

变截面铁木辛柯梁振动特性快速计算方法*

崔灿 李映辉[†]

(西南交通大学,力学与工程学院,成都 610031)

摘要 提出了一种快速计算变截面铁木辛柯梁横向振动特性的方法. 基于铁木辛柯梁理论建立的变截面梁的横向振动方程,其梁的截面参数如有效剪切面积、密度、弯曲刚度、转动惯量等沿梁轴线连续或非连续变化;首先将变截面梁等效为多段均匀阶梯梁;然后基于相邻两段连接处的位移(位移、转角)和力(弯矩、剪力)连续条件,建立相邻两段模态函数间相互关系,并递推出首段段与末段模态函数相互关系,利用边界条件得到相应特征方程,使用 Newton - Raphson 方法计算其固有频率;最后针对梁常见边界条件,得到计算变截面铁木辛柯梁横向振动固有频率特征方程的具体形式. 用该方法计算一变截面梁在常见边界条件下前三阶固有频率. 将计算结果同有限元计算结果进行比较,验证所提方法的有效性. 然后与欧拉 - 伯努利梁计算结果比较,验证了本文方法求解短粗梁固有频率具有更好适用性.

关键词 铁木辛柯梁, 变截面, 固有频率, 弯曲振动

引言

作为工程结构基本构件,梁被广泛应用在各种结构中. 随着科技进步,变截面梁表现出了优异的力学性能,如等强度梁等. 因此变截面梁在航空、宇航、机械、建筑等领域具有广泛的应用前景,受到人们的关注.

针对计算变截面梁的振动特性,国内外已开展了不少研究. 文献[1-3]分别给出了矩形截面梁固有频率的近似计算公式;但分别限定了截面厚度和宽度沿轴线变化的方式,即均针对某种特定变化的变截面梁开展的研究,不具有研究任意变截面梁振动特性的普遍意义. 文献[4-6]均研究了梁的横向振动,但都未有研究变截面梁的横向振动. 文献[7]提出了一种计算阶梯状欧拉 - 伯努利梁横向振动特性的方法;但未考虑任意截面变化,并且欧拉 - 伯努利梁仅适于细长梁,对短而粗的梁或计算细长梁的高阶频率时,未考虑转动惯量与剪切变形的影响,文献[7]的方法就有一定局限性.

本文将基于铁木辛柯梁理论,建立一种快速计算任意变截面梁横向振动特性的半解析方法. 给出其相关的计算理论和常见边界条件下的特征方程具体形式,通过算例说明方法的收敛性、有效性和

适用广泛性.

1 控制方程

基于铁木辛柯梁理论,长度 L 、轴线和横向振动方向分别是 x 和 y 方向的梁,由哈密顿原理得到其自由振动的方程^[8]

$$((y_{,x} - \psi)\kappa AG)_{,x} - \rho A y_{,tt} = 0 \quad (1a)$$

$$(EI\psi)_{,x} - \rho I \psi_{,tt} + \kappa AG(y_{,x} - \psi) = 0 \quad (1b)$$

式中 y 是横向挠度函数, ψ 是挠曲线转角函数,并且都是关于 x 和 t 函数. 变量 κA 、 G 、 ρA 、 EI 和 ρI 分别为有效剪切面积、剪切模量、线密度、弯曲刚度和转动惯量,都是沿轴向方向连续或不连续变化的函数,并且都是关于 x 函数. 对等截面梁,上述变量为常数,方程(1)表示为

$$\kappa AG(y_{,xx} - \psi_{,x}) - \rho A y_{,tt} = 0 \quad (2a)$$

$$EI\psi_{,xx} - \rho I \psi_{,tt} + \kappa AG(y_{,x} - \psi) = 0 \quad (2b)$$

由(2)可得到等截面铁木辛柯梁横向自由振动方程

$$EI y_{,xxxx} - \rho I (1 + E/\kappa'G) y_{,xxtt} + \rho A y_{,tt} - y_{,xxxx} \rho^2 I / \kappa G = 0 \quad (3)$$

进一步,可得振动微分方程模态函数 Y . 因此,等截面梁在给定的边界条件下,其模态函数的解析解可由模态函数给出,并可得到计算其固有频率的特征方程.

