + [D^0]\{\dot{q}_f^0\} - \omega[G^0]\{\dot{q}_f^0\} + \\ [K^0]\{q_f^0\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^n \delta(t - t_m) \Delta t \{I\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} [M^0]\{\dot{q}_i^1\} + [D^0]\{\dot{q}_i^1\} - \omega[G^0]\{\dot{q}_i^1\} + \\ [K^0]\{q_i^1\} = -\{F_i^1\} \end{aligned} \quad (29)$$

二阶方程

$$\begin{aligned} [M^0]\{\dot{q}_{ij}^2\} + [D^0]\{\dot{q}_{ij}^2\} - \omega[G^0]\{\dot{q}_{ij}^2\} + \\ [K^0]\{q_{ij}^2\} = -\{F_{ij}^2\} \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} \{F_i^1\} = [M^i]\{\dot{q}^0\} + [D^0]\{\dot{q}^0\} - \\ \omega[G^i]\{\dot{q}^0\} + [K^i]\{q^0\} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\{F_{ij}^2\} = [M^i]\{\dot{q}_j^1\} + [D^0]\{\dot{q}_j^1\} -$$

$$\omega [G^i] \{ \dot{q}_j^1 \} + [K^i] \{ q_j^1 \} \quad (32)$$

应用逐步时间积分算法可以从式(27)求得 $\{q^0\}$ 的解. 当式(27)中的确定性载荷矢量 $\{F_d\}$ 中包含非线性流体激振力、轴承支反力等非线性载荷时, 通过数值积分中增加 Newton - Raphson 迭代来确定 $\{q^0\}$. 方便的是在一阶和二阶方程(28 - 30)中没有非线性项, 是线性微分方程. 因此, 由于非线性载荷增加的计算耗费并不大. 意味着非线性转子系统的随机响应分析也是切实可行的. 根据 $\{q^0\}$, 确定出 $\{F_i^1\}$, 然后式(29)就可以求解, 式(30)的解也就可以顺次获得.

6 位移响应统计量

一旦求得转子系统响应关于随机变量和激励的零阶、一阶和二阶摄动量, 就可以计算转子系统动力响应的统计量. 位移响应的均值和方差矢量可以用下列方程计算:

$$E(\{q\}) = \{q^0\} + \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \{q_{ij}^2\} \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \quad (33)$$

$$\text{Var}(\{q\}) = \text{diag}(\{q_f^1\} \{q_f^1\}^T) R(f_m) + \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \text{diag}(\{q_f^1\} \{q_f^1\}^T) \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \quad (34)$$

其中 $E(\cdot)$ 、 $\text{Cov}(\cdot)$ 、 $\text{Var}(\cdot)$ 和 $R(\cdot)$ 分别是期望、协方差、方差和自相关算子; 符号 $\text{diag}(\cdot)$ 表示矩阵的对角量.

在两个不同节点 k 和 l 上位移响应协方差为

$$\text{Cov}(q_k, q_l) = q_{rk}^1 q_{rl}^1 R(f_m) + \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} q_{ik}^1 q_{il}^1 \text{Cov}(\varepsilon_{ik}, \varepsilon_{il}) \quad (35)$$

如果随机变量 ε_i 假设彼此不相关, 上面协方差公式可以写为

$$\text{Cov}(q_k, q_l) = q_{rk}^1 q_{rl}^1 R(f_m) + \sum_{i=1}^{10} q_{ik}^1 q_{il}^1 R_i(\Delta x) \quad (36)$$

其中 $R_i(\Delta x)$ 是随机变量 ε_i 的自相关函数, Δx 是节点 k 和 l 间的距离. 当随机变量 ε_i 的功率谱密度已知时, 自相关函数 $R_i(\Delta x)$ 可以容易地求得.

7 数值算例

如图1所示为涡轮泵转子系统, 文献[22]中已经研究了该系统在确定条件下的动力特性. 本文以此转子系统为例验证所提出的随机有限元模型和随机响应分析方法. 涡轮泵转子系统转轴两端安装有泵和涡轮. 考虑式(1 - 6)中所示的随机特性, 应用本文提出的随机有限元方法建立转子系统10个有限单元和11个节点动力学模型. 泵和叶轮作

用简化为位于节点4和10的两个盘, 支承作用位于节点5和8. 假设转子系统承受从支承传递来的平稳白噪声激励. Monte Carlo 仿真因为需要取足够样本数进行大量的重复计算, 所以计算耗费巨大, 尤其是非线性转子系统有限元模型分析. 因此 Monte Carlo 仿真通常用于验证其它方法获得统计量的正确性. 本文中, 我们将用 Monte Carlo 仿真对比验证所提出模型和分析方法.

