

一类旋转弹在高空中的锥形运动稳定性*

李克勇¹ 赵良玉^{1,2†} 周伟¹

(1. 北京理工大学宇航学院, 北京 100081) (2. 飞行器动力学与控制教育部重点实验室(筹), 北京 100081)

摘要 为揭示弹箭在高空飞行过程中由于重力持续作用产生大攻角的物理本质, 建立了弹道平面内时变参数的弹体运动数学模型, 并推导了弹体在高空飞行段的攻角响应方程. 同时, 为了分析弹道顶点附近锥形运动的稳定性, 综合考虑弹体姿态运动和位移运动建立了旋转弹锥形运动的动力学模型. 针对大攻角引起显著气动非线性效应的情况, 采用李雅普诺夫一级近似方法, 给出了弹道顶点附近弹体锥形运动的稳定判据, 并通过数值仿真验证了其正确性.

关键词 旋转弹, 锥形运动, 复攻角, 气动非线性, 李雅普诺夫方法

引言

在弹箭类飞行器的总体设计过程中, 不仅要考虑最大射程、射击精度等战术要求, 其射程覆盖范围(即最小射程和最大射程的跨度)也是重点考虑的指标之一. 对于常规的弹箭类飞行器来说, 其射程随发射角度的变化而变化, 在某一个临界角度(一般在 60° 左右)发射时达到最大射程, 在射角小于这个临界角度时射程单调递增, 大于这个临界角度时射程单调递减(如图 1 所示). 在无控情况下,

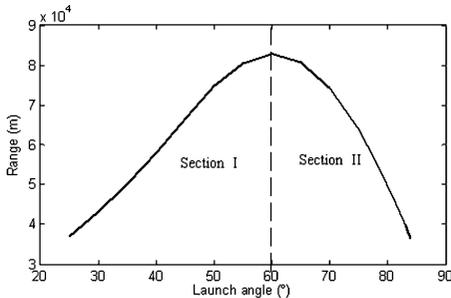


图 1 弹箭射程随射角变化的一般规律

Fig. 1 Ranges of a rocket with different launch angles

忽略加工制造误差和其它随机干扰因素的影响, 发射角的大小基本上决定了弹箭的飞行轨迹及其弹道特性. 小射角情况下(图 1 中的范围 I), 弹道高度跨度较小, 气动环境变化较平缓, 其缺点是较难保证对地攻击的落角要求; 大角度发射情况(图 1 中的范围 II)与小角度发射相反, 弹道高度跨度大, 整个飞行过程中气动环境变化明显, 其显著优点是

末段落角较大, 利于对地攻击. 对于侵彻型弹箭, 如何在给定射程覆盖范围内达到指定的落角要求是弹道设计的关键问题之一. 因此, 有必要研究弹体在高空飞行段的运动性态, 揭示气动环境变化对弹体运动的影响规律, 建立弹体稳定飞行的极限条件.

对于一类低速旋转弹, 其锥形运动及锥形运动的稳定条件一直是研究的热点和难点. 旋转弹箭的锥形运动主要由惯性陀螺效应和气动马格努斯效应引起, 一般有全攻角和复攻角两种数学描述方法, 在国内外现有文献中, 采用复攻角方法对滚转弹的运动及稳定性进行研究的较多. 研究成果主要是通过分析弹体的姿态运动特性得到的, 即将弹体运动分为长周期运动(质心位移运动)和短周期运动(姿态运动), 并将弹体绕质心的姿态运动近似为攻角运动, 这样的锥形运动稳定性研究方法对低空弹道较为有效^[1,2].

