

Duffing 系统中 Lévy 噪声诱导的随机共振与相转移*

李娟娟 许勇[†] 冯晶

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

摘要 研究了 Lévy 噪声激励下 Duffing 系统的随机共振与相转移问题. 分析了噪声强度、阻尼系数及稳定性指标对系统随机共振的影响, 结果表明减小阻尼系数有利于观测系统的随机共振现象, 而稳定性指标的减小削弱了随机共振的发生. 模拟了系统的稳态概率密度函数, 通过调节噪声参数来观察稳态概率密度函数的变化, 进而讨论了系统的相转移现象, 发现 Lévy 噪声的噪声强度、稳定性指标及偏斜参数均能诱导系统发生相转移, 而高斯噪声激励下, 噪声强度不能诱导系统发生相转移, 从而反映了高斯噪声与 Lévy 噪声对系统的不同作用机理.

关键词 Lévy 噪声, Duffing 系统, 随机共振, 相转移

引言

在实际工程中, 外界的随机扰动是无处不在的, 系统不可避免的要受到外界噪声的干扰, 因此考察噪声对动力系统的影响已成为动力学发展的主要方向. 目前, 随机因素和非线性共同作用下诱导的物理现象已成为物理界研究的主要课题, 例如: 噪声诱导相转移与跃迁、随机共振、随机分岔等^[1].

近年来, 噪声诱导的随机共振以及逃逸问题的研究已经成为人们关注的焦点. 随机共振 (SR) 是一种涉及到多个自然科学领域的新理论和新方法, 它是研究系统的输出与噪声、系统参数及外界信号之间非单调性的一种非线性现象, 而相转移经常被作为刻画逃逸问题的重要指标, 从而引起了各领域学者的广泛关注. 2010 年, Kenfack 和 Singh^[2] 通过数值模拟信噪比的方法证明了在高斯白噪声激励下, 二阶耦合系统中伴随着随机共振的发生. 2005 年, Ghosh 和 Barik^[3] 等对白噪声激励下双稳系统的相转移进行了研究, 发现调节外界噪声可以使系统的稳态概率密度从单峰变为双峰, 从而观察到了相转移现象. 2007 年, 徐和曾^[4] 等人对一阶系统中 Lévy 噪声诱导的随机共振进行了相关的研究, 并通过模拟误差概率来度量随机共振. 2009 年, Dybiec^[5] 证实了在 Lévy 噪声的激励下, 单势井中仍然可以发生随机共振, 同时对 Lévy 噪声激励下一阶

系统的相转移与分岔进行了讨论. 2011 年, 许^[6] 等利用随机平均法研究了高斯色噪声激励下 Duffing - van der pol 振子的随机分岔, 发现系统参数、噪声强度和关联时间的变化都能够诱导系统出现随机分岔现象.

在以上的研究中, 大多数学者都假定外界噪声是高斯的情形, 然而在非高斯随机激励下动力系统所表现出来的特征是不同的. Lévy 噪声作为一类重要的非高斯噪声, 具有长拖尾、不连续跳以及无穷可分性, 能够更为准确地反映客观实际存在的随机扰动. 近年来, 不仅在物理学, 生物学, 地球科学等自然学科, 而且在经济学, 社会学等领域里都已经观察到了 Lévy 噪声的存在. 尽管如此, 近年来对于 Lévy 噪声诱导的随机共振与相转移研究较多的还是针对于一阶非线性系统, 对于 Duffing 系统及高维系统的研究依然很少.

本文主要研究 Lévy 噪声激励下 Duffing 系统的随机共振与相转移问题. 首先, 通过模拟信噪比关于噪声强度的函数来观察随机共振现象, 分析各个参数对随机共振的影响. 此外, 进一步探讨噪声强度、稳定性指标及偏斜参数对系统稳态概率密度函数的影响, 进而说明系统的相转移行为.

