

# 对称轮轨系统的“合成分岔图”法\*

高学军<sup>1†</sup> 李映辉<sup>2</sup> 乐源<sup>2</sup>

(1. 成都理工大学环境与土木工程学院, 成都 610059) (2. 西南交通大学力学与工程学院, 成都 610031)

**摘要** 定义对称轮轨系统对称性分岔的概念, 由数值积分得到系统的时间响应并建立对称轮轨系统的离散动态 Poincare 映射截面及其对称截面, 提出“合成分岔图”的构造方法, 应用该方法对一两轴转向架系统进行与理想平直轨道上的对称/不对称分岔行为和混沌运动进行分析. 在研究速度范围内, 发现系统存在大量的对称运动形式, 也存在很多的不对称运动形式, 系统的对称性刚开始是通过不可捉摸突变而破坏的.

**关键词** 轮轨系统, “合成分岔图”, 对称/不对称, 分岔

## 引言

随着车辆运行速度的逐步提高, 车辆系统动力学的研究也变得相当重要起来, 其中横向运动稳定性研究<sup>[1-3]</sup>是车辆系统动力学性能非常重要的一个方面, 因为它涉及到车辆临界速度的确定. 高速列车需要具有更高的失稳临界速度, 如果列车系统失稳将会出现蛇行运动. 从动力学的角度来说, 车辆系统的蛇行问题可以归结为动力系统的运动稳定性与分岔问题, 车辆出现蛇行现象实际就是动力系统出现了稳定的周期解, 而计算车辆系统的临界速度实际就是确定稳定周期解出现的最小速度值, 即确定动力系统分岔点的过程.

对铁道车辆系统横向运动稳定性、分岔行为和混沌运动的研究, 国内外已开展了不少研究工作. Cooperrider<sup>[4]</sup>首先将非线性修正的纵向和横向蠕滑力(未考虑自旋蠕滑力)引入到车辆系统中研究系统的动力学行为. Kaas - Petersen 等<sup>[5]</sup>研究了 Cooperrider 转向架在有轮缘力和无轮缘力作用下的横向运动, 发现无轮缘作用时系统经对称性破缺分岔进入非对称周期运动状态, 而有轮缘作用时在车辆系统中存在着混沌运动. True 等<sup>[6, 7]</sup>分析了 Cooperrider 转向架系统中出现的 Neimark 分岔、鞍结分岔和音叉分岔, 并讨论了退化分岔附近模态的相互作用. 曾京<sup>[8]</sup>使用 QR 算法结合黄金分割法用以确定车辆系统的 Hopf 分岔点, 并用打靶法进行极限环的数值求解, 较好的解决了相关的数值计算

问题. Ahmadian 等<sup>[9]</sup>用渐近法研究了单个转向架的稳定性, 并对诸多影响因素进行了分析. 杨绍普等<sup>[10]</sup>在其著作中则研究了具有滞后非线性悬挂的转向架和机车车辆的 Hopf 分岔行为和运行稳定性. Gao 等<sup>[11]</sup>则详细研究了四轴客车系统横向运动的分岔行为, 发现系统存在大量的对称/不对称的周期运动和混沌运动, 进一步的研究结果则表明系统经过多次的音叉分岔反复经历对称性破坏和对称性恢复的过程, 最终进入不对称的混沌运动状态.

在这些研究中, 对车辆系统的分岔行为及混沌运动描述较多, 但对对称车辆系统出现的不对称运动形式及其内在机理关注不足, 且没有形成一种较好的表示对称车辆系统不对称运动的方法. 基于此, 本文拟通过定义对称轮轨系统对称性分岔的概念, 提出一种可描述对称轮轨系统对称/不对称运动状态的“合成分岔图”方法. 然后以一两轴转向架系统为分析对象, 应用该方法对转向架系统速度大范围内的对称/不对称分岔行为及混沌运动进行详细描述, 阐述其中的数学或力学机理.

## 1 动力学模型描述

### 1.1 轮轨接触几何关系

在给定的轮轨截面参数下, 左/右轮滚动圆半径( $r_l, r_r$ )、左/右轮轮轨接触角( $\delta_l, \delta_r$ )以及轮对侧滚角位移( $\phi_w$ )等轮轨接触几何参数都可近似认为是轮对横移量  $y_w$  的函数

2012-04-12 收到第 1 稿, 2012-06-08 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金项目(11072204, 11102030, 10902092), 成都理工大学高层次人才招聘启动项目(HK0034)资助

† 通讯作者 E-mail: gaoxj3000@sina.com

$$\left. \begin{aligned} r_l, r_r &= r_0 \pm \lambda y_w \\ \delta_l, \delta_r &= \delta_0 \pm \varepsilon_0 y_w / a_0 \\ \phi_w &= \sigma y_w / a_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $r_0$  是车轮名义滚动圆半径,  $\lambda$  是车轮踏面等效锥度,  $\delta_0$  是轮对居中时的轮轨接触角,  $\varepsilon_0$  是轮对横移引起的接触角变化参数,  $a_0$  是轮轨接触点横向距离之半,  $\sigma$  为轮对侧滚角参数。