一般来说, 在大射角发射情况下, 弹道顶点所处空域较高, 弹体的气动环境较低空已经发生明显变化. 由于高空气动力矩显著减小, 弹体的摆动运动不再能够快速收敛, 将弹体运动分为长、短周期运动的方法暴露出一定的局限性; 弹体在重力的持续作用下, 速度矢量不断偏转, 而高空较小的气动力(主要指升力)和气动力矩(主要指恢复力矩)不能保证弹轴快速的跟踪速度矢量的变化, 进而诱导产生较大的攻角^[3,4]; 大攻角飞行使得气动非线性效应突出, 可能会引起弹道顶点附近弹体锥形运动

2012-04-10 收到第 1 稿, 2012-06-21 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10972034)

† 通讯作者 E-mail: zhaoly@bit.edu.cn

的发散. 基于以上考虑, 本文以一类大角度发射的低速旋转火箭弹为背景, 以揭示弹箭高空飞行过程中大攻角产生的物理本质为出发点, 在综合考虑弹体姿态运动和位移运动的基础上, 建立了描述旋转弹锥形运动的数学模型. 并针对弹道顶点附近大攻角引起的显著气动非线性问题, 给出了弹体锥形运动稳定的判别方法.

1 高空重力作用下的攻角运动

某旋转火箭弹在高空飞行段(大于30km)攻角运动的数值仿真结果图2所示.

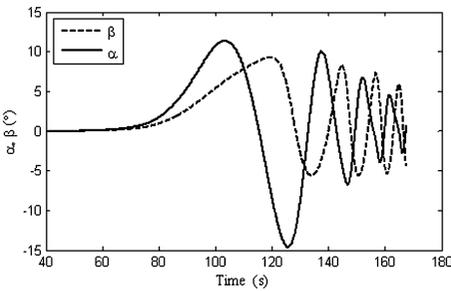


图2 某旋转火箭弹攻角运动曲线

Fig. 2 Angular motions of a spinning rocket

分析图2中攻角 α 和侧滑角 β 变化曲线, 在弹道升弧段, 攻角不断增大, 同时由于自旋产生的面外力矩作用, 侧滑角也跟随攻角不断增大; 在弹道顶点附近, 弹轴与速度矢量的夹角达到最大; 在降弧段, 弹体呈现逐渐收敛的锥形运动.

由于攻角 α 描述的是弹体在铅垂面内的运动, 是重力持续扰动作用的直接体现, 而侧滑角则是由于攻角诱导的面外力矩引起的. 为简化研究, 揭示高空中弹体的运动性态, 将弹体运动分解为纵向运动和侧向运动, 并针对纵向运动展开研究. 弹体的纵向运动方程组为

$$\begin{cases} m\dot{V} = -QSC_D(\alpha) - mg\sin\theta \\ m\dot{V}\dot{\theta} = QSC_L(\alpha) - mg\cos\theta \\ I_1\dot{\omega}_z = QSLC_{M_s}(\alpha) - QSLC_{M_\omega}(\omega_z L/V) \\ \dot{\vartheta} = \omega_z \\ \dot{x} = V\cos\theta \\ \dot{y} = V\sin\theta \\ \alpha = \vartheta - \theta \end{cases} \quad (1)$$

式中 $Q = \rho V^2/2$ 为动压, ϑ 和 θ 分别为俯仰角和弹道倾角. 进而可得攻角运动方程

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{QSC'_L}{mV}\dot{\alpha} - \frac{QSLC'_{M_s}}{I_z}\alpha = -\frac{VSC_L}{2m}\dot{\rho} - \frac{\rho SC_L}{2m}\dot{V} - \\ \frac{g\cos\theta}{V^2}\dot{V} - \frac{g\sin\theta}{V}\dot{\theta} - \frac{\cos\theta}{V}\dot{g} - \frac{QSLC'_{M_\omega}}{I_z}\left(\frac{\omega_z L}{V}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

分析方程(2), 先考虑方程右边各项, 首先第一项 $\frac{VSC_L}{2m}\dot{\rho}$ 和第五项 $-\frac{\cos\theta}{V}\dot{g}$ 表征高度变化的扰动作用. 在30km~50km的高空, 大气密度 ρ 与高度的函数近似为(根据U. S. 1976标准大气拟合)

$$\begin{aligned} \rho = 5.57 \times 10^{11} y^2 - 5.32 \times 10^{-6} y + 0.1238 \\ \dot{\rho} = (1.112 \times 10^{-10} y - 5.23 \times 10^{-6}) \dot{y} \approx \\ 10^{-(5-6)} V \sin\theta \end{aligned}$$