1 Duffing 系统和 Lévy 噪声

考虑如下形式的 Duffing 系统, 它满足如下方程

2012-04-12 收到第 1 稿, 2012-06-22 收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (10972181, 11102157)、新世纪优秀人才支持计划、陕西省青年科技新星及西北工业大学基础研究基金资助项目

[†] 通讯作者 E-mail: hsux3@nwpu.edu.cn

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{dV(x)}{dx} = F(t) + \eta(t) \quad (1)$$

其中 γ 为阻尼系数, $F(t) = A \cos(\omega t)$ 是外部周期信号, A 和 ω 分别代表信号的振幅和频率, $\eta(t)$ 代表稳定性指标为 α 的 Lévy 白噪声, 它是 Lévy 过程 $\zeta(t)$ 的时间导数. 势函数 $V(x)$ 定义为:

$$V(x) = -ax^2/2 + bx^4/4 \quad (a > 0, b > 0) \quad (2)$$

显而易见, $V(x)$ 有两个稳定点 $x_{s1,2} = \pm\sqrt{a/b}$ 和一个不稳定点 $x_{un} = 0$, 势垒的高度 $\Delta V(x) = a^2/4b$. 系统在未受到信号干扰时, 势函数是对称的双势阱, 而当在系统中载入周期信号后, 信号便会调制势阱的变化, 使得势垒的高度不断上升或者下降, 从而为粒子在两个势阱之间的跃迁提供了可能.

随机变量 $\zeta(t)$ 的样本数据服从 Lévy 分布 $L_{\alpha,\beta}(\zeta; \sigma, \mu)$, 其可用如下形式的特征函数 $\Phi(k)$ 来表示, 即 $\Phi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i k \zeta} L_{\alpha,\beta}(\zeta; \sigma, \mu)$, 故当 $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2]$ 时

$$\Phi(k) = \exp[i\mu k - \sigma^\alpha |k|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(k) \tan \frac{\pi\alpha}{2})] \quad (3)$$

当 $\alpha = 1$ 时

$$\Phi(k) = \exp[i\mu k - \sigma |k| (1 + i\beta \operatorname{sgn}(k) \frac{2}{\pi} \ln |k|)] \quad (4)$$

其中参数 $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\sigma \in [0, +\infty)$, $\mu \in \mathbb{R}$. 稳定性指标 α 决定了分布曲线尾部的平坦程度, 当 $\alpha = 2$ 时, Lévy 分布退化为高斯分布. 偏斜参数 β 描绘了分布曲线的对称性, $\beta = 0$ 说明分布是对称的, $\beta > 0$ 与 $\beta < 0$ 表示分布右偏或左偏. 尺度参数 σ 表明了 Lévy 分布的范围和离散度, 位置参数 μ 表明了分布的中心. 噪声强度定义为 $D = \sigma^\alpha$.

2 Lévy 噪声激励下的随机共振现象

采用信噪比 (SNR) 这一量化指标来研究系统的随机共振现象. 将输出信号的功率谱与噪声功率谱的比值作为衡量信噪比的指标, 并且模拟信噪比关于噪声强度变化的函数. 随着噪声强度的变化, 如果信噪比会在某噪声强度处出现局部极大值, 就认为系统在该噪声强度处发生了随机共振, 并且该峰值越大就说明更容易观测到系统的随机共振现象. 在此取参数 $a = 1, b = 1, \mu = 0, t = 0.001$.

2.1 数值方法

为了模拟系统(1)中粒子的运动轨迹及系统的输出信噪比, 我们用四阶龙格库塔法对系统求解, 并用 Janicki - Weron 算法^[7]生成 Lévy 随机数. 对系统(1)作如下变换:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \frac{dV(x)}{dx} + F_1(t) + \eta(t) \end{cases} \quad (5)$$

并对其离散化^[4,5,7]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \Delta t, \\ y_{n+1} = y_n + [-\gamma y_n + ax_n - bx_n^3 + F_1(n\Delta t)] \cdot \Delta t + \Delta t^{1/\alpha} \zeta \end{cases} \quad (6)$$

这里 ζ 是噪声强度为 D 、稳定性指标为 α 的 Lévy 随机数. 图 1 模拟出了不同噪声强度下的输入与输出信号, 黑色虚线表示输入信号, 即 $D = 0.0$, 红色实线表示输出信号, 可以看出噪声强度较小时, 粒子只在一个势阱中运动, 随着噪声强度的增大, 粒子开始在两个势阱之间进行跳跃, 而且跳跃的频率随着噪声强度的增大而加强, 这说明噪声强度有助于粒子在两势阱间的跃迁. 其中参数 $A = 0.15, \alpha = 1.75, \beta = 0, \gamma = 0.02, w = \sqrt{2}/20$.