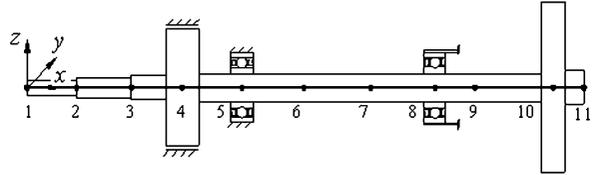


图1 涡轮泵转子系统随机有限元模型, 1 ~ 11: 节点数

Fig. 1 Stochastic finite element model of turbopump rotor system. 1 ~ 11: node number

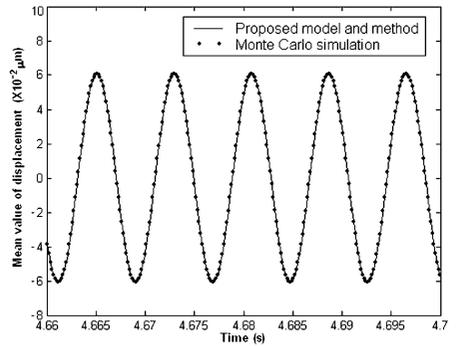


图2 线性转子系统位移响应均值, $\omega = 800\text{Hz}$

Fig. 2 Mean values of displacement responses of linear rotor system at $\omega = 800\text{Hz}$

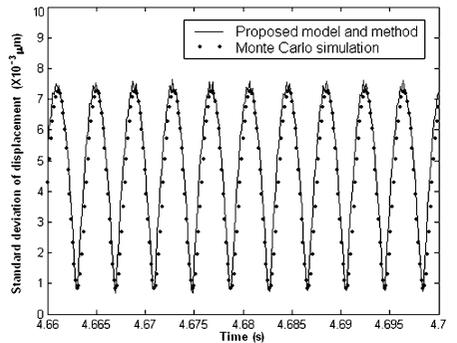


图3 线性转子系统位移响应标准差, $\omega = 800\text{Hz}$

Fig. 3 Standard deviation of displacement responses of linear rotor system at $\omega = 800\text{Hz}$

在随机载荷和泵质量偏心引起的不平衡力作用下, 计算获得涡轮泵转子系统位移响应的均值和标准差. 各时刻下泵端支承处的响应统计量如图2和图3所示, 图中比较了本文方法获得结果和 Monte Carlo 仿真结果. 从中可以看出本文方法获得计算结

果和 Monte Carlo 仿真计算结果是非常接近的。

当考虑泵出口处流体密封的非线性动力影响,由于密封引起的非线性流体激振力,该转子系统变为一个非线性系统.非线性流体激振力可以用 Muszynska 密封力模型等效为作用在节点 4 上的集中载荷.转子系统非线性位移响应的均值和标准差分别绘于图 4 和图 5 中.同图 2 中周期波动的均值相比较,图 4 中位移均值由于非线性因素的影响,其位移均值是随时间非周期变化的.相似的现象也可以在图 5 标准差变化中发现.但是,根据本文提出模型和方法求得的结果和 Monte Carlo 仿真结果是非常一致的,表明所提出模型和分析方法是实用有效的。

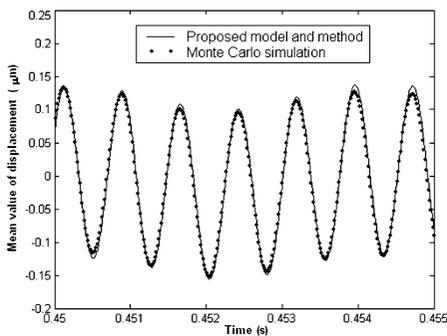


图 4 非线性转子系统位移响应均值, $\omega = 8200\text{Hz}$

Fig. 4 Mean values of displacement responses of nonlinear

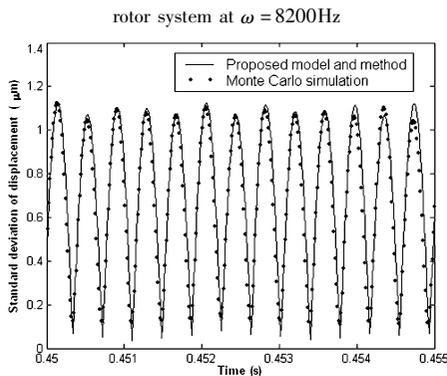


图 5 非线性转子系统位移响应标准差, $\omega = 8200\text{Hz}$

Fig. 5 Standard deviation of displacement responses of nonlinear

rotor system at $\omega = 8200\text{Hz}$

8 结论

考虑转子系统在加工和测量中的不确定性,把弹性模量、剪切模量、质量密度、横截面面积、惯性矩、转动惯量和阻尼系数表示为一维随机场函数,根据 Timoshenko 梁理论提出转轴的随机有限单元,列出转子系统随机有限元方程.所提出的随机有限元模型不仅可以包含随机外载荷,而且包含不