将上式代入 $-\frac{VSC_L}{2m}\dot{\rho}$ 并考虑到 ρ 的量级在 $10^{-(2-3)}$, 可得

$$-\frac{VSC_L}{2m}\dot{\rho} \approx \frac{\rho V^2 SC_L}{2m} \sin\theta \times 10^{-3} \quad (3)$$

重力加速度与高度的函数关系为

$$\begin{aligned} g = g_0 (R_e^2 / (R_e + y)^2) \\ \dot{g} = (g / (R_e + y)) \dot{y} \end{aligned}$$

将上式代入 $-\frac{\cos\theta}{V}\dot{g}$ 并整理可得

$$-\frac{\cos\theta}{V}\dot{g} = -\frac{g\cos\theta\sin\theta}{R_e + y} \quad (4)$$

第二项和第三项表征速度变化的扰动作用, 可合写成 $-\frac{1}{mV^2}(QSC_L + mg\cos\theta)\dot{V}$, 由于高空中空气动力作用明显小于重力作用, 故有

$$-\frac{1}{mV^2}(QSC_L + mg\cos\theta)\dot{V} \approx -\frac{g\cos\theta}{V^2}\dot{V} \approx \frac{g^2\cos\theta\sin\theta}{V^2} \quad (5)$$

严格意义上第四项和第五项分别表征弹体速度摆动和弹轴摆动的阻尼作用, 而非扰动, 为了形式上的统一, 广义上将其作为扰动看待, 第四项 $-\frac{g\sin\theta}{V}\dot{\theta} \approx \frac{g^2\cos\theta\sin\theta}{V^2}$, 第五项气动阻尼力矩量级较小, 可忽略. 综合上述分析, 由于式(3)和式(4)较式(5)相比为小量, 故方程右侧近似等于 $2\frac{g^2\cos\theta\sin\theta}{V^2}$.

令 $r(t) = 2\frac{g^2\cos\theta\sin\theta}{V^2}$, 则 $r(t)$ 表征了由重力决定的速度和弹道倾角变化对攻角运动的时变扰动

作用,其在高空段的变化曲线如图3所示。

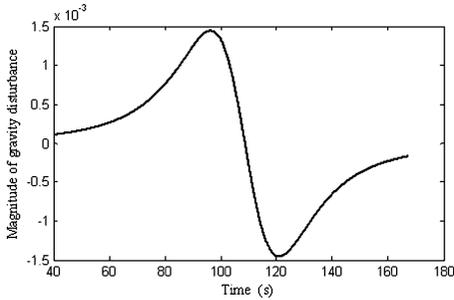


图3 重力扰动作用曲线

Fig. 3 Variation of gravity disturbance

再考虑方程左边, $\ddot{\alpha} + a(t)\dot{\alpha} + b(t)\alpha$, 其中 a

$$a(t) = \frac{QSC'_L}{mV}, b(t) = -\frac{QSLC'_M_s}{I_z}$$

为时变系数, $a(t)$ 表征升力的阻尼作用, $b(t)$ 表征恢复力矩的作用, 决定了系统的响应频率。

时变系数二阶线性系统

$$\ddot{\alpha} + a(t)\dot{\alpha} + b(t)\alpha = r(t) \quad (6)$$

系统的阻尼 $\xi = \frac{a(t)}{2\sqrt{b(t)}}$, 阻尼振荡频率 $\omega_d =$

$\sqrt{b(t) - a^2(t)/4}$, 系统单位阶跃响应的上升时间 $t_r = [\pi - \cos^{-1}\xi]/\omega_d$. 若扰动输入信号的斜率 $\dot{r}(t)$ 大于系统的响应速度 $1/t_r$, 则攻角呈单调递增变化对应的是高空弹道升弧段; 若扰动输入信号的斜率 $\dot{r}(t)$ 小于系统的响应速度 $1/t_r$, 则攻角呈振荡变化对应的是高空弹道降弧段。

2 锥形运动建模

根据上述分析, 由于高空气动力和气动力矩显著减小, 弹体的摆动运动不再能够快速收敛, 使得由于重力作用引起的速度矢量偏转成为攻角运动的主要成因. 因此, 传统上将弹体运动分为长、短周期运动, 并以短周期运动代替攻角运动的方法不再适用. 为合理描述旋转弹在高空的锥形运动状态, 下面将建立综合考虑弹体姿态和速度矢量变化的锥形运动数学模型。