## 1.2 蠕滑力/力矩的计算

蠕滑力、蠕滑力矩是由于轮轨接触区两者有相对滑动而产生的。在计算蠕滑力及蠕滑力矩时都要用到蠕滑率, 蠕滑率定义为轮轨接触点的相对速度或相对角速度与车辆运行速度之比。纵向、横向、自旋蠕滑率对左轮( $l$ ,  $\mp$ 取上面的符号), 右轮( $r$ ,  $\mp$ 取下面的符号)可依次表示为<sup>[12]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \xi_{x(l,r)} &= \frac{V + \psi_w \dot{y}_w + r_{(l,r)} (\psi_w \dot{\phi}_w - \Omega) \mp a_0 \dot{\psi}_w}{V} \\ \xi_{y(l,r)} &= \frac{V + \psi_w + \dot{y}_w + r_{(l,r)} \dot{\phi}_w}{V \cos(\delta_{(l,r)})} \\ \xi_{sp(l,r)} &= \frac{\mp (\Omega - \psi_w \dot{\phi}_w) \sin(\delta_{(l,r)}) + \dot{\psi}_w \cos(\delta_{(l,r)})}{V} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $V$  是车辆前行速度,  $\Omega = V/r_0$  为车轮名义滚动角速度,  $\psi_w$  是轮对摇头角位移。

为使计算得到的蠕滑力适用于任意蠕滑率值, 先应用 Kalker 线性蠕滑理论<sup>[13]</sup> 计算轮轨之间的接触斑蠕滑力, 然后采用沈氏蠕滑理论<sup>[14]</sup> 进行非线性修正, 最后将修正的接触斑蠕滑力通过坐标变换转换到轨道坐标系内<sup>[12]</sup>, 即可用于运动微分方程的建立。

## 1.3 法向力与轮缘力

直线轨道分析中, 假设左/右轮的法向力在垂向的分量  $N_{(l,r)z}$  平均分配且等于轴载荷的一半, 即

$$N_{(l,r)z} = 0.5W \quad (3)$$

式中  $W$  为轴载荷。

左/右轮法向力在横向的分量则可表示为

$$N_{(l,r)y} = \mp N_{(l,r)z} \tan(\delta_{(l,r)} \pm \phi_w) \quad (4)$$

在车辆运行过程中, 如果轮对的横移量超过轮缘间隙, 在轮缘与钢轨侧面之间还会有一个近似的横向接触, 称其为轮缘力。轮缘力一般用有死区的刚性弹簧来模拟<sup>[15]</sup>, 不考虑阻尼作用, 即可表达为一段线性函数形式

$$F_t(y_w) = \begin{cases} k_0(y_w - \eta) & y_w > \eta \\ 0 & |y_w| \leq \eta \\ k_0(y_w + \eta) & y_w < -\eta \end{cases} \quad (5)$$

式中  $k_0$  是弹性系数,  $\eta$  代表轮缘间隙大小。

## 1.4 转向架系统运动微分方程

考虑如图 1 所示包含有 1 个构架( $M_t, I_{tx}, I_{tz}$ )、2 个轮对( $M_w, I_{wx}, I_{wz}$ )等刚体和一系悬挂( $K_{px}, K_{py}, K_{pz}, C_{px}, C_{py}, C_{pz}$ )、二系悬挂( $K_{sx}, K_{sy}, K_{sz}, C_{sx}, C_{sy}, C_{sz}$ )的两轴转向架系统。除悬挂系统具有线弹性特性外, 其它部分都是刚性的, 假定整个系统不考虑轨道不平顺带来的影响, 车轮与钢轨自始至终保持接触并且在足够光滑, 水平的直钢轨上滚动。忽略转向架的垂向及点头运动, 只考虑它们的横移、侧滚和摇头运动<sup>[16]</sup>。因此, 整个转向架系统共有 7 个自由度, 主要包括: 2 个轮对的横移  $y_{wi}$  ( $i=1-2$ ) 和摇头  $\psi_{wi}$  运动; 构架的横移  $y_t$ 、侧滚  $\phi_t$  及摇头  $\psi_t$  运动。整个系统的运动微分方程组可以表示为