2011-12-26 收到第 1 稿,2012-03-03 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11072204),中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(SWJTU11ZT15)

[†] 通讯作者 E-mail: yinghui.li@home.swjtu.edu.cn

但对变截面梁的振动方程(1)无法得到相应的解析解,也无法直接采用上述方法计算其相应的固有频率.分析发现对变截面梁的横向振动方程(1),不能给出其模态函数的解析解、计算其固有频率的原因在于变截面梁的特征参数 $\kappa A(x)$ 、 $G(x)$ 、 $\rho A(x)$ 、 $EI(x)$ 和 $\rho I(x)$ 不为常数,而是沿轴线连续或非连续变化的函数.因此如果能将方程(1)中的特征参数等效为常数,就可以求出其模态函数的解析解及其振动固有频率.

于是基于分段思想,将变截面梁分为相互连接的若干段的组合;如图1所示,当段数足够多时,则每一段视为等截面段.

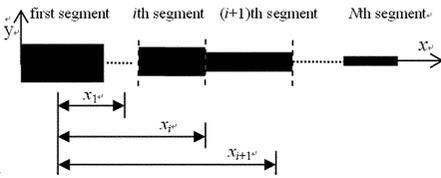


图1 多段等效梁

Fig. 1 Equivalent beam of N segments

梁第 i 段的特征参数分别用 l_i 、 $(\kappa A)_i$ 、 $(G)_i$ 、 $(\rho A)_i$ 、 $(EI)_i$ 和 $(\rho I)_i$ 表示($i=1,2,\dots,N$).且各特征参数表示为

$$(\kappa A)_i = \frac{1}{l_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \kappa A(x) dx, (G)_i = \frac{1}{l_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x) dx \quad (4a)$$

$$(\rho A)_i = \frac{1}{l_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho A(x) dx, (EI)_i = \frac{1}{l_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} EI(x) dx \quad (4b)$$

$$(\rho I)_i = \frac{1}{l_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho I(x) dx \quad (4c)$$

由等截面铁木辛柯梁 $Y(x)$ 和 $\Psi(x)$ 表达式^[9],得到梁第 i 段的 $Y(x)$ 和 $\Psi(x)$ 表达式

$$Y_i^{iv}(x) + s_i^{(1)}(s_i^{(2)} + s_i^{(3)})Y_i''(x) + s_i^{(1)}(s_i^{(1)}s_i^{(2)}s_i^{(3)} - 1)Y_i(x) = 0 \quad (5a)$$

$$\Psi_i^{iv}(x) + s_i^{(1)}(s_i^{(2)} + s_i^{(3)})\Psi_i''(x) + s_i^{(1)}(s_i^{(1)}s_i^{(2)}s_i^{(3)} - 1)\Psi_i(x) = 0 \quad (5b)$$

其中

$$s_i^{(1)} = \frac{(\rho A)_i}{(EI)_i} \omega^2, s_i^{(2)} = \frac{(I)_i}{(A)_i}, s_i^{(3)} = \frac{(E)_i}{(\kappa A)_i},$$

$$a_i = s_i^{(1)}(s_i^{(2)} + s_i^{(3)})/2, b_i = s_i^{(1)}(s_i^{(1)}s_i^{(2)}s_i^{(3)} - 1),$$

$$\beta_i = (\sqrt{a_i^2 - b_i} + a_i)^{1/2}, \gamma_i = (\sqrt{a_i^2 - b_i} - a_i)^{1/2}$$

$$m_i = (s_i^{(1)}s_i^{(3)} - \beta_i^2)/\beta_i, n_i = (s_i^{(1)}s_i^{(3)} + \gamma_i^2)/\gamma_i$$

(5)中 $Y(x)$ 和 $\Psi(x)$ 可表示为

$$Y_i(x) = A_i \sin X_i^{(1)} + B_i \cos X_i^{(1)} + C_i \sinh X_i^{(2)} + D_i \cosh X_i^{(2)} \quad (6a)$$

$$\Psi_i(x) = -A_i m_i \cos X_i^{(1)} + B_i m_i \sin X_i^{(1)} + C_i n_i \cosh X_i^{(2)} + D_i n_i \sinh X_i^{(2)} \quad (6b)$$

其中

$$X_i^{(1)} = \beta_i(x - x_{i-1}), X_i^{(2)} = \gamma_i(x - x_{i-1}) \quad (7)$$

其中 $i=1,2,\dots,N, x_0=0, A_i, B_i, C_i, D_i$ 是第 i 段的待定系数. $\beta_i, \gamma_i, m_i, n_i$ 是 ω 的函数, ω 是变截面梁横向振动的固有圆频率,而非第 i 段振动的固有圆频率.