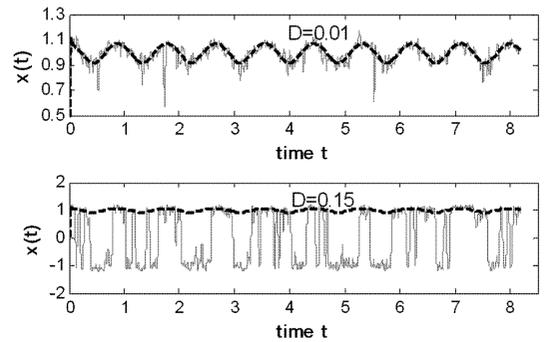


图 1 不同噪声强度下的输入与输出信号

Fig. 1 Input/output signal with different noise intensity

随着稳定性指标的减小, 考虑到 Lévy 噪声的不连续跳会导致粒子的样本路径变化很快以至无穷, 文献[8]在数值模拟的过程中对 $x(t)$ 进行了人为的截断. 这里由于方程(1)的解大都在正负 1 附近, 据此设定临界值 10^{13} , 如果(1)式的解小于 10^{13} , 就认为该样本有效, 否则视为无效样本, 最终通过对有效样本取平均来获取系统的信噪比. 本文采用的信噪比定义如下^[9]:

$$SNR = 10 \log \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}} \quad (7)$$

由于信号对系统始终起主导作用,而噪声仅仅起调制作用,因此信号的功率谱定义为 $P_{signal} = |Y(k_0)|^2$,其中 $Y(k)$ 是输出信号序列 $\{x(n), n = 0, 1, \dots, N - 1\}$ 的快速傅里叶变换,即

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi jkn/N} \quad (8)$$

N 是 Lévy 噪声序列的长度,取 $N = 2^{13}$. 由于 Lévy 白噪声的功率谱变化比较平缓,且对于给定的信号, $|Y(k)|^2$ 的最大值所对应的频率不会随着噪声强度的变化而变化,故 k_0 定义为较小噪声强度下 $|Y(k)|^2 (k = 0, \dots, N - 1)$ 取得最大值时所对应的 k ,且随着噪声强度的增大, k_0 将保持不变. 噪声的功率谱可以通过在 $|Y(k_0)|^2$ 周围取平均得到,定义为^[9]

$$P_{noise} = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^M (|Y(k_0 + i)|^2 + |Y(k_0 - i)|^2) \quad (9)$$

其中 M 是一个整数,我们取 $M = 5$.

为了验证上述数值方法的有效性,在此取 $\alpha = 2, \beta = 0$ (即高斯噪声的情形),系统参数 $A = 0.15, w = \sqrt{2}/20$,分别模拟出三个不同阻尼系数下的信噪比函数,如图 2,结果与文献[2]中的结果有相同的趋势.

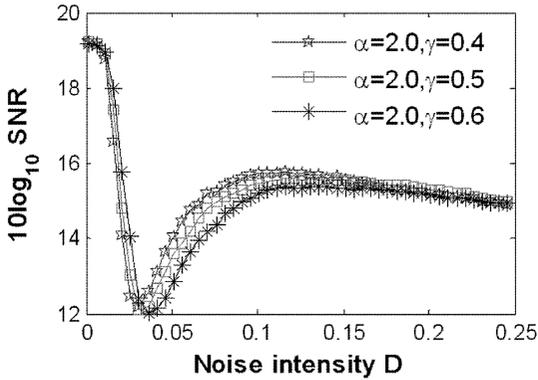


图2 高斯白噪声激励下的信噪比函数

Fig. 2 The SNR functions with Gaussian noise

2.2 数值结果

根据以上数值方法,模拟系统(1)在不同的阻尼系数及稳定性指标下的输出信噪比,如图 3 和图 4. 取参数 $\beta = 0$,信号频率 $w = \sqrt{2}/20$,振幅 $A = 0.2$.

