

一类双悬臂含间隙振动系统的混沌控制策略研究*

王誉蓉^{1,2†}

(1. 宁夏大学机械工程学院, 银川 750021) (2. 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

摘要 由于一类双悬臂含间隙振动系统具有典型非光滑特性和有明显的非线性, 这直接导致了系统发生分叉与混沌现象的可能性. 为此针对该系统的混沌现象, 利用基于能量的开环控制策略, 构造有界控制器对混沌行为进行控制, 混沌运动可被引导到稳定的目标周期轨道, 并对控制的收敛速度进行分析, 数值模拟结果表明了该控制策略的有效性与可行性, 可为碰振系统的优化设计, 振动控制和安全运行提供了理论参考.

关键词 非光滑特性, 分叉, 混沌, 碰振系统

引言

混沌现象广泛存在于各类系统中, 如机械系统, 生物化学系统, 非线性光学系统, 流体动力系统^[1,2]. 混沌系统由于本身对初始条件的强烈灵敏性, 使其具有不可预测性, 因此大多数情况下, 混沌应该被抑制或者被控制. 20 世纪 90 年代 Ott 等人根据其混沌系统的各态历经和不稳定周期内嵌等特点, 提出了最早的混沌控制法——OGY 法, 其改进的半连续 OGY 控制方法 (SM-OGY) 和多参数 OGY 控制法 (MP-OGY) 加快了 OGY 法控制速度并能适应稳定高周期不稳定轨道的要求^[3,4,5]. 但该方法需要目标轨迹的详细信息, 给实际应用带来许多不便. 为此国内外研究者提出了各种控制混沌的方法, 如有延迟反馈控制^[6,7]、压缩映射控制和自适应控制等^[8,9], 也有对碰撞振动系统实现控制的例子^[10,11].

碰撞振动系统作为一种典型的非光滑动力系统普遍的存在于工程实际中. 由于频繁的碰撞会导致系统具有强非线性和不连续性, 与光滑的非线性系统相比存在更为复杂的非线性现象, 对系统的安全运行造成隐患. 由于碰撞界面微分的不连续性, 使得原有的适用于连续系统的方法无法用于此类系统. 本文应用基于能量的开环控制策略, 针对双悬臂梁碰振系统的构造了有界控制器, 理论分析了控制的稳定性和收敛速度. 该方法结构简单, 适用性强, 故对指导实际工程中具有一定的借鉴意义.

1 系统模型与运动微分方程

如图 1 所示, 对于碰撞描述, 有以下几点假设: 1) 碰撞是点接触碰撞; 2) 碰撞时两悬臂梁在碰撞处是正碰撞, 没有摩擦、斜碰撞等; 3) 碰撞采用 Newton 弹性碰撞系数描述, 方程如下

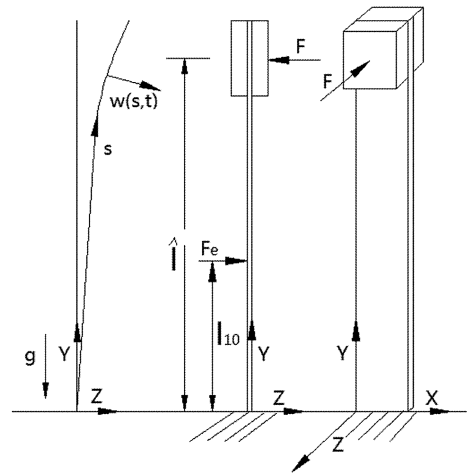


图 1 冲击模型

Fig. 1 The impact module of one-degree-of-freedom

$$\dot{z}(t^+) = -rz(t^-) \quad (1)$$

其中: \dot{z} 悬臂梁运动状态, t^+ 、 t^- 分别表示碰撞瞬时前后时间, r 是弹性碰撞回复系数, 与两碰撞梁材料和环境有关.