由梁第 i 段和 $i+1$ 段在连接点 x_i 处的位移、转角、弯矩、剪力连续,得到如下关系

$$Y_{i+1}(x_{i+1}) = Y_i(x_i) \Psi_{i+1}(x_{i+1}) = \Psi_i(x_i) \quad (8a)$$

$$v_{i+1} \Psi_{i+1}'(x_{i+1}) = v_i \Psi_i'(x_i) \quad (8b)$$

$$\mu_{i+1}(\Psi_{i+1}(x_{i+1}) - Y_{i+1}'(x_i)) = \mu_i(\Psi_i(x_i) - Y_i'(x_i)) \quad (8c)$$

其中

$$\mu_i = (\kappa A)_i (G)_i, v_i = (EI)_i \quad (9)$$

将式(6)代入(8)中,整理得

$$\mathbf{A}_{(i+1)} = \mathbf{Z}_{(i)} \mathbf{A}_{(i)} \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{A}_{(i)} = [A_i \ B_i \ C_i \ D_i]^T$$

式(10)中矩阵 $\mathbf{Z}_{(i)}$ 表示为

$$\mathbf{Z}_{(i)} = \begin{bmatrix} c_1 \delta_i^{(2)}/c_9 & c_1 \delta_i^{(1)}/c_9 & c_1 \delta_i^{(4)}/c_9 & c_2 \delta_i^{(2)}/c_9 \\ c_3 \delta_i^{(1)}/c_{10} & c_3 \delta_i^{(2)}/c_{10} & c_4 \delta_i^{(3)}/c_{10} & c_4 \delta_i^{(4)}/c_{10} \\ c_5 \delta_i^{(2)}/c_9 & c_5 \delta_i^{(1)}/c_9 & c_6 \delta_i^{(4)}/c_9 & c_6 \delta_i^{(3)}/c_9 \\ c_7 \delta_i^{(1)}/c_{10} & c_7 \delta_i^{(2)}/c_{10} & c_8 \delta_i^{(3)}/c_{10} & c_8 \delta_i^{(4)}/c_{10} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中

$$\delta_i^{(1)} = \sin \beta_i l_i, \delta_i^{(2)} = \cos \beta_i l_i,$$

$$\delta_i^{(3)} = \sinh \beta_i l_i, \delta_i^{(4)} = \cosh \beta_i l_i,$$

$$c_1 = \mu_i(\beta_i \gamma_{i+1} + \gamma_{i+1} m_i) + \mu_{i+1}(\beta_i n_{i+1} - \beta_i \gamma_{i+1}),$$

$$c_2 = \mu_i(\gamma_i \gamma_{i+1} - \gamma_{i+1} n_i) + \mu_{i+1}(\gamma_i n_{i+1} - \gamma_i \gamma_{i+1}),$$

$$c_3 = v_i \beta_i m_i - v_{i+1} \gamma_{i+1} \gamma_{i+1} n_{i+1}, c_4 = v_i \gamma_i n_i - v_{i+1} \gamma_{i+1} n_{i+1}$$

$$c_5 = \mu_i(\beta_i \beta_{i+1} - \beta_{i+1} m_i) - \mu_{i+1}(\beta_i \beta_{i+1} - \beta_i m_{i+1})$$

$$c_6 = \mu_i (\beta_{i+1} n_i - \gamma_i \beta_{i+1}) + \mu_{i+1} (\gamma_i \beta_{i+1} + \gamma_i m_{i+1}),$$

$$c_7 = v_i \beta_i m_i - v_{i+1} \beta_{i+1} m_{i+1}, c_8 = -v_i \gamma_i n_i + v_{i+1} \beta_{i+1} m_{i+1},$$

$$c_9 = \mu_{i+1} (\beta_{i+1} n_{i+1} + \gamma_{i+1} m_{i+1}), c_{10} = v_{i+1} (\beta_{i+1} m_{i+1} - \gamma_{i+1} n_{i+1})$$

考虑式(10)中*i*分别取1,2,⋯, *N*−1, $\mathbf{Z}_{(1)}$ 和 $\mathbf{Z}_{(N)}$ 关系为

$$\mathbf{A}_{(N)} = \mathbf{Z} \mathbf{A}_{(1)} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{(N-1)} \mathbf{Z}_{(N-2)} \cdots \mathbf{Z}_{(2)} \mathbf{Z}_{(1)}$,且矩阵各元素都是固有圆频率 ω 的函数.因此只需给出梁左右两端的边界条件,即可得到关于固有圆频率 ω 的表达式,求解固有圆频率,并由(6a)得到模态函数.