图 3 展示了不同阻尼系数下的信噪比函数,可以看出信噪比随着噪声强度的变化呈现出非单调依赖关系. 随着噪声强度的增大,系统的输出信噪比不断减小并达到极小值,随后不断增大噪声强度

至 D_{SR} ,信噪比函数取得极大值,此后便一直减小. 这就说明在 D_{SR} 处,噪声的能量有效地转化为信号能量,使信号得到了放大,而噪声受到了抑制,最终系统(1)的输出信噪比得到了大大的提高,这是由系统发生随机共振所引起的. 而随着阻尼系数的增大,信噪比的峰值逐渐右移,且该峰值不断减小,这就说明较小的阻尼系数更有利于系统观测到随机共振现象. 因此我们可以确定出系统发生随机共振的最佳阻尼系数,即 $\gamma = 0.02$.

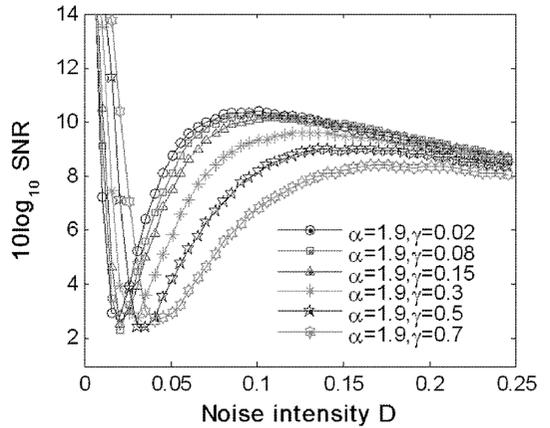


图3 不同阻尼系数下的信噪比函数

Fig. 3 The SNR functions with different damping parameter

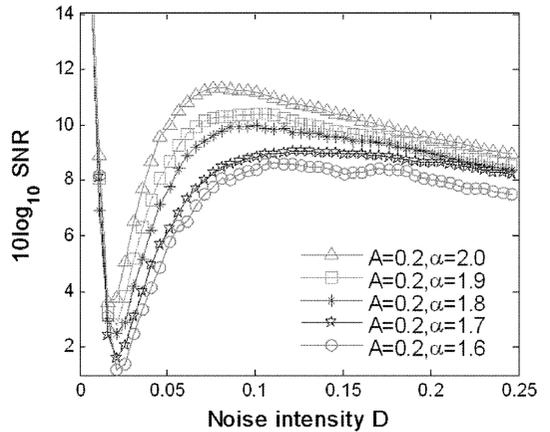


图4 不同稳定性指标下的信噪比函数

Fig. 4 The SNR functions with different stability index

取阻尼系数 $\gamma = 0.02$,图 4 描绘了不同的稳定性指标下的信噪比函数. 可以看出在不同的稳定性指标 α 的作用下,信噪比函数随着噪声强度的增大均呈现出非单调依赖关系,随着 α 的减小,信噪比函数的峰值不断减小且逐渐右移,同时由于 α 的减小,Lévy 噪声的不连续跳不断加剧,从而使得有效样本数不断减少,进而导致信噪比曲线越来越不光滑,这就说明了较大的稳定性指标 α 更有利于系统

发生随机共振.

3 Lévy 噪声激励下系统的相转移

噪声诱导的相转移已引起了各学者的广泛关注. 下面主要研究系统(1)在信号幅值 $A=0$ 时的相转移问题. 类似的, 对方程(6)进行求解, 并利用蒙特卡洛算法模拟系统的稳态概率密度函数, 通过观察稳态概率密度函数峰值个数的变化来讨论系统的相转移现象. 取系统阻尼系数 $\gamma=0.75$, 时间步长 $t=0$.

01 及 $a=1, b=1, \mu=0$.

图5考虑了不同的偏斜参数 β 及稳定性指标 α 对系统稳态概率密度函数 $p_{st}(x, y)$ 所对应的边缘密度函数 $p_{st}(x)$ 的影响, 取噪声强度 $D=0.25$. 可以看出对于固定的 α , 随着 β 的增大 $p_{st}(x)$ 从双峰逐渐变为单峰, 即 β 诱导系统发生了相转移. 同样地, 固定 β , 随着 α 的增大, $p_{st}(x)$ 左边的峰值不断减小, 而右边的峰值不断增大, 最终使得 $p_{st}(x)$ 从单峰变为双峰, 这说明 α 同样可以诱导系统发生相转移.