建立双悬臂含间隙碰撞系统微分方程^[12]:

$$m_{11}\ddot{q}_{11} + k_{11}q_{11} + c_{11}\dot{q}_{11} + a_{11}q_{11}^3 + a_{12}[\dot{q}_{11}^2 q_{11} + q_{11}^2 \dot{q}_{11}] = F_{\phi 1}$$

$$m_{21}\ddot{q}_{21} + k_{21}q_{21} + c_{21}\dot{q}_{21} + a_{21}q_{21}^3 + a_{22}[\dot{q}_{21}^2 q_{21} + q_{21}^2 \dot{q}_{21}] = F_{\phi 2}$$

2012-05-07 收到第 1 稿, 2012-05-29 收到修改稿.

* 宁夏回族自治区自然科学基金资助项目 (NZ1022), 宁夏大学科学研究基金资助项目 ((E)ndzr09-8)

† 通讯作者 E-mail: gxf1688@163.com

$$\begin{aligned} & q_{21}^2 \ddot{q}_{21}] = 0 \\ \dot{z}(t) &= \dot{z}(t) \quad q_{21} \phi_{21}(\dot{l}) - q_{11} \phi_{11}(\dot{l}) < \Delta \\ \dot{z}(t^+) &= -r\dot{z}(t^-) \quad q_{21} \phi_{21}(\dot{l}) - q_{11} \phi_{11}(\dot{l}) = \Delta \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$F_{\phi_1} = \phi(s = l_{10}) F_e \cos(\Omega t) \quad (3)$$

(2)式中 $m_{11}, m_{21}, c_{11}, c_{21}, k_{11}, k_{21}, q_{11}, q_{21}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 分别为受谐波激励碰撞梁和被碰撞梁的一阶模态质量、阻尼、刚度、坐标及非线性项系数。

(3)式中 F_{ϕ_1} 为模态坐标下的外激励力。

2 基本控制策略

Valery 提出了非反馈、开环的控制策略,通过微小能量的干预,帮助系统回避掉混沌状态,同时微小能量对系统性能只能产生有限的、微小的、局部的干预,不会改变整个系统内在的性质^[13]。基于能量的控制策略是,对于任何动力系统,将输入一个与平均系统振动能量相应的能量干预(平均系统振动能量是关于时间的系统动能和势能的平均值),这个能量输入将会改变系统能量状态使得系统进入稳定的运动状态。

$$\ddot{x} + \chi(x, \dot{x}) + \xi(x) = F(t) + g(x, \dot{x}) \quad (4)$$

(4)式是一般情况下光滑非线性方程,其中包含耗能或增能项 $\chi(x, \dot{x})$, 力储能项 $\xi(x)$, 力控制项,这些函数一般情况下都是非线性项 $g(x, \dot{x})$ 。

$$E(x) = \int \xi(x) dx + \frac{1}{2} \dot{x}^2 \quad (5)$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int \xi(x) dx + \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) dt \quad (6)$$

式(5)是系统的总能量,式(6)是关于时间的平均能量,其中 T 是系统周期。对于存在固定周期的动力系统, T 是有限的确定数,而对于混沌运动, T 变成了无限大 ($T \rightarrow \infty$)。根据式(6),系统的动力学运动特征可以与平均系统能量直接关联。对于非光滑碰撞系统,碰撞也可以看成是一个能量项,其引起的能量损失(弹性回复系数小于1时)可以作为方程(4)耗能项 $\chi(x, \dot{x})$ 中的一部分,这样能量干预控制可以继续运用于非光滑系统,即系统处于低能量吸引子时,通过能量的增加使其稳定在高能多碰撞吸引子,反之亦然。