$$\begin{aligned} m_w \ddot{y}_{wi} &= -2K_{py}(y_{wi} - y_t \mp l_t \psi_t - h_{tw} \phi_t) + F_{lyi} + \\ &F_{ryi} - 2C_{py}(\dot{y}_{wi} - \dot{y}_t \mp l_t \dot{\psi}_t - h_{tw} \dot{\phi}_t) + \\ &N_{lyi} + N_{ryi} - F_{ti} \\ I_{wz} \ddot{\psi}_{wi} &= -2d_w^2 [K_{px}(\psi_{wi} - \psi_t) + C_{px}(\dot{\psi}_{wi} - \\ &\dot{\psi}_t)] + a_0 \psi_{wi} (F_{ryi} + N_{ryi} - F_{lyi} - N_{lyi}) + \\ &a_0 (F_{rxi} - F_{lxi}) + M_{lzi} + M_{rzi} - I_{wy} \dot{\phi}_w \Omega \\ m_t \ddot{y}_t &= 2K_{py}(y_{w1} + y_{w2} - 2y_t - 2h_{tw} \phi_t) + \\ &2C_{py}(\dot{y}_{w1} + \dot{y}_{w2} - 2\dot{y}_t - 2h_{tw} \dot{\phi}_t) - 2K_{sy}(y_t - \\ &h_{bt} \phi_t) - 2C_{sy}(\dot{y}_t - h_{bt} \dot{\phi}_t) \\ I_{tz} \ddot{\psi}_t &= 2l_t K_{py}(y_{w1} - y_{w2} - 2l_t \psi_t) + 2l_t C_{py}(\dot{y}_{w1} - \\ &\dot{y}_{w2} - 2l_t \dot{\psi}_t) + 2d_w^2 K_{px}(\psi_{w1} + \psi_{w2} - 2\psi_t) - \\ &2d_s^2 K_{sx} \psi_t + 2d_w^2 C_{px}(\dot{\psi}_{w1} + \dot{\psi}_{w2} - 2\dot{\psi}_t) + \\ &2d_s^2 C_{sx} \dot{\psi}_t \\ I_{tx} \ddot{\phi}_t &= 2h_{tw} K_{py}(y_{w1} + y_{w2} - 2y_t - 2h_{tw} \phi_t) - \\ &2d_s^2 K_{sz} \phi_t + 2h_{tw} C_{py}(\dot{y}_{w1} + \dot{y}_{w2} - 2\dot{y}_t - \\ &2h_{tw} \dot{\phi}_t) - 2d_s^2 C_{sz} \dot{\phi}_t + 2h_{bt} [K_{sy}(y_t - h_{bt} \phi_t) + \\ &C_{sy}(\dot{y}_t - h_{bt} \dot{\phi}_t)] + 2d_w^2 [K_{pz}(\phi_{w1} + \phi_{w2} - \\ &2\phi_t) + C_{pz}(\dot{\phi}_{w1} + \dot{\phi}_{w2} - 2\dot{\phi}_t)] \end{aligned} \quad (6)$$

式中下标  $i=1, 2$  分别代表转向架的前导轮对和后从轮对, 当  $i=1$  时,  $\mp$ 取上面的符号;  $i=2$  时  $\mp$ 取下面的符号。  $F_{(l,r)x}, F_{(l,r)y}, M_{(l,r)z}$  则是经过非线性修正且已转换到轨道坐标系的纵向、横向蠕滑力和

旋转蠕滑力矩.

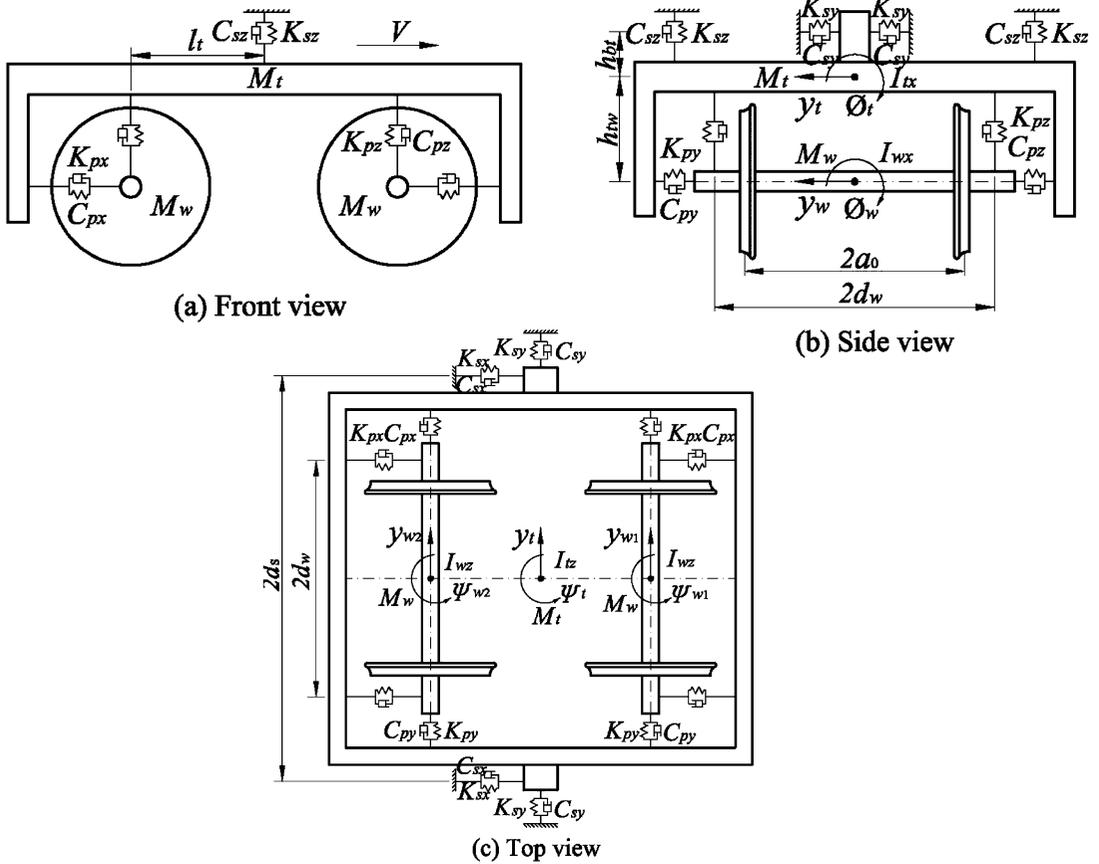


图1 两轴转向架横向稳定性分析模型  
Fig.1 Model of a two-axle railway bogie system

若令系统的状态向量为  $y^T = \{ \dot{y}_{w1}, \dot{y}_{w2}, \dot{\psi}_{w1}, \dot{\psi}_{w2}, \dot{y}_t, \dot{\psi}_t, \dot{\phi}_t, y_{w1}, y_{w2}, \psi_{w1}, \psi_{w2}, y_t, \psi_t, \phi_t \}$ , 则转向架系统的动力学问题可归结为如下形式的自治常微分方程组系统

$$\frac{dy}{dt} = f(y, V) \tag{7}$$

式中  $V \in R^+$  是系统控制参数, 此处即为转向架运行速度,  $f$  为系统状态向量函数.