2 常见边界条件下的特征方程

本节给出简支、固支支撑和自由端边界条件下,变截面梁特征方程的具体形式.首先,梁第1段左端边界和第*N*段右端边界条件写为

$$\mathbf{G}^L \mathbf{A}_{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}^R \mathbf{A}_{(N)} = \mathbf{0} \quad (13)$$

联立式(12)和(13)得

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{A}_{(1)} = \mathbf{0} \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{\Gamma} = [\mathbf{G}^L \quad \mathbf{G}^R \mathbf{Z}]^T \quad (15)$$

为使式(14)有非零解, $\mathbf{\Gamma}$ 的行列式的值必为零.对不同边界条件,若能写成式(15)中 $\mathbf{\Gamma}$ 的形式,则可将不同边界条件的特征方程统一.以梁第*N*段右端边界条件为例,根据第*N*段振动微分方程得到相应的模态函数和挠曲线函数为

$$Y_N(L) = [\delta_N^{(1)} \quad \delta_N^{(2)} \quad \delta_N^{(3)} \quad \delta_N^{(4)}] \mathbf{A}_N \quad (16a)$$

$$\Psi_N(L) = [-m_N \delta_N^{(2)} \quad m_N \delta_N^{(1)} \quad n_N \delta_N^{(4)} \quad n_N \delta_N^{(3)}] \mathbf{A}_N \quad (16b)$$

针对简支约束问题,位移和弯矩为零,即

$$Y_N(L) = 0, \quad \nu_N \Psi'_N(L) = 0 \quad (17)$$

将(16)代入(17),写成矩阵形式为

$$\mathbf{G}_S^R \mathbf{A}_{(N)} = \mathbf{0} \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{G}_S^R = \begin{bmatrix} \delta_N^{(1)} & \nu_N m_N \beta_N \delta_N^{(1)} \\ \delta_N^{(2)} & \nu_N m_N \beta_N \delta_N^{(2)} \\ \delta_N^{(3)} & \nu_N m_N \gamma_N \delta_N^{(3)} \\ \delta_N^{(4)} & \nu_N m_N \gamma_N \delta_N^{(4)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

同理,固支和自由端边界的 \mathbf{G}^R 形式分别为

$$\mathbf{G}_C^R = \begin{bmatrix} \delta_N^{(1)} & \delta_N^{(2)} & \delta_N^{(3)} & \delta_N^{(4)} \\ -m_N \delta_N^{(2)} & m_N \delta_N^{(1)} & n_N \delta_N^{(4)} & n_N \delta_N^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_M^R = \begin{bmatrix} \nu_N \beta_N \delta_N^{(1)} & -\mu_N (m_N + \beta_N) \delta_N^{(2)} \\ \nu_N \beta_N \delta_N^{(2)} & \mu_N (m_N + \beta_N) \delta_N^{(1)} \\ \nu_N \gamma_N \delta_N^{(3)} & \nu_N (n_N + \gamma_N) \delta_N^{(4)} \\ \nu_N \gamma_N \delta_N^{(4)} & \nu_N (n_N + \gamma_N) \delta_N^{(3)} \end{bmatrix}$$

同理,梁第1段 \mathbf{G}^L 亦可得到.由式(15)知矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 中各元素都是固有圆频率 ω 的非线性函数,可采用Newton-Raphson叠代法求解.得到相应边界条件下变截面梁横向振动的固有圆频率 ω .

3 方法有效性验证

本节通过算例,先讨论变截面梁的分段数对计算精度的影响,即收敛性和有效性;然后讨论此方法的适用性.在模型计算中,以有限元结果对本文结果进行评估;有限元计算中,采用8节点实体单元模拟.