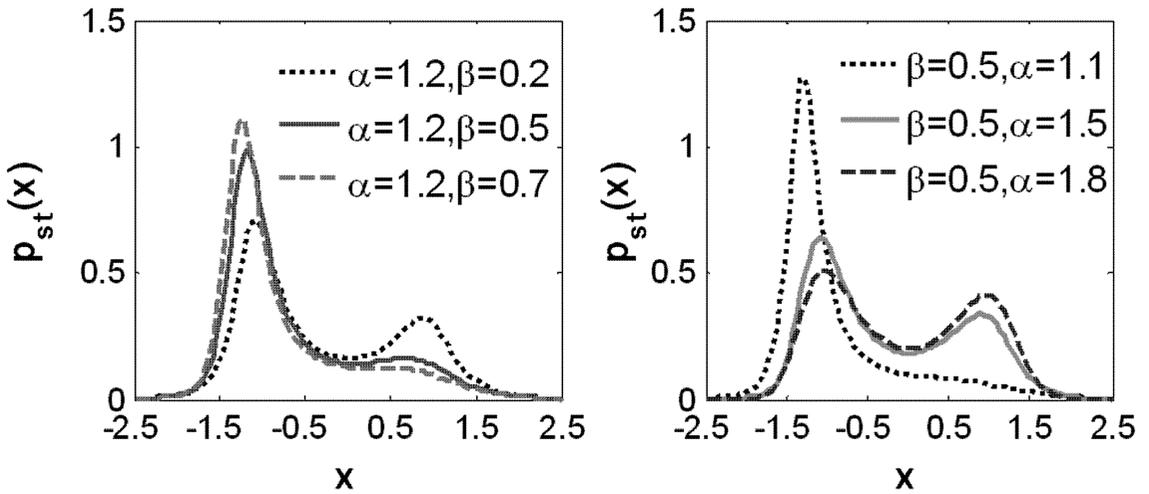


图5 不同的偏斜参数及稳定性指标下的稳态边缘概率密度函数

Fig.5 The stationary marginal probability densities with different skewness parameter and stability index

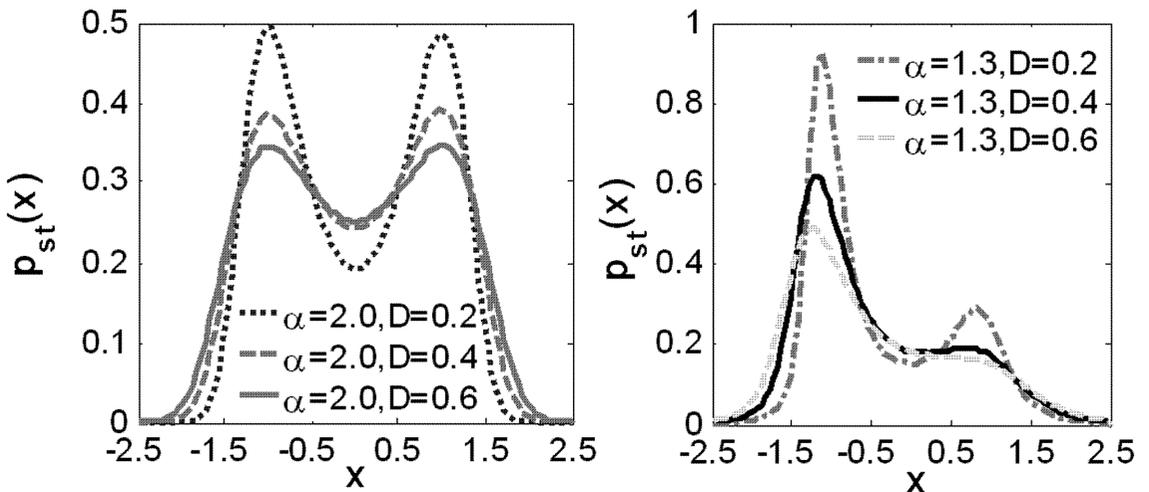


图6 高斯白噪声与 Lévy 噪声激励下系统的边缘稳态概率密度函数随噪声强度的变化

Fig.6 The stationary marginal probability densities functions with different noise intensity under Gaussian and Lévy noise

图6分析了高斯白噪声及 Lévy 噪声激励下噪声强度 D 的变化对系统的稳态边缘密度函数 $p_{st}(x)$ 的影响, 取偏斜参数 $\beta=0.5$. 可以看出, 在高斯白噪声激励下, 增大噪声强度不会改变 $p_{st}(x)$ 的峰值个数, 即噪声强度不会诱导系统发生相转移, 而

在 Lévy 噪声激励下噪声强度的增大导致 $p_{st}(x)$ 从双峰变为单峰, 从而观察到了系统的相转移现象.