## 2 对称轮轨系统“合成分岔图”原理

### 2.1 对称性分岔的定义

假设整个转向架系统中各个弹簧和阻尼是对称安装和布置的, 以及轮轨间的对称非线性轮轨接触力, 当将该系统置于理想平直的轨道上运行时, 整个系统是关于轨道中心线对称的. 并且轨道中心线所在的解就是该系统的定常解, 由此可以定义转向架系统的相空间为

$$R^{14} = \{ y | y \in R^{14} \} \tag{8}$$

转向架系统分岔行为分析中, 选择一个 Poin-

care 截面及其对称截面并分别构造相应的分岔图来说明系统的动力学行为. 分析中将 Poincare 截面定义为转向架构架横向速度为零, 横向位移非负的那个瞬时

$$\Pi_1 = \{ y \in R^{14} | \dot{y}_i = 0, y_i \geq 0 \} \tag{9}$$

与此同时, 定义  $R^{14}$  中的一个对称变换

$$R: y \mapsto -y \tag{10}$$

如果在上述变换下系统的解集是不变的, 则称为对称的解集, 对应于车辆系统的对称运动; 反之则称为不对称的解集, 对应于车辆系统的不对称运动<sup>[17]</sup>.

由分析可知, 与 Poincare 截面  $\Pi_1$  关于轨道中心线还存在另一个对称的 Poincare 截面, 将其定义为转向架构架横向速度为零, 横向位移非正的那个瞬时

$$\Pi_2 = \{ y \in R^{14} | \dot{y}_i = 0, y_i \leq 0 \} \tag{11}$$

### 2.2 “合成分岔图”原理

整个转向架系统肯定存在对称的运动形式, 也

有可能存在不对称的运动形式. 由于不对称运动会导致轮轨间强烈的相互作用和偏磨, 继而使左/右轮轨型面出现差异并导致不对称的轮轨接触关系和不对称的轮轨接触力, 影响车辆的正常使用并给安全运行带来危险隐患. 因此对称轮轨系统分岔行为的分析不只是确定系统处于周期运动还是混沌运动这一基本议题, 更要确定这些运动关于轨道中心线的对称性.

本文提出“合成分岔图”方法以识别对称轮轨系统运动关于轨道中心线的对称/不对称性, 其基本思路是, 通过定义对称轮轨系统对称性分岔的概念, 由数值积分得到系统的时间响应并建立对称轮轨系统的离散动态 Poincare 映射截面  $\Pi_1$  及其对称截面  $\Pi_2$  (例如式(9)和式(11)所确定的截面), 分别应用这两个截面建立 Poincare 映射可以得到两种不同的分岔图, 从这两种分岔图中的任何一个可以确定系统是作周期运动还是非周期运动, 但不能确定这些运动关于轨道中心线的对称性. 因此用不同的颜色将这两种分岔图关于轨道中心线叠合在一起(即通过式(10)将一部分解分支转换成其对称解分支), 如果由两种颜色所确定的解分支完全重合, 则基本可以说明系统作对称的运动; 如果由两种颜色所确定的解分支不完全重合, 则说明系统作不对称的运动.

需要说明的是, 如果是不对称运动形式, 如周期 1 不对称运动, 在“合成分岔图”上会出现不完全重合的两条线(两种颜色), 它代表周期 1 的不对称运动而不是一般分岔图上的周期 2 运动, 因此“合成分岔图”与普通分岔图需要在解的个数方面加以识别, 只能由其中的一种颜色的解分支来确定.

### 3 数值计算结果与分析

以某高速客车的转向架为分析对象来说明系统的分岔行为和混沌运动. 转向架系统中各刚体的质量值、刚度与阻尼系数以及长度和距离等参数的取值可参看文献[18]. 轮轨接触几何参数: 车轮踏面等效锥度  $\lambda = 0.056$ ; 轮对居中时的左/右轮轮轨接触角  $\delta_0 = 0.056$ , 轮对横移引起的接触角变化参数  $\varepsilon_0 = 0.0$ , 轮对侧滚角参数  $\sigma = 0.056$ . 轮轨接触力计算参数: 轮缘力刚性弹簧系数  $k_0 = 14.6 \times 10^7 \text{ N/m}$ , 轮轨间隙  $\eta = 9.1 \text{ mm}$ ; 蠕滑系数  $f_{11} = 6325.463 \times$

$10^3 \text{ N}$ ,  $f_{22} = 5707.858 \times 10^3 \text{ N}$ ,  $f_{23} = 14.420 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $f_{33} = 25.338 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ ; 轮轨粘着系数  $\mu = 0.15$ .

将基于切向量进行预测, 牛顿迭代法进行校正, 可逐步求解整个系统解分支曲线的延续算法<sup>[19]</sup>应用于转向架系统定常解和周期解的追踪和求解上, 并通过数值计算系统 Jacobi 矩阵的特征值和 Floquet 特征乘子来确定定常解分支和周期解分支的稳定性.