3.1 分段数对计算精度影响

使用半径线性变化的圆截面梁(两端直径分别为:0.02m、0.01m),弹性模量210GPa,材料密度7900kg/m³,截面形状系数0.9.表1给出了两端简支梁(SS)、两端固支梁(CC)和悬臂梁(CA)下,使用有限元法和本文方法计算的前三阶固有频率值及相对误差.可见随着分段数(*N*)增加,计算精度显著提高;并且当分段数为16份时,相对误差均控制在0.2%以内;当*N*=32时,远小于有限元单元数时,相对误差在0.166%以内,具有较高精度和有效性,可满足一般的工程应用.

3.2 细长比对计算精度影响

使用半径线性变化的圆截面梁,计算不同细长比时铁木辛柯梁和欧拉-伯努利梁固有频率,以讨论方法对不同细长比梁的适用性.选取典型的短粗型的变截面梁,两端直径分别为为:0.2m、0.1m;材料特性同算例1.表2给出在两端简支梁(SS)、两端固支梁(CC)、悬臂梁(CA)边界条件下,有限元模型、铁木辛柯梁和欧拉-伯努利梁模型计算的前三阶固有频率及相对误差.

由表2知:1)铁木辛柯梁和欧拉-伯努利梁模型计算的固有频率值,均随着分段数的增加趋于稳定,这是因为计算达到每种模型算法的最优值;2)分析相对误差,铁木辛柯梁模型计算的固有频率比欧拉梁模型计算值更加精确;3)随着固有频率阶数

增加,铁木辛柯梁模型计算的固有频率比欧拉梁模型计算值更加精确。

表 1 变截面梁有限元法和本文方法计算的固有频率值

Table 1 Comparison of natural frequencies by the analytical Timoshenko and Euler – Bernoulli beam models with FEM results for variable cross – section beam

Case	Order	FEM	Natural frequencies /Hz (Theory method)					Relative error/%				
			N = 2	N = 4	N = 8	N = 16	N = 32	N = 2	N = 4	N = 8	N = 16	N = 32
SS	1	28.50	26.96	28.09	28.43	28.51	28.53	5.404	1.439	0.246	0.035	0.105
	2	119.2	124.2	117.5	118.9	119.2	119.3	4.195	1.426	0.252	0.000	0.084
	3	267.1	259.2	263.6	266.0	266.8	266.9	2.958	1.310	0.412	0.112	0.075
CC	1	67.52	65.15	68.19	67.82	67.63	67.58	3.510	0.992	0.444	0.163	0.089
	2	185.1	192.2	185.0	185.6	185.2	185.0	3.836	0.054	0.270	0.054	0.054
	3	361.9	353.9	355.1	362.2	361.6	361.3	2.211	1.879	0.083	0.083	0.166
CA	1	18.94	16.19	18.21	18.78	18.93	18.96	14.52	3.854	0.845	0.053	0.106
	2	80.00	66.26	76.28	79.14	79.89	80.08	17.175	4.650	1.075	0.137	0.100
	3	198.6	191.2	189.1	196.4	198.3	198.8	3.726	4.783	1.108	0.151	0.101

表 2 铁木辛柯梁和欧拉 – 伯努利梁模型固有频率及相对误差对比

Table 2 Comparison of natural frequencies by the analytical Timoshenko and Euler – Bernoulli beam models

Case	Order	FEM	Natural frequencies /Hz					Relative error/%				
			Timoshenko model			Euler model		vs. Timoshenko		vs. Euler		
			N = 16	N = 32	N = 64	N = 128	N = 16	N = 32	N = 64	N = 128	N = 128	
SS	1	277.4	276.9	277.1	277.2	277.2	285.2	285.4	285.4	285.4	0.072	3.070
	2	1090	1083	1084	1084	1084	1193	1194	1194	1194	0.550	10.249
	3	2233	2210	2212	2212	2212	2674	2676	2676	2676	0.940	21.086
CC	1	624.9	628.2	627.5	627.3	627.2	676.8	676.3	676.2	676.1	0.368	7.625
	2	1571	1572	1570	1570	1570	1855	1854	1854	1854	0.064	17.939
	3	2798	2777	2775	2773	2773	3629	3626	3625	3625	0.893	30.537
CA	1	186.5	187.1	187.4	187.5	187.5	189.3	189.6	189.7	189.8	0.536	1.443
	2	745.8	751.6	753	753.3	753.3	799.4	801.4	801.8	802	1.006	6.706
	3	1712	1723	1726	1726	1726	1986	1991	1993	1993	0.818	15.670