为简化分析, 不失一般性, 假设弹体惯性轴对称, 即 $I_y = I_z = I_t$, 其他交叉转动惯量为0; 气动轴对称, 即俯仰和偏航方向的气动特性完全相同; 在弹道顶点附近, 弹体的速度大小近似不变, 转速大小基本不变. 从而可得旋转弹高空运动的动力学方程组为:

$$\begin{cases} I_t \ddot{\vartheta} - I_x \dot{\gamma} \dot{\phi} = QSLC_{M_s}(\alpha) - QSLC_{M_\mu}(\beta) - \\ \quad QSLC_{M_\omega}(\dot{\vartheta}L/V) \\ I_t \ddot{\phi} + I_x \dot{\vartheta} \dot{\phi} = QSLC_{M_s}(\beta) + QSLC_{M_\mu}(\alpha) - \\ \quad QSLC_{M_\omega}(\dot{\phi}L/V) \\ m\dot{V}\dot{\theta} = QSC_L(\alpha) - QSC_{F_\mu}(\beta) \\ mV\dot{\varphi} = QSC_L(\beta) + QSC_{F_\mu}(\alpha) \\ \alpha = \vartheta - \theta \\ \beta = \phi - \varphi \end{cases} \quad (7)$$

式中 ϕ 和 φ 分别为偏航角和弹道偏角, $C_{M_\mu}(\beta)$ 表示马格努斯力矩系数, $C_{F_\mu}(\beta)$ 表示马格努斯力系数。

显然, 由式(7)可以描述导弹攻角和侧滑角的运动轨迹, 同时由于陀螺力矩效应和马格努斯效应引起的交叉耦合, 弹体将呈现锥形运动状态。

3 考虑气动非线性的稳定性分析

第1节中的分析表明, 由于高空中空气动力作用较小, 在重力的持续扰动作用下, 导弹在弹道顶点附近将出现较大的攻角. 大攻角飞行存在严重的气动非线性问题, 并可能导致弹体锥形运动发散, 因此, 本节将针对考虑气动非线性情况的锥形运动稳定进行分析, 并给出稳定性条件。

3.1 锥形运动稳定性条件

根据一般空气动力学理论方法, 考虑气动非线性的各气动力和气动力矩系数可写成如下形式,

$$\text{升力系数: } C_L(\alpha) = C'_L \alpha (1 + k_L \alpha^2)$$

$$\text{马格努斯力系数: } C_{F_\mu}(\alpha) = C''_{F_\mu} \left(\frac{\dot{\gamma}d}{V} \right) \alpha (1 + k_{F_\mu} \alpha^2)$$

$$\text{静稳定力矩系数: } C_{M_s}(\alpha) = C'_{M_s} \alpha (1 + k_{M_s} \alpha^2)$$

$$\text{马格努斯力矩系数: } C_{M_\mu}(\alpha) = C''_{M_\mu} \left(\frac{\dot{\gamma}d}{V} \right) \alpha (1 + k_{M_\mu} \alpha^2)$$

$$\text{阻尼力矩系数: } C_{M_\omega}(\dot{\vartheta}L/V) = C'_{M_\omega} \left(\frac{\dot{\vartheta}L}{V} \right) (1 + k_{M_\omega} \alpha^2)$$

则弹体动力学方程式(7)可写成

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} &= b_{11}\alpha(1 + k_{M_s}\alpha^2) + b_{12}\beta(1 + k_{M_\mu}\beta^2) + \\ & b_{21}\dot{\phi} + b_{22}\dot{\vartheta}(1 + k_{M_\omega}\alpha^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= b_{11}\beta(1 + k_{M_s}\beta^2) - b_{12}\alpha(1 + k_{M_\mu}\alpha^2) - \\ & b_{21}\dot{\vartheta} + b_{22}\dot{\phi}(1 + k_{M_\omega}\beta^2) \end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = a_1\alpha(1 + k_L\alpha^2) + a_2\beta(1 + k_{F_\mu}\beta^2)$$