#### 3.1 定常运动与对称周期运动

图 2 是应用延续算法计算得到的运行速度作为控制参数与转向架前导轮对相对轨道的横向幅值分岔图, 其中实线代表稳定的运动, 而点线则代表不稳定的运动, 具体分析如下:

首先对转向架系统的定常运动进行说明: 当运行速度足够小时, 定常解是渐近稳定的, 以此点为初始点, 以小的步长逐渐增加运行速度, 定常解则会沿着分岔曲线 OAB 前进, 同时通过系统 Jacobi 矩阵特征值实部的正负来判别定常解的稳定性. 图中 OA 段是稳定的定常解, AB 段是不稳定的定常解. 点 A ( $V_A = 90.065 \text{ m/s}$ ,  $\alpha_{1,2} = 7.4921 \times 10^{-11} \pm 16.5807i$ ,  $\alpha_i$  代表系统 Jacobi 矩阵实部最大的特征值, 下同) 是系统 Hopf 分岔点, 此时有一对复共轭特征值正向穿越虚轴, 定常解因此而失去原有的稳定性.

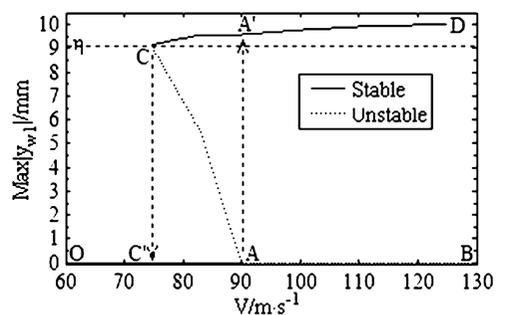


图 2 转向架前导轮对横向幅值分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagram showing the lateral amplitude of the leading wheel set of the railway bogie versus speed

其次对转向架系统的周期运动进行分析: 以 Hopf 分岔点 A 为初始点进行周期解的延续计算发现, 系统从点 A 处以亚临界的方式分岔出一不稳定的周期解 AC, 该周期解的幅值随着速度的减小而逐渐增加并在分岔点 C ( $V_C = 74.811 \text{ m/s}$ ,  $\max |y_c| = 9.1001 \text{ mm}$ ,  $T_c = 0.4517 \text{ s}$ ,  $\max$  代表该点前导轮对周期运动的幅值, 而  $T$  代表系统振动周期) 恢复了

稳定,此处由于前导轮对的大幅运动出现了轻微的轮缘接触.之后,随着运行速度的增加,稳定的周期解  $CD$  (对应于转向架系统稳定的蛇行运动) 幅值也继续增加直到点  $D$  ( $V_D = 125.03\text{m/s}$ ,  $\max|y_D| = 9.992\text{mm}$ ,  $T_D = 0.2564\text{s}$ ), 转向架系统在此速度范围内都作对称的运动.

### 3.2 超临界高速下不对称/对称分岔行为

在铁道车辆系统中,车辆的运行速度一般不会高于车辆的临界速度,但是从数学或者力学的角度,我们仍想探讨一下对类似的对称轮轨系统,是否在“极端”的速度下也会存在不对称的运动形式及其内在机理.

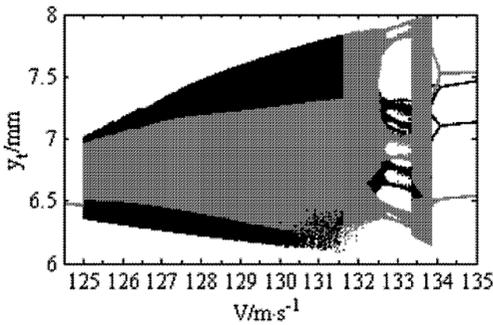


图3 转向架构架横向幅值分岔图(合成)  
Fig.3 Bifurcation diagram of the bogie frame  
(the resultant bifurcation diagram)

对本文所研究的对称转向架系统,为了反映出整个系统运动关于轨道中心线是否对称的特点,利用前面提出的“合成分岔图”方法,可得到如图3所示的合成的转向架构架横向幅值分岔图.图中黑色的部分为轨道中心线左边的分岔图,而红色的部分则代表轨道中心线右边变换到左边的分岔图.从中可以清晰的判断整个系统在不同速度区间的对称/不对称运动状态.同时,在绘制某个速度下 Poincare 截面投影图时,仍以  $\Pi_1$  为 Poincare 截面进行投影.

从图3中还可看出,当速度  $V < 125.03\text{m/s}$  时,分岔图由黑红两条线重合在一起的单一曲线组成,说明此时系统作周期1的对称运动.图4给出了速度  $V = 125.0\text{m/s}$  时的相轨线和功率谱图,其中相轨线图4(a)横坐标代表构架横向位移,纵坐标则代表转向架前导轮对横向位移.相轨线在该平面上的投影由一条闭曲线组成,说明系统做周期1运动.由图还可了解到周期运动中轮对与钢轨侧面的碰撞情况,在一个振动周期内,前导轮对与左边钢

轨侧面要连续碰撞两次后才会运动到轨道中心线的右边与右边钢轨侧面发生两次连续碰撞,与左右钢轨侧面的两次碰撞对应幅值是相等的.图4(b)的功率谱图横坐标表示频率,纵坐标则是构架横向位移的谱值.谱线是分立的和离散的一些峰值,包含了基频  $f_0 = 3.896\text{Hz}$  和其它阶次频率如  $3f_0, 5f_0$  等等,两图综合说明此时系统作周期1的对称运动.