4 结论

本文研究了 Lévy 噪声激励下 Duffing 系统的

随机共振与相转移问题. 分析了阻尼系数、稳定性指标及噪声强度对系统输出信噪比的影响, 发现较小的阻尼系数能够提高系统的输出信噪比, 进而更有利于系统随机共振现象的观测, 而稳定性指标的减小导致 Lévy 噪声的不连续跳加剧, 从而使系统的输出信噪比曲线更加不光滑, 而且峰值随着稳定性指标的减小而减小, 这说明了稳定性指标的减小削弱了随机共振的发生.

利用蒙特卡洛算法模拟了系统(1)在不受信号调制下的稳态概率密度函数, 结果表明, Lévy 噪声的稳定性指标、偏斜参数以及噪声强度的改变均能使系统稳态概率密度函数的峰数发生变化, 从而观察到了系统的相转移行为. 而在高斯噪声激励下, 噪声强度不会诱导系统发生相转移, 从而揭示了高斯噪声与 Lévy 噪声对 Duffing 系统的不同作用机理.

参 考 文 献

- 1 Zakhrova A, Vadivasova T, Anishchenko V, et al. Stochastic bifurcations and coherelike resonance in a self-sustained bistable noise oscillator. *Phys. Rev. E*, 2010, 81: 011106(6)
- 2 Kenfack A, Singh K P. Stochastic resonance in coupled

- underdamped bistable systems. *Phys. Rev. E*, 2010, 82: 046224 (5)
- 3 Ghosh P K, Barik D, Ray D S. Noise-induced transition in a quantum system. *Phys. Lett. A*, 2005, 342: 12 ~ 21
- 4 Zeng L Z, Bao R H, Xu B H. Effects of Lévy noise in aperiodic stochastic resonance. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2007, 40: 7175 ~ 7185
- 5 Dybiec B. Lévy noises: Double stochastic resonance in a single-well potential. *Phys. Rev. E*, 2009, 80: 041111 (7)
- 6 X Y, Gu R C, Zhang H Q, et al.. Stochastic bifurcation in a bistable Duffing-Van der pol oscillator with colored noise. *Phys. Rev. E*, 2011, 83: 056215(7)
- 7 Dybiec B, Gudowska-Nowak E. Stochastic resonance: the role of α -stable noises. *Acta Physica Polonica B*, 2006, 37: 1479 ~ 1490
- 8 张广丽, 吕希路, 康艳梅. 稳定噪声环境下过阻尼系统中的参数诱导随机共振现象. 物理学报, 2012, 61: 040501 (8) (Zhang G L, Lü X L, Kang Y M. Parameter-induced stochastic resonance in overdamped system with stable noise. *Acta Phys. Sin.*, 2012, 61: 040501 (8) (in Chinese))
- 9 Mitain S, Kosko B. Adaptive stochastic resonance. *Proc. IEEE*, 1998, 86: 2152 ~ 2183

LÉVY NOISE INDUCED STOCHASTIC RESONANCE AND PHASE TRANSITION IN DUFFING SYSTEM*

Li Juanjuan Xu Yong[†] Feng Jing

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract The phase transition and stochastic resonance (SR) induced by Lévy noise in a Duffing system were examined, and the influences of noise intensity and stability index of Lévy noise on SR were analyzed. The results imply that smaller damping parameter is more beneficial to the observation of SR, and the decrease of stability index weakens the occurrence of the SR. Furthermore, the stationary probability densities functions of the system were obtained by using Monte Carlo method. It's found that the skewness parameter, noise intensity and stability index can induce the phase transition, and the mechanism of the action of Gaussian noise and Lévy noise is different.

Key words Lévy noise, Duffing system, SR, phase transition

Received 12 April 2012, revised 22 June 2012.

* This project was supported by the NSF of China (10972181, 11102157), Program for New Century Excellent Talents in University, the Shaanxi Project for Young New Star in Science & Technology and NPU Foundation for Fundamental Research

[†] Corresponding author E-mail: hsux3@nwpu.edu.cn