式(3)的能量微分如下:

$$\dot{E} = \xi(x) \dot{x} + \dot{x} \ddot{x} = (-\chi(x, \dot{x}) +$$

$$F(t) + g(x, \dot{x})) \dot{x} \quad (7)$$

$$g(x, \dot{x}) \dot{x} > 0 (< 0), \forall (x, \dot{x}) \quad (8)$$

式(7)中最后一项(式(8))表示只受控制决定的能量项,控制能量的干预通过改变其数值大小和正负来实现。

对于非光滑碰撞系统,状态域内速度参量是瞬间变化的,即系统能量瞬间变化主要是由速度参量变化引起的,因此这里假定控制函数 $g = g(\dot{x})$ 。为了不改变系统本身的特征因此构造以下有界控制函数:

$$g(\dot{x}) = \gamma h(\dot{x}) \quad (9)$$

$$h(\dot{x}) = \begin{cases} > 0 (\rightarrow a) & \text{if } \dot{x} > 0 (\rightarrow \infty) \\ = 0 & \text{if } \dot{x} = 0 \\ < 0 (\rightarrow -a) & \text{if } \dot{x} < 0 (\rightarrow -\infty) \end{cases} \quad (10)$$

式(9)中, γ 是能量幅值,式(10)中, $a > 0$ 并且是有限数,当 $a = 1$ 时, $h(\dot{x})$ 是单位能量函数。假定 $h(\dot{x})$ 是一个奇函数,则如果系统一个周期内速度对称,控制在一个周期内的能量输入总和将为0,这使能量控制对系统响应的影响降到最低。在此选择 $g(\dot{x}) = \gamma \cdot \tanh(\beta \dot{x})$ 作为能量控制函数,该函数是一个有界的奇函数,其最大绝对幅值为 γ , 即能量的最大输入, β 是函数的变化坡度 ($0 < \beta \leq +\infty$)。当 γ 一定时,坡度 β 越大表明能量输入函数对参变量越灵敏(这里表示对系统的速度参量变化越灵敏),相应的其有效能量输入也越大;当 $\beta \rightarrow \infty$, 控制函数变成了阶梯函数,即在速度零点处,能量有个阶越变化并保持不变,有效能量输入达到了最大;当 β 很小时,近似取控制函数的线性部分, $\tanh(\beta \dot{x}) \approx \beta \dot{x}$, 即系统加入了一个阻尼控制函数 $g(\dot{x}) = \gamma \cdot \beta \cdot \dot{x}$, Silvio 等人基于此给出了碰撞混沌的阻尼控制准则^[14]。

对于双悬臂的碰撞运动,控制首先施加其中一个悬臂梁上,通过对其中一根悬臂梁的能量进行干预,达到干预整个系统的能量的目的。假设将能量控制施加在被碰撞的悬臂梁(Beam 2)上,引入阻尼控制函数到系统的状态方程中,得式(11)。

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g(\beta \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot \mathbf{X}^T) \quad (11)$$

式中 \mathbf{X} —系统状态量 $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$

3 数值计算结果与分析

3.1 控制结果分析

当系统参数满足 $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1, \delta = 2e^{-4}, \alpha_{11} = \alpha_{21} = 0.032, \Omega = 2.83$, 系统呈现出混沌状态^[12], 如图2所示. 图3是不同 β 下的能量控制函数变化,

在 β 较大时, 系统的能量控制函数有较大坡度的阶跃变化, 有效能量干预较大, 并且在系统处于非碰撞自由运动的速度引起的能量控制可以看成是一个定常能量干预 (只有正负的变化); 在 β 较小时, 系统的能量控制函数的坡度变缓, 有效能量干预变小.