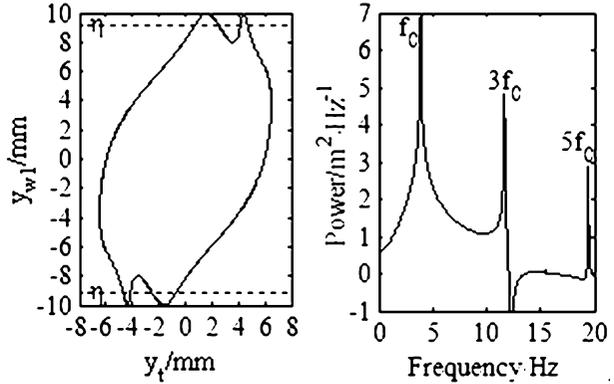


图4 速度  $V = 125.0\text{m/s}$  时相轨线及功率谱分析

Fig.4 Phase trajectories and power spectra for periodic motions at  $V = 125.0\text{m/s}$

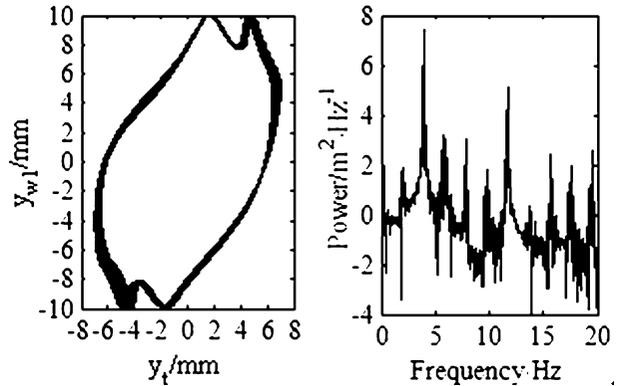


图5 速度  $V = 125.5\text{m/s}$  时相轨线及功率谱分析

Fig.5 Phase trajectories and power spectra for chaotic periodic motions at  $V = 125.5\text{m/s}$

由分岔图3还可见,当运行速度  $V > 125.03\text{m/s}$  时,分岔图由许多黑红两种颜色不完全重合的密集点组成,说明对称的周期吸引子突然消失,系统通过不可捉摸突变(a blue sky catastrophe)<sup>[17]</sup>而失去原有的对称性并进入不对称的混沌运动状态.图5给出了运行速度  $V = 125.5\text{m/s}$  时的相轨线及功率谱图.由图可见,相轨线图5(a)是有界和杂乱的,形如一扭曲折叠的宽带,实际形成了混沌吸引子;而功率谱图5(b)则是连续的,并且在顶峰周围出现了大量的分散带结构,两图初步说明此时系统

已处于混沌运动状态. 当然,说明混沌运动的最好例证是计算系统的 Lyapunov 指数. 图 6 给出了速度  $V = 125.5\text{m/s}$  时三个最大的 Lyapunov 指数随时间的收敛曲线,从图中可以看出,随着时间的不断延续,最大的指数趋于 0.25,次最大的指数趋于零,第三个指数则接近  $-0.27$ . 最大的 Lyapunov 指数大于零说明转向架系统在该速度下确实已处于混沌运动状态.

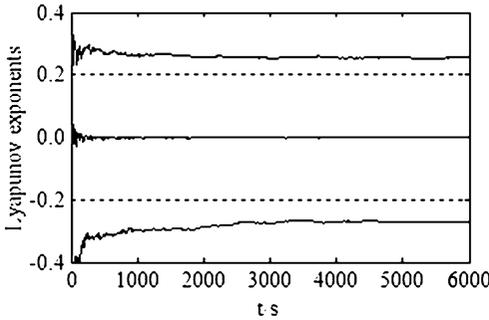


图 6 速度  $V = 125.5\text{m/s}$  时三个最大的 Lyapunov 指数随时间的收敛曲线,其中  $LE1 = 0.2544, LE2 = -0.0011, LE3 = -0.2729$

Fig. 6 Convergence of the three largest Lyapunov exponents with elapse of time at  $V = 125.5\text{m/s}$ ,  $LE1 = 0.2544, LE2 = -0.0011, LE3 = -0.2729$

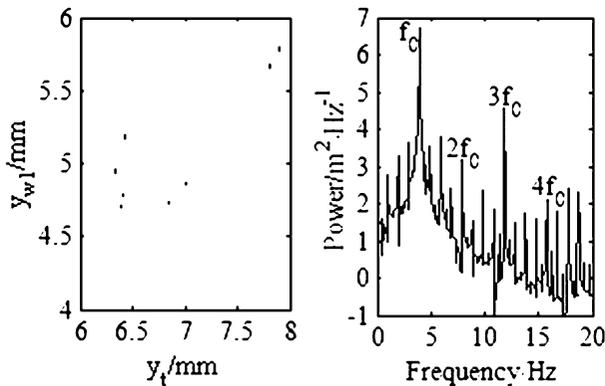


图 7 速度  $V = 133.0\text{m/s}$  时 Poincaré 映射图和功率谱图

Fig. 7 The projected Poincaré maps and power spectra for period 8 motion at  $V = 133.0\text{m/s}$