$$\dot{\varphi} = a_1\beta(1 + k_L\beta^2) - a_2\alpha(1 + k_{F_\mu}\alpha^2)$$

$$\alpha = \vartheta - \theta$$

$$\beta = \phi - \varphi \quad (8)$$

$$\text{式中 } b_{11} = \frac{QSL}{I_t} C'_{Ms}, b_{12} = -\frac{QSL}{I_t} C''_{M\mu} \left(\frac{\dot{\gamma}d}{V} \right), b_{21} = \frac{I_x}{I_t} \dot{\gamma},$$

$$b_{22} = -\frac{QSL}{I_t} C'_{M\omega} \left(\frac{L}{V} \right), a_1 = \frac{QS}{mV} C'_{L}, a_2 = -\frac{QS}{mV} C''_{F\mu} \left(\frac{\dot{\gamma}d}{V} \right).$$

取状态变量

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\alpha \ \beta \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T \quad (9)$$

则上述非线性微分方程可写成

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (10)$$

系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ 为连续时间非线性时不变系统, 该系统在一般情况下存在唯一的平衡点 $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

利用 Lyapunov 一级近似方法^[5,6] 求解系统在平衡点附近的稳定性. 将系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处展开, 令 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = (\partial f_i / \partial x_j)$, 则可得系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & 1 & 0 \\ a_2 & -a_1 & 0 & 1 \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} & b_{21} \\ -b_{12} & b_{11} & -b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

此时系统可表示为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, 系统的 Lyapunov 渐近稳定条件为特征方程 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ 的所有根满足 $Re(\lambda_i) < 0 (i = 1, 2, 3, 4)$. 通过 Routh - Hurwitz 判据可得系统稳定性条件为

$$\begin{cases} a_1 - b_{22} > 0 \\ (a_1 - b_{22})^2 (b_{11} - b_{21}a_2 + b_{22}a_1) + (a_1 - b_{22})(a_2 - b_{21})(b_{12} + b_{21}a_1 + b_{22}a_2) - (b_{12} + b_{21}a_1 + b_{22}a_2)^2 > 0 \end{cases} \quad (12)$$

需要说明的是, 虽然 Lyapunov 一级近似方法只能判定在平衡点附近的运动稳定性, 但对于本文研究的问题, 攻角只在 0 附近的一定范围内运动, 因此, 采用该方法得出的系统稳定性条件是合理的. 通过式 (12) 可以判定考虑气动非线性情况下的旋转弹锥形运动稳定性.

3.2 数值仿真验证

表 1 给出了某大角度发射低速旋转火箭弹在弹道顶点附近的主要动力学参数.

根据表 1 中的参数, 通过系统稳定性条件式 (12) 判定可知, 此时系统是稳定的. 假设导弹的初始扰动位置 $\alpha_0 = 10^\circ, \beta_0 = 6^\circ$, 其锥形运动曲线如图 4 所示, 锥形运动逐渐收敛.

表 1 主要动力学参数

Table 1 Dynamics parameters of a rocket

Para.	Value	Para.	Value
y/km	50	$\dot{\gamma}/\text{rads}^{-1}$	9.6
V/ms ⁻¹	192	$C'_{M\omega}, k_{M\omega}$	5.778, 1.80
C'_{L}, k_L	10.03, 8.91	C'_{Ms}, k_{Ms}	0.659, 5.66
$C''_{F\mu}, k_{F\mu}$	1.103, 13.5	$C''_{M\mu}, k_{M\mu}$	0.536, 14.8