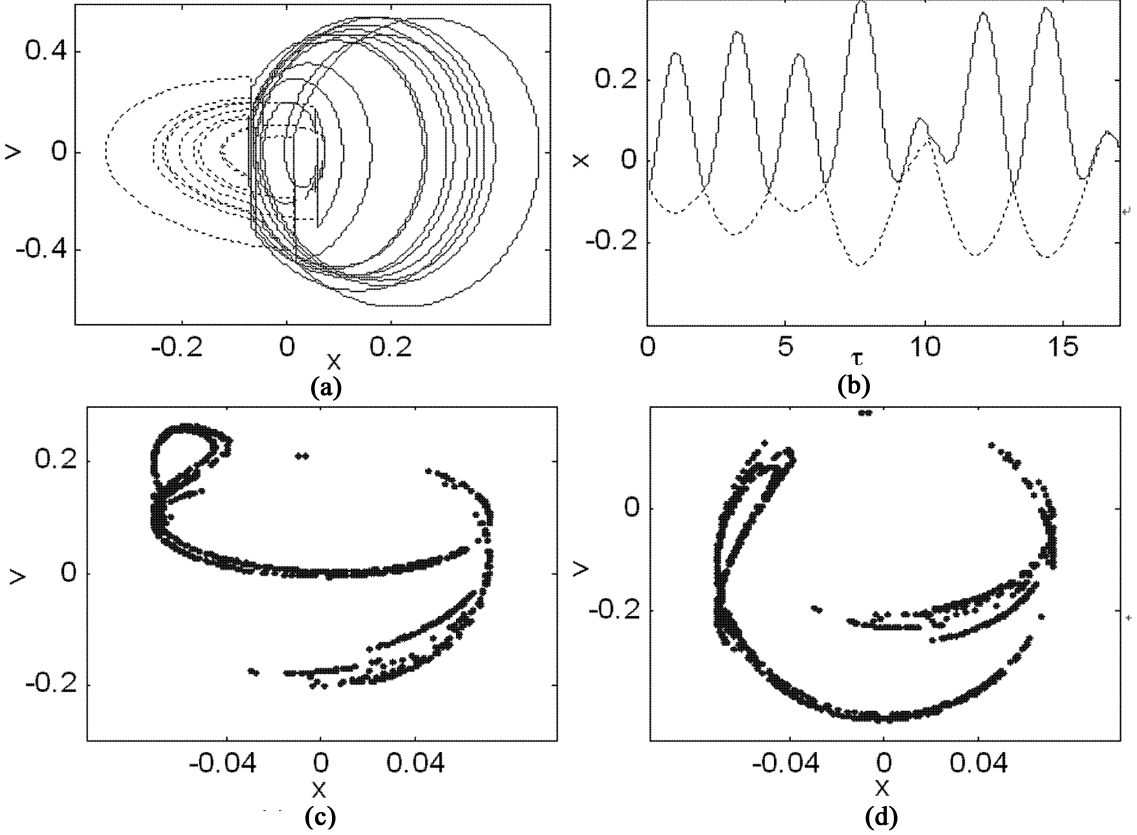


图2 双悬臂梁(Beam 1和Beam 2)混沌图,a)两碰撞梁相图,b)两碰撞梁时间波形图, c,d)碰撞梁(Beam 1)和被碰撞梁(Beam 2)混沌吸引子

Fig.2 The chaos of Beam 1 and 2, a) phase portraits of Beam 1 and 2, b) waveforms of Beam 1 and 2, c, d) strange attractors of Beam 1 and 2