由分岔图 3 仍可见,随着运行速度的继续增加,混沌运动的带宽也逐渐增加,当运行速度达到  $V = 131.47\text{m/s}$  时,混沌运动的带宽由于内危机 (interior crisis) 出现一个突变. 轨道中心线左边构架的横向位移带宽突然减小,而右边的横向位移带宽则突然增大. 之后随着速度的增加,各自的新带宽也缓慢增大. 当转向架运行速度处于  $132.53\text{m/s} < V < 133.44\text{m/s}$  区间时,不对称的混沌吸引子消失,出现一个不对称的多周期窗口. 图 7 给出了转向架运行速度  $V = 133.0\text{m/s}$  时的 Poincaré 映射图

和功率谱图. 其中 Poincaré 映射图 7(a) 中有 8 个孤立的点,说明此时系统处于周期 8 运动状态;而功率谱图 7(b) 的谱线如图 4(b) 一样仍是分立和离散的尖峰,不同之处是这次谱线不但包含了基频  $f_0 = 3.933\text{Hz}$  和其它阶次频率如  $2f_0, 3f_0, 4f_0$  等,还包括了它的分频  $f_0/8, 2f_0/8, \dots, 7f_0/8$  等,只是在图中  $2f_0/8, 4f_0/8, 6f_0/8$  的谱线比较明显,其它几个分频不太明显而已.

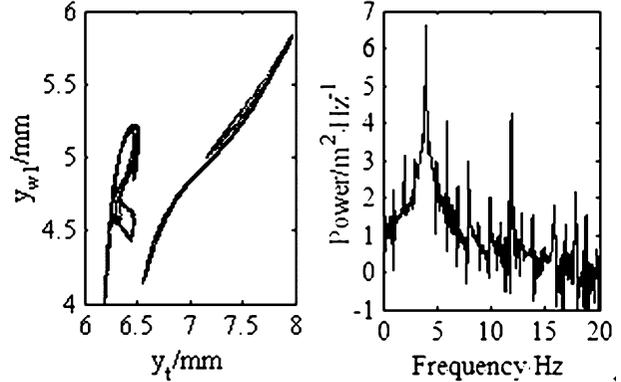


图 8 速度  $V = 133.6\text{m/s}$  时 Poincaré 映射图和功率谱图

Fig. 8 The projected Poincaré maps and power spectra for chaotic motions at  $V = 133.6\text{m/s}$

当运行速度超过  $133.44\text{m/s}$  时,不对称的周期吸引子突然消失,出现了不对称的混沌吸引子. 这可从图 8 运行速度  $V = 133.6\text{m/s}$  时 Poincaré 映射图和功率谱图得到确认. 其中图 8(a) 的 Poincaré 投影面上出现了由许多密集点组成的具有带状、无限嵌套、不同层次的内部结构;而图 8(b) 的功率谱图与图 5(b) 表现特征类似,都说明了混沌吸引子的存在.

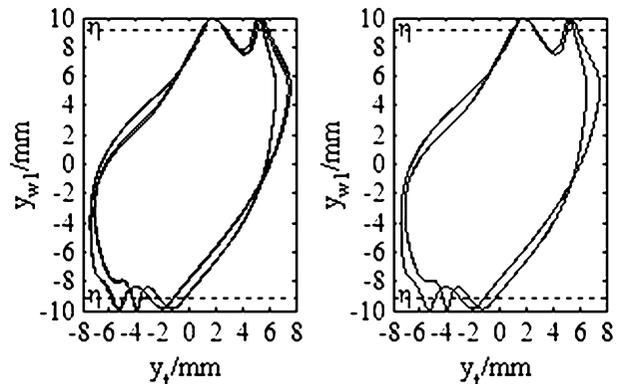


图 9 速度  $V = 134.0\text{m/s}$  和  $V = 134.2\text{m/s}$  时的相轨线

Fig. 9 Phase trajectories at  $V = 134.0\text{m/s}$  and  $V = 134.2\text{m/s}$

由分岔图 3 还可见,如果运行速度继续增加并超过  $V = 133.85\text{m/s}$  时,不对称的混沌吸引子又突

然消失了,继而出现一个速度大范围的不对称周期吸引子.该周期吸引子在速度  $V = 134.09\text{m/s}$  时首先经过一个逆的倍周期分岔从周期4轨道演变成周期2轨道.图9给出了该分岔点两侧运行速度分别为  $134.0\text{m/s}$  和  $134.2\text{m/s}$  时的相轨线,图9(a)速度  $V = 134.0\text{m/s}$  的相轨线在该平面上的投影由4条相交的闭曲线组成,而图9(b)速度  $V = 134.2\text{m/s}$  的相轨线中却只有两条,说明系统已经从周期4运动演变到周期2运动.

由本节分析可知,对称的转向架系统在一定的速度下还是存在不对称的运动,而应用“合成分岔图”方法得到的分岔图不仅可以确定系统运动形式和状态的变化,而且还可以确定这些运动的对称状态,使对系统的运动状态有了更加深入的理解.

## 4 结论

为了反映对称轮轨系统运动关于轨道中心线的对称/不对称状态,本文定义了对称轮轨系统对称性分岔的概念,提出“合成分岔图”的构造方法,由数值积分得到系统的时间响应并建立对称轮轨系统的离散动态 Poincare 映射截面及其对称截面,然后将通过 Poincare 截面和其对称截面构造的分岔图通过一定的方式叠合在一起.利用该方法构造的分岔图不仅可全面分析对称轮轨系统的实际运动形式及其演化过程,而且也可确定系统运动关于轨道中心线的对称/不对称运动状态.