平衡力、非线性流体激振力等载荷。

把随机载荷处理为随机时间序列,根据二阶摄动方法给出转子系统的随机响应分析方法,以获得转子系统在随机特性和随机载荷下的均值和方差响应.因为随机响应解源于确定性系统响应的摄动,所提出的方法可以方便、有效地应用于实际工程中复杂转子系统的随机动力响应分析.应用两个算例,线性和非线性涡轮泵转子系统,通过和 Monte Carlo 仿真结果的对比,验证了所提出的随机模型和响应分析方法。

参 考 文 献

- 1 Hashish E, Sankar T S. Finite element and modal analyses of rotor-bearing systems under stochastic loading conditions. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 1984,106: 80 ~ 89
- 2 Namachchivaya N S. Mean-square stability of a rotating shaft under combined harmonic and stochastic excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 1989,133:323 ~ 336
- 3 Samali B, Kim K, Yang J N. Random vibration of rotating machines under earthquake excitations. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 1986,112:550 ~ 565
- 4 Zhao Y, Lin J H, Cao J H. Seismic analysis of rotor system under stationary nonstationary random earthquake excitations. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2002, 19: 7 ~ 11
- 5 Zhu C S, Chen Y J, Zhu W Q. Response analysis on linear imbalanced rotor-bearing system under nonstationary random seismic excitation. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006,23:285 ~ 289
- 6 Yong T H, Shiao T N, Kuo Z H. Dynamic stability of rotor-bearing systems subjected to random axial forces. *Journal of Sound and Vibration*, 2007,305:467 ~ 480
- 7 Vinogradov. From random tolerances to random rotor vibrations. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2002,124:539 ~ 542
- 8 Leng X L, Meng G, Zhang T, Fang T. Bifurcation and chaos response of a cracked rotor with random disturbance. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 299: 621 ~ 632
- 9 Dimentberg M F, Naess A. Nonlinear vibrations of a rotating shaft with broadband random variations of internal damping. *Nonlinear Dynamics*, 2008,51:199 ~ 205
- 10 Driot N, Berlioz A, Lamarque C H. Stability and station-

- ary response of a skew Jeffcott rotor with geometric uncertainty. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2009, 4: 1 ~ 10
- 11 Singh M. Turbine blade dynamics-a probabilistic approach. The 10th Biennial Conference on Mechanical Vibration and noise, Ohio, 1985, 41 ~ 48
- 12 Hosseini S A A, Khadem S E. Vibration and reliability of a rotating beam with random properties under random excitation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, 49: 1377 ~ 1388
- 13 Elishakoff I, Ren Y J, Shinozuka M. New formulation of FEM for deterministic and stochastic beams through generalization of Fuchs' approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, 144: 235 ~ 243
- 14 Papadopoulos V, Papadrakakis M, Dodatis G. Analysis of mean and mean square response of general linear stochastic finite element systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195: 5454 ~ 5471
- 15 Ramu S A, Ganesan R. A Galerkin finite element technique for stochastic field problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, 105: 315 ~ 331
- 16 Ishida R. Stochastic finite element analysis of beam with stochastic uncertainties. *AIAA Journal*, 2001, 39: 2192 ~ 2197
- 17 Zhang Q L, Peil U. Random finite element analysis for stochastic responses of structures. *Computers and Structures*, 1996, 62: 611 ~ 616
- 18 Gupta S, Manohar C S. Dynamic stiffness method for circular stochastic Timoshenko beams: response variability and reliability analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 253: 1051 ~ 1085
- 19 Nouy A, Clement A. Extended stochastic finite element method for the numerical simulation of heterogeneous materials with random material interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 83: 1312 ~ 1344
- 20 Kaminski M. Potential problems with random parameters by the generalized perturbation-based stochastic finite element method. *Computers and Structures*, 2010, 88: 437 ~ 335
- 21 Sankar T S, Ramu S A, Ganesan R. Stochastic finite element analysis for high speed rotors. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1993, 115: 59 ~ 64
- 22 Bai C Q, Xu Q Y, Wang J Y. Effects of flexible support stiffness on the nonlinear dynamic characteristics and stability of a turbopump rotor system. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 64: 237 ~ 252

STOCHASTIC FINITE ELEMENT MODELING AND RESPONSE ANALYSIS OF UNCERTAIN ROTOR SYSTEMS*

Bai Changqing^{1†} Zhang Hongyan^{1,2}

(1. School of Aerospace/State Key Laboratory of Mechanical Structure Strength and Vibration, Xi'an 710049, China)

(2. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract Based on the Timoshenko beam theory, the stochastic finite element of a rotating shaft was proposed for the rotor system modelling in which material and geometric random properties were described as one dimensional stochastic field functions. The random response analysis method was developed in order to determine the statistics of dynamic responses of stochastic rotor systems under random loads. A linear and a nonlinear turbopump rotor systems were employed to compare the results obtained by the proposed mode, method and Monte Carlo simulation. And the numerical results, which coincide well with Monte Carlo simulation data, demonstrate that the proposed stochastic model and method are feasible and efficient in actual rotor system analysis and design.

Key words stochastic finite element, rotor system, random response, random parameter, uncertainty