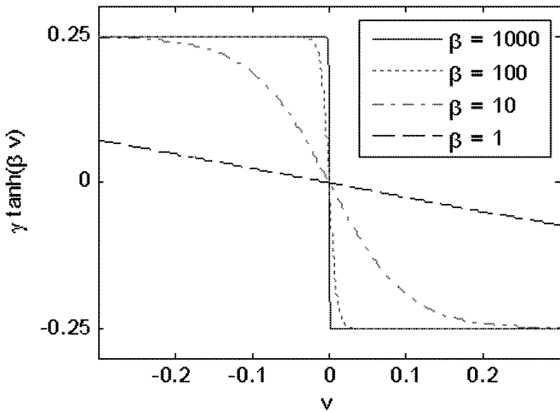


图3 控制函数 $\gamma \cdot \tanh(\beta \dot{x})$ 对 \dot{x} 的影响, $\gamma = -0.25$

Fig.3 The influence of β in $\gamma \cdot \tanh(\beta \dot{x}), \gamma = -0.25$

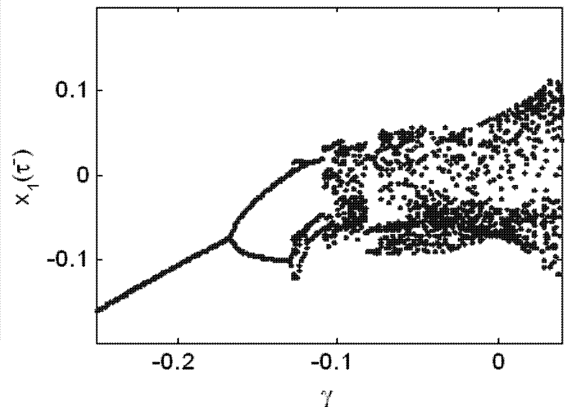
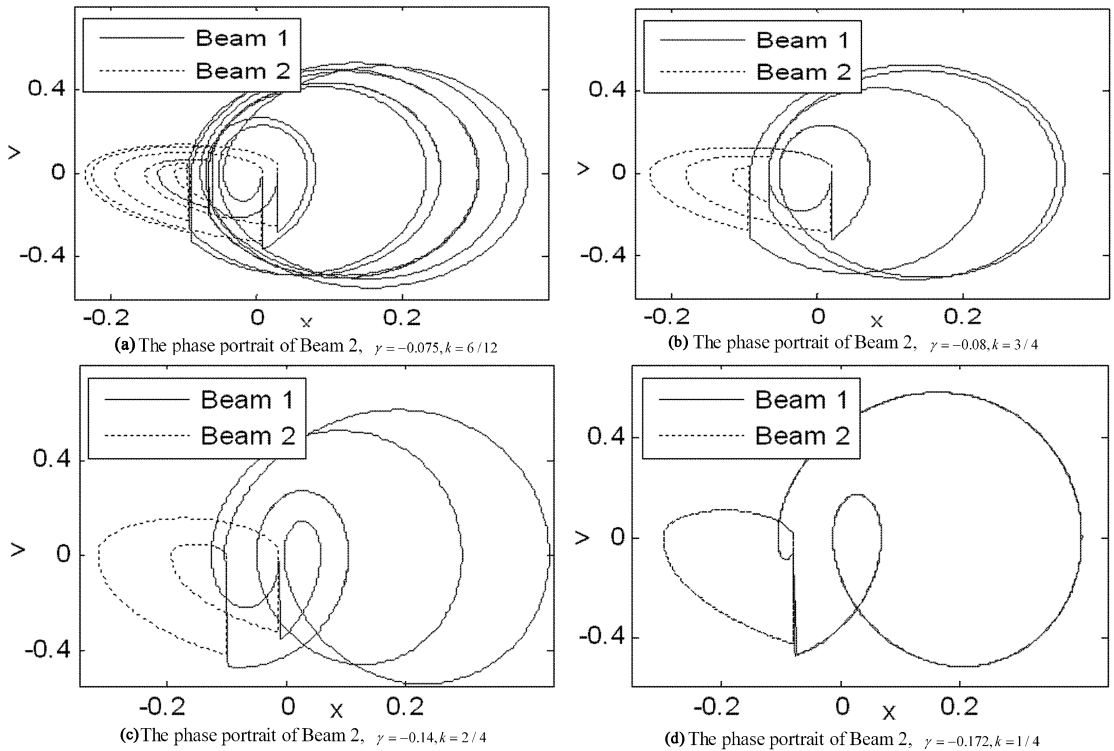


图4 $4\Omega=0.45\text{Hz}$, 被碰撞梁(Beam 2)关于 γ 的分岔图

Fig.4 $4\Omega=0.45\text{Hz}$, the bifurcation of Beam 2 displacement with respect to γ

图5 被碰撞梁(Beam 2)在不同 γ 下几种典型稳定运动, $\beta = 1000$ Fig. 5 The some typical stable motions of Beam 2 under different γ with $\beta = 1000$

在碰撞系统处于混沌状态时,其碰撞次数较多,相邻两次碰撞有时间隔很短,假定每次碰撞都需要能量干预,则较大的能量函数坡度拥有对速度变化更灵敏的反应(特别是碰撞的时候),且有更高的有效能量干预,则对系统的能量控制也越明显,因此选择较大的 β ,取 $\beta = 1000$.同时,相比正能量干预,负能量干预使混沌系统均能下降,而低能量的系统补偿碰撞耗能变弱,则相应的碰撞次数会变少,系统进入少碰撞运动更易于稳定.因此,选择负能量干预控制.