以一两轴转向架系统为分析对象,应用“合成分岔图”法研究了对称的转向架系统运行于理想平直轨道上的对称/不对称分岔行为和混沌运动.发现系统存在着大量的对称与不对称运动形式,包括简单的单周期运动、倍周期运动和混沌运动.不同的运动形式之间以及对称形式之间的转变方式也不尽相同,系统的对称性刚开始是通过不可捉摸突变而破坏的.

## 参 考 文 献

- 1 Knothe K, Bohm F. History of stability of railway and road vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 1999, 31(5): 283 ~ 323
- 2 Zeng J, Wu P B. Stability analysis of high speed railway vehicles. *JSME International Journal, Series C*, 2004, 47(2): 464 ~ 470
- 3 True H. Dynamics of railway vehicles and rail/wheel contact. Dynamics analysis of vehicle systems; theoretical foundations and advanced applications. Udine, Italy, 2007, 75 ~ 128
- 4 Cooperrider N K. The hunting behavior of conventional railway trucks. *ASME Journal of Engineering and Industry*, 1972, 94: 752 ~ 762
- 5 Kaas-Petersen C, True H. Periodic, biperiodic and chaotic dynamical behavior of railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 1986, 15(6): 208 ~ 221
- 6 True H. Railway vehicle chaos and asymmetric hunting. *Vehicle System Dynamics*, 1992, 20(Supplement): 625 ~ 637
- 7 Jensen C N, Golubitsky M, True H. Symmetry, generic bifurcations, and mode interaction in nonlinear railway dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(7): 1321 ~ 1331
- 8 曾京. 车辆系统的蛇行运动分叉及极限环的数值计算. 铁道学报, 1996, 15(3): 13 ~ 18 (Zeng J. Numerical computations of the hunting bifurcation and limit cycles for railway vehicle system. *Journal of the China Railway Society*, 1996, 15(3): 13 ~ 18 (in Chinese))
- 9 Ahmadian M, Yang S P. Effect of system nonlinearities on locomotive bogie hunting stability. *Vehicle System Dynamics*, 1998, 29(6): 365 ~ 384
- 10 杨绍普, 申永军. 滞后非线性系统的分岔与奇异性. 北京: 科学出版社, 2003 (Yang S P, Shen Y J. Bifurcations and singularities in systems with hysteretic nonlinearity. Beijing: Science Press, 2003 (in Chinese))
- 11 Gao X J, Li Y H, Gao Q. Lateral bifurcation behavior of a four-axle railway passenger car. *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 2010, 77(6): 1 ~ 8
- 12 Petersen D E, Hoffmann M. Curving dynamics of railway vehicles. Informatics and Mathematical Modelling, The Technical University of Denmark, Lyngby, 2002
- 13 Kalker J J. A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact. *Vehicle System Dynamics*, 1982, 11(1): 1 ~ 13
- 14 Shen Z Y, Hedrick J K, Elkins J A. A comparison of alternative creep force models for rail vehicle dynamic analysis. Proceeding of 8th IAVSD Symposium on Vehicle System Dynamics, Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks. MIT, Cambridge: Swets and Zeitlinger, 1984, 591 ~ 605

- 15 Kaas-Petersen C. Chaos in a railway bogie. *Acta Mechanica*, 1986, 61(1-4): 89 ~ 107
- 16 Garg V K, Dukkipati R V. 沈利人翻译. 铁道车辆系统动力学. 成都: 西南交通大学出版社, 1998 (V K Garg, R V Dukkipati. Dynamics of railway vehicle systems. Academic Press, New York, 1984)
- 17 Nayfeh A H, Balachandran B. Applied nonlinear dynamics, analytical, computational, and experimental methods. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995
- 18 翟婉明. 车辆-轨道耦合动力学. 2nd ed., 北京: 中国铁道出版社, 2002 (Zhai W M. Vehicle-track coupling dynamics. 2nd ed., Beijing: China Railway Publishing House, 2002(in Chinese))
- 19 Doedel E J. Auto-07P: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations; California Institute of Technology, 2008

## THE "RESULTANT BIFURCATION DIAGRAM" METHOD FOR SYMMETRIC WHEEL-RAIL SYSTEM \*

Gao Xuejun<sup>1†</sup> Li Yinghui<sup>2</sup> Yue Yuan<sup>2</sup>

(1. College of Environment and Civil Engineering, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

(2. School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract** The concept of symmetric bifurcation for symmetric wheel-rail system was defined. Thus, the time response can be achieved by the numerical integration method, and an unfixed and dynamic Poincare section and its symmetric section for symmetric wheel-rail system were established. Then the 'resultant bifurcation diagram' method was constructed. The method was used to study the symmetric/asymmetric bifurcation behaviors and chaotic motions of a two-axle railway bogie running on an ideal straight and perfect track. The results indicate that a lot of symmetric motions and plenty of asymmetric motions exist in the symmetric railway bogie system within the investigated speed range. In addition, the rule of symmetry breaking in the system is through a blue sky catastrophe in the beginning.

**Key words** wheel-rail system, the 'resultant bifurcation diagram' method, symmetry/asymmetry, bifurcation