由表 1 和表 2 对比知:铁木辛柯梁模型计算结果仍保持较高精度,欧拉 – 伯努利梁模型计算结果偏差过大. 因此本文建立的铁木辛柯梁模型计算变截面梁振动特性的方法对短粗梁计算有较高精度,且计算高阶频率时精度仍有较高精度,即具有较好的适用性。

4 结论

本文基于铁木辛柯梁理论所建立任意变截面梁横向振动方程,提出了计算任意变截面梁横向振动固有频率的特征方程,基于该特征方程并结合 Newton – Raphson 叠代法,提出了一种计算任意变截面梁横向振动固有频率和模态函数的方法. 数值算例表明该半解析方法具有相当好的收敛性和计算精度. 同欧拉 – 伯努利梁模型相比,本文方法具有更广泛的适用范围。

此外,本文方法可以容易地推广到弯 – 扭耦合

和弯 – 弯耦合等变截面梁振动特性的计算。

参 考 文 献

- 1 Naguleswaran S. Vibration in the two principal planes of a non-uniform beam of rectangular cross-section one side of which varies as the square root of the axial co-ordinate. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 172: 305 ~ 319
- 2 Laura P A, Gutierrez R H, Rossi R E. Free vibration of beams of bi-linearly varying thickness. *Ocean Engineering*, 1996, 23 (1): 1 ~ 6
- 3 Caruntu D. On nonlinear vibration of non-uniform beam with rectangular cross-section and parabolic thickness variation. *Solid mechanics and its applications*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2000, 73: 109 ~ 118
- 4 Mao Q B. Free vibration analysis of stepped beams by using Adomian decomposition method. *Applied Mathematics*

- and Computation, 2010: 3429 ~ 3441
- 5 丁虎, 胡庆泉, 陈立群. 运动车辆模型的横向振动频率及模态. 动力学与控制学报, 2011, 9(1): 44 ~ 48 (Ding H, Hu Q Q, Chen L Q. Natural frequencies and model function of transverse. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(1): 44 ~ 48(in Chinese))
 - 6 王红霞, 李学平. 含表面裂纹简支梁的非线性振动分析. 动力学与控制学报, 2010, 8(2): 177 ~ 182 (Wang H X, Li X P. Non-linear vibration analysis of simply supported beams with an edge crack. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(2): 177 ~ 182(in Chinese))
 - 7 崔灿, 杜长城, 李映辉. 阶梯梁振动特性快速计算新方法. 四川大学学报(工程科学版), 2011, 43(增刊2), 133 ~ 136 (Cui C, Du C C, Li Y H. A new rapidly method for vibration characteristic of stepped beam. *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2011, 43 (S2), 133 ~ 136(in Chinese))
 - 8 Timoshenko S, Young D H, Weaver W. *Vibration problems in engineering*. Wiley: New York, 1974
 - 9 Huang T. The effect of rotary inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. *Journal of Applied Mechanics*, 1961(53): 579 ~ 584

A SOLUTION FOR VIBRATION CHARACTERISTIC OF TIMOSHENKO BEAM WITH VARIABLE CROSS-SECTION*

Cui Can Li Yinghui[†]

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract A method for bending vibration of variable cross-section beam was developed. Based on Timoshenko beam theory, the transverse oscillation equation of variable cross-section beam was derived, which allows the parameters, such as effective shear area, density, bending stiffness and moment of inertia, to vary in a manner of continuous and non-continuous related to axial coordinate. Then, the beam was modeled as a number of segments connected by continuity condition, and each segment was assumed to obey characteristic of uniform cross section. The relation of modal functions of contiguous segments was derived by using the conditions for continuity of displacement, slope of deflection curve, moment, and shear force at the connecting point between contiguous segments. Furthermore, the modal functions were determined for simply supported boundary conditions, and the natural frequencies can be obtained using Newton-Raphson method. To verify the effect of this method, the first third natural frequencies of a model were presented. The first three-order frequencies of a variable cross-section beam with the common boundary conditions were calculated by applying the new method introduced. The finite element results were adopted to verify the proposed method. Through the comparison with the results for Euler-Bernoulli beam model, it shows that the proposed method to solve the natural frequency of the beam with larges slenderness ratio has a better applicability.

Key words Timoshenko beam, variable cross-section, natural frequency, bending vibrations