图4是系统处于混沌状态时,不同参数引起的系统被碰撞悬臂梁的分岔图,如图4所示,在 $\beta = 1000$ 的坡度情况下,正能量的干预不能使系统进入稳定的轨道,并且系统的混沌域变大,即系统处于混沌吸引子时,正能量的干预使系统能量变得更大,更不易使其进入稳定的吸引子;负能量的干预则使系统能进入稳定的少碰撞吸引子,不同的 γ 会使系统处于不同的吸引子.在能量干预较小时,系统均能降低不多,系统还能补偿周期内较多的碰撞损失;在能量干预不断增大时,系统会最终稳定在单碰撞周期稳定轨道上.

图5几组不同 γ 参数下对系统干预的结果,选

取合适的不同的 γ 能使系统出现不同的稳定周期运动.当 $\gamma = -0.075$ 较小能量干预时,系统是六碰撞周期运动($k = 6/12$),当 $\gamma = -0.08$ 系统是三碰撞周期运动($k = 3/4$),当 $\gamma = -0.14$ 系统是二碰撞周期运动($k = 2/4$),而 $\gamma = -0.172$ 较大能量干预时,系统处于周期单碰撞运动($k = 1/4$).

3.2 控制收敛速度分析

不同的 γ 不仅与系统的稳定状态相关,同时与控制的收敛速度相关.图6是对应图5中不同 γ 下系统稳定在不同类型轨道上需要的收敛时间对比,图中表示的是相邻两次碰撞时的状态误差与碰撞次数的函数关系.如图6所示,能量干预较大则系统收敛相对较快;最后稳定为少碰撞周期运动,其收敛速度相对较快.因为当系统需要稳定在周期多碰撞高能量轨道上时,每次负能量对混沌系统的干预必须非常有限,较大的单次负能量干预会使系统均能降低过多,则单次周期内不能补偿多碰撞能量损失,则系统脱离周期多碰撞轨道;为了使系统最终能稳定在多碰撞周期高能量轨道上则需要多次的小能量累加,干预次数变多,收敛速度较慢.而当系统需要稳定在少碰撞周期低能量轨道上,每次负能量干预可以变大,需要的能量累加次数变少,则系统收敛速度较快.

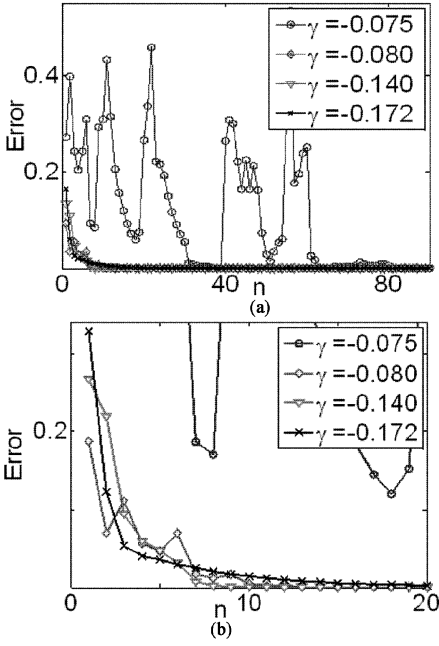


图6 不同 γ 控制收敛速度, (b) 是 (a) 的局部放大图
 Fig. 6 The convergence of control under different γ
 (b) is zoomed in from (a)