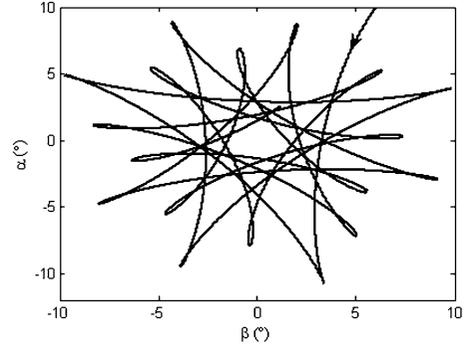


图 4 收敛的锥形运动曲线

Fig. 4 Stable coning motion

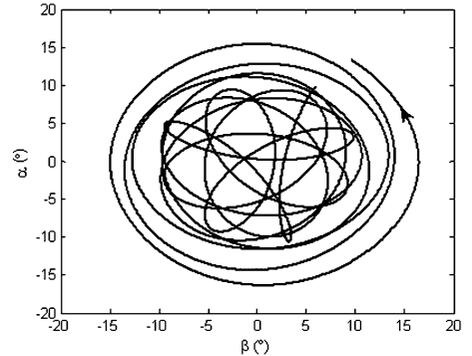


图 5 发散的锥形运动曲线

Fig. 5 Unstable coning motion

若将表 1 中马格努斯力矩系数导数 $C''_{F\mu}$ 增大 10 倍, 则同样利用系统稳定性条件式 (12) 可判定此时系统不稳定, 将出现锥形运动发散的情况, 如图 5 所示.

4 结论

对一类采用大角度发射的低速旋转弹的高空运动性态进行了研究, 在高空飞行过程中 (飞行高度大于 30km), 空气动力作用明显减弱, 弹道升弧段的攻角运动响应速度小于重力扰动梯度, 导致在弹道顶点附近出现比较大的攻角; 针对高空飞行的特点, 建立了旋转弹锥形运动的数字模型; 利用 Lyapunov 一级近似方法, 推导了考虑气动非线性条件下的旋转弹锥形运动稳定条件, 为研究该类型

飞行器在弹道顶点附近的飞行动态稳定性提供了依据. 数值仿真结果显示, 得到的稳定性判定条件是适用的.

研究成果有助于分析旋转火箭在高空飞行时的动力学特性, 可以为工程设计人员提供理论指导, 同时为研究考虑气动非线性等因素的旋转火箭动稳定性问题累积基础.

参 考 文 献

- 1 韩子鹏. 火箭外弹道学. 北京: 北京理工大学出版社, 2008: 127 ~ 201 (Han Z P. Rocket External Ballistics. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2008: 127 ~ 201 (in Chinese))
- 2 闫晓勇. 旋转弹动态稳定性与控制研究[博士学位论文]. 北京: 北京理工大学, 2010 (Yan X Y. Dynamic stability and control of spinning missiles [PhD Thesis]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2010 (in Chinese))
- 3 Murphy C H. Gravity-induced angular motion of a spinning missile. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1971, 8(8): 824 ~ 828
- 4 Murphy C H. Instability of controlled projectiles in ascending or descending flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1981, 4(1): 66 ~ 69
- 5 Mao X, Yang S, Xu Y. Coning motion stability of wrap around fin rockets. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2007, 50(3): 343 ~ 350
- 6 Khalil H K. 非线性系统. 朱义胜等, 译. 第3版. 北京: 电子工业出版社, 2011: 73 ~ 121 (Khalil H K. Non-linear systems. Zhu Y S, etc. trans. 3rd. Beijing: Publishing House of Electronics industry, 2011: 73 ~ 121 (in Chinese))

STABILITY OF CONING MOTION OF SPINNING ROCKET PROJECTILES AT HIGH ALTITUDE *

Li Keyong¹ Zhao Liangyu^{1,2†} Zhou Wei¹

(1. School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(2. Key Laboratory of Dynamics and Control of Flight Vehicle, Ministry of Education, Beijing 100081, China)

Abstract To explore the reason for appearance of large angle of attack at the apogee of trajectory in mathematics, the kinematic equations of a representative spinning rocket in vertical plane is established, and the response of angle of attack with the time-variant coefficients is further obtained mathematically. Considering the motion of attitudes and mass of centre jointly, dynamics equations of coning motion of the rocket projectile with low rotation rate and large launch angle is established. Taking aerodynamic nonlinearities induced by the large angle of attack into account, stability limits of coning motion near the top of the trajectory is derived by the Lyapunov indirect method.

Key words spinning rocket projectile, coning motion, complex angle of attack, aerodynamic nonlinearity, Lyapunov method