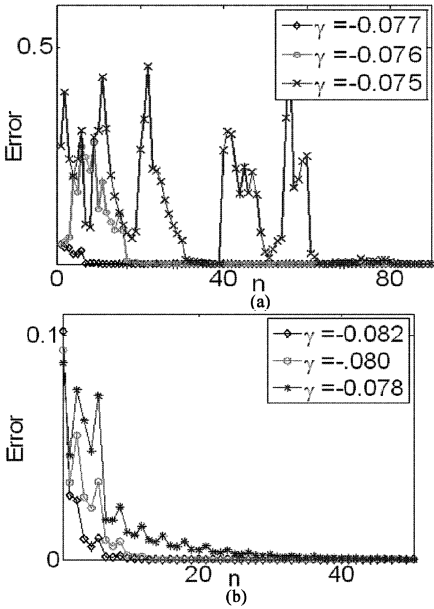


图7 $k=6/12$ 碰撞下, 不同 γ 控制收敛速度
 Fig. 7 The convergence of control under different γ when $k=6/12$

图7与图8是系统稳定在同类型轨道上的收敛速度对比, 图中表示的是相邻两次碰撞时的状态误差与碰撞次数的函数关系. 如图中所示, 对于同类型收敛, 负能量干预越大, 则收敛速度相对越快. 在较小负能量干预能使系统稳定在多碰撞周期轨道上时, 如图7所示, 其收敛速度的变化对负能量大小变化非常敏感, 这也是由于在多碰撞周期收敛过程中, 系统本身能量的稍微变化都能强烈改变周

期内碰撞次数, 或能补偿次数更多的碰撞能量损失或是只能补偿次数更少的碰撞能量损失, 从而改变系统最后收敛情况. 由上述可得, 在 γ 满足能使系统稳定在同类型轨道上的条件下, 较大的单次负能量输入可以提高系统的收敛速度.

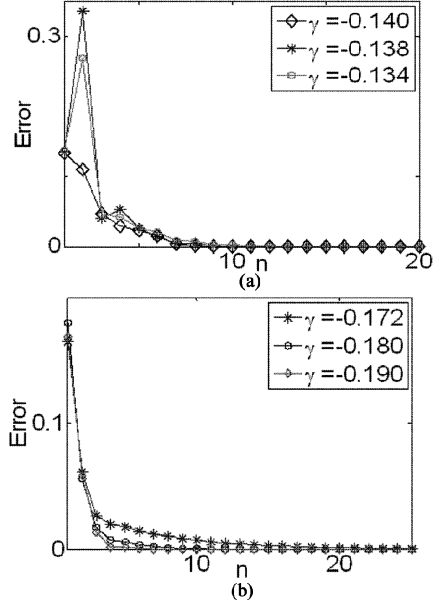


图8 (a) $k=2/4$, (b) $k=1/4$ 碰撞下, 不同 γ 控制收敛速度
 Fig. 8 The convergence of control under different γ
 when $k=2/4$ and $k=1/4$

同时, 对于不同 γ 下的稳定收敛, 其相邻两次碰撞收敛误差并不总是渐进变小的, 这是由于稳定周期多次碰撞中, 相邻两次碰撞状态是不同的, 则在收敛过程中相邻两次碰撞误差也不会趋近零, 只有周期间隔的收敛误差是渐进变小的收敛至零. 如图8所示为周期2碰撞运动, 其收敛过程中, 间隔一次碰撞的收敛误差是渐进收敛至零.

4 结论

针对一类双悬臂含间隙振动系统的混沌现象, 基于能量的开环控制策略的基础上, 给出具体的有界控制器, 通过调节相应的控制参数, 数值模拟表明混沌运动可以被引导到稳定的目标周期轨道. 对该控制策略的收敛速度进行分析, 即表明适当的控制能量可以提高收敛速度. 该方法简单易实现可用于类似非线性系统, 在实际工程有一定的参考意义.

参 考 文 献

1 Boccaletti S, Grebogi C, Lai Y C, Mancini H, Maza D.

- The control of chaos: theory and applications. *Physics Reports*, 2000, 329(3): 103 ~ 197
- 2 de Paula A S, Savi M A. Comparative analysis of chaos control methods: A mechanical system case study. *Int. J. Non-Linear Mech*, 2011, 46(8): 1076 ~ 1089
 - 3 de Paula A S, Savi M A. A multiparameter chaos control method based on OGY approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, 40(3): 1376 ~ 1390
 - 4 Pereira-Pinto, F H I. Chaos control in a nonlinear pendulum using a semi-continuous method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 22(3): 653 ~ 668
 - 5 张文丰,胡海岩.含反馈时滞的非线性动力系统参数辨识. *振动工程学报*,2001,14(3):303 ~ 307 (Zhang W F, Hu H Y. Parametric estimation of nonlinear dynamic systems with time delayed feedback. *Journal of Vibration Engineering*, 2001,14(3):303 ~ 307(in Chinese))
 - 6 任海鹏,刘丁,韩崇昭.基于直接延迟反馈的混沌反控制. *物理学报*,2006,55(6):2694 ~ 2701 (Ren H P, Liu D, Han C Z. Anticontrol of chaos via direct time delay feedback. *Acta Physica Sinica*, 2006,55(6):2694 ~ 2701 (in Chinese))
 - 7 孙中奎,徐伟,杨晓丽.窄带激励下带有时滞反馈的非线性动力系统的响应. *振动工程学报*, 2006,19(1): 57 ~ 64 (Sun Z K, Xu W, Yang X L. Response of nonlinear system to random narrow-band excitation with time delay state feedback. *Journal of Vibration Engineering*, 2006,19(1):57 ~ 64 (in Chinese))
 - 8 于洪洁,吕和祥.压缩映射-参数微扰控制混沌. *振动工程学报*,2003,16(2):212 ~ 218(Yu H J, Lu H X. Chaos control based on contraction mappings and small perturbations. *Journal of Vibration Engineering*, 2003,16(2):212 ~ 218 (in Chinese))
 - 9 胡海岩.引导混沌运动到周期运动的自适应控制策略. *力学学报*,1997,(29):631 ~ 635 (Hu H Y. An adaptive control strategy for directing chaotic motion to periodic motion. *Acta Mechanica Sinica*, 1997,(29):631 ~ 635(in Chinese))
 - 10 Silvio L T de Souza, Ibere L Caldas. Controlling chaotic orbits in mechanical system with impacts. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004,19:171 ~ 178
 - 11 June Yule Lee, Jun-Juh Yan. Control of impact oscillator. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 28:136 ~ 142
 - 12 刘佳斌,龙新华.双悬臂梁在简谐力作用下的碰撞动力学分析. *动力学与控制学报*,2011,9(3):227 ~ 233 (Liu J B, Long X H. Dynamic analysis on vibro-impact between two cantilevers excited by harmonic force. *Journal of Dynamics and Control*, 2011,9(3):227 ~ 233(in Chinese))
 - 13 Liu S, Wu L, Lu Z. Impact dynamics and control of a flexible dual-arm space robot capturing an object. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 185(2): 1149 ~ 1159
 - 14 de Souza S L T, Caldas I L. Controlling chaotic orbits in mechanical systems with impacts. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 19(1): 171 ~ 178

CHAOS CONTROL STRATEGY FOR A DOUBLE CANTILEVER VIBRATION SYSTEM WITH A CLEARANCE *

Wang Yurong^{1,2†}

(1. Department of Mechanical Engineering, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

(2. State Key Lab. of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract A double cantilever vibration system with a clearance has the typical non-smooth and nonlinear characteristics, which can induce bifurcation and chaos. Thus, the open-loop control strategy based on energy was studied and a bounded controller was proposed. The chaotic motion of the system can be directed into the stable objective period motion by this strategy. Furthermore, the convergence speed of the controller was analyzed. By numerical simulation, the effectiveness and applicability of this method was demonstrated, which are helpful for designing, vibration control and safety operating of vibro-impact systems.

Key words non-smooth system, bifurcation, chaos, vibro-impact system

Received 7 May 2012, revised 29 May 2012.

* The project supported by the Natural Science Foundation of Ningxia (NZ1022) and Science Research Foundation of Ningxia University ((E)ndzr09-8)

† Corresponding author E-mail: gxf1688@163.com