

# 一类大展弦比机翼非线性模型的稳定性与分岔\*

周良强<sup>1†</sup> 陈芳启<sup>1</sup> 葛鹏<sup>2</sup>

(1. 南京航空航天大学理学院, 南京 210016) (2. 北京强度环境研究所, 北京 100076)

**摘要** 结合材料力学中曲率的概念, 利用格罗斯曼理论计算气动力, 应用拉格朗日方程建立了一类大展弦比机翼的非线性动力学模型. 对该模型进行了无量纲化处理, 利用第一李雅普诺夫量研究了该系统由稳态平衡解向 Hopf 分岔解(颤振运动)演化的临界条件和路径, 以及系统发生 benign 颤振(超临界)、catastrophic 颤振(次临界)的识别条件. 利用规范性理论、Hopf 分岔定理研究了模型的颤振行为, 并研究了不同大展弦比对颤振速度的影响. 数值模拟验证了理论分析的结果.

**关键词** 大展弦比机翼, 颤振, 稳定性, 分岔

## 引言

近年来, 高空长航时飞机受到越来越多的重视, 这类飞机在长期侦查监控、环境检测和通讯中继等方面具有广阔的发展前景, 其具有展弦比大、柔性大等特点. 因此对大展弦比机翼的动力学行为进行深入地研究具有重要的理论与实际意义.

在大展弦比机翼的动力学研究上, 任智毅等<sup>[1]</sup>根据机翼气动载荷和机翼弹性变形之间存在的关系, 以机翼的总升力不变和结构强度作为约束条件, 提出一种新的气动/结构耦合的刚度设计方法. 赵常等<sup>[2]</sup>将旋翼气动建模思想引入大展弦比固定翼, 对旋翼飞行器 UMARC 理论中直升机旋翼空气动力建模方法进行适当改进, 建立适应机翼较大变形情况下的空气动力学模型. 田坤簧等<sup>[3]</sup>基于 Hamilton 变分原理, 建立了具有几何非线性特点的大展弦比直机翼的自由运动方程. 谢长川等<sup>[4]</sup>应用气动弹性分析理论和方法, 对复合材料大展弦比机翼进行了结构有限元建模、模型修正、固有振动特性计算、部件发散与颤振工程分析. 赵永辉等<sup>[5]</sup>建立了大展弦比夹心翼弯扭耦合模态的解析解, 用时域法进行了大展弦比夹心翼的大攻角颤振分析, 研究结果表明颤振速度随翼根攻角的增加而迅速减少, 复合层的铺设方式对颤振速度影响很大. 谢长川等<sup>[6]</sup>应用“准模态法”分析了结构非线性对大展

弦比机翼振动的影响, 研究结果表明大展弦比柔性机翼在飞行载荷作用下发生较大的翼尖变形, 且对结构刚度产生较大影响. 刘湘宁、向锦武等<sup>[7]</sup>研究了大展弦比复合材料机翼在较大迎角下的失速颤振特性. 杨仕福等<sup>[8]</sup>研究了多操纵面大展弦比机翼的建模方法和鲁棒颤振控制方法的设计问题. 通过仿真结果表明控制器能够有效控制有不确定参数的大展弦比机翼气动弹性颤振, 提高颤振临界速度. Tang 和 Dowell<sup>[9-10]</sup>结合理论和实验研究的方法, 研究了大展弦比机翼的颤振预测, 极限环振荡性质和突风响应等问题.

本文结合材料力学中曲率的概念, 利用格罗斯曼理论计算气动力, 应用拉格朗日方程建立了一类大展弦比机翼的非线性动力学模型, 并利用规范性理论、Hopf 分岔定理、第一李雅普诺夫量研究了模型的颤振行为.

## 1 模型的建立

对于大展弦比机翼, 机翼的变形可以用弹性轴的弯曲  $\omega(y, t)$  和弦向剖面绕弹性轴的扭转  $\beta(y, t)$  来表示, 即:

$$h(x, y, t) = \omega(y, t) + r(x)\beta(y, t) \quad (1)$$

其中  $h$  为平直机翼任意一点的变形, 向上为正;  $r$  为从弹性轴量起的弦向距离, 以顺气流方向向后为正; 以向上为正;  $\beta$  以前缘抬头为正.

2012-04-10 收到第 1 稿, 2012-06-13 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11172125, 10972099, 11202095), 中国博士后基金资助项目(20110491419)和南京航空航天大学青年科创基金项目(NS2012061)

† 通讯作者 E-mail: zlxqex@sina.com

机翼的第  $j$  阶固有振型  $h_j(x, y)$  也可以表示为弹性轴的弯曲  $\omega_j(y)$  以及绕弹性轴的扭转  $\beta_j(y)$ , 即:

$$h_j(x, y) = \omega_j(y) + r(x)\beta_j(y) \quad (2)$$

把机翼在垂直方向的运动位移用  $n$  个固有振型叠加组成, 则

$$h(x, y, t) = \sum_{i=1}^n [\omega(y) + r(x)\beta(y)] \varepsilon_j(t)$$

机翼的动能为

$$T = \frac{1}{2} \iint \gamma(x, y) [h(x, y, t)]^2 dx dy = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j \dot{\varepsilon}_j^2$$

其中  $\gamma(x, y)$  表示机翼单位面积质量;  $S$  表示机翼面积.

$$M_j = \int_0^l [m\omega_j^2(y) + 2S_\alpha\omega_j(y)\beta_j(y) + I_\alpha\beta_j^2(y)] dy$$

其中  $l$  为半展长,  $m, S_\alpha, I_\alpha$  分别表示单位展长机翼的质量、对弹性轴的质量静矩及惯矩.

机翼的势能为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j p_j^2 \varepsilon_j^2$$

上式中  $p_j$  表示第  $j$  阶固有频率.

把以上动能、势能代入拉格朗日方程, 由此可得运动方程

$$M_j \ddot{\varepsilon}_j + M_j p_j^2 \varepsilon_j = Q_j (j=0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

对于大展弦比直机翼, 在没有较大的集中质量情况下, 可以用与第一阶纯弯振型  $f(y)$  及第一阶纯扭振型  $\phi(y)$  相联系的  $\omega(t)$  和  $\beta(t)$  作为两个广义坐标, 此时动能为

$$T = \frac{1}{2} \iint \gamma(x, y) [f(y)\dot{\omega} + r(x)\phi(y)\dot{\beta}(t)]^2 dx dy = \frac{1}{2} (c_{11}\dot{\omega} - 2c_{12}\dot{\omega}\dot{\beta} + c_{22}\dot{\beta}^2)$$

势能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(\kappa(y))^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^l GJ \left( \frac{\partial \beta(y, t)}{\partial y} \right)^2 dy$$

式中  $\kappa(y)$  表示曲率, 由于大展弦比机翼是柔性机翼, 有相对较大的变形, 故曲率表达式为

$$\kappa(y) = \omega^*(y, t) [1 + (\omega'(y, t))^2]^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

设由弯曲变形而引起的横截面的转角为  $\theta$ , 其值是一个相对较小的量, 故可近似认为

$$\tan\theta = \frac{\partial \omega(y, t)}{\partial y} = \omega'(y, t) \approx \theta \quad (5)$$

从而曲率可表示为

$$\kappa(y)\omega^*(y, t) [1 + (\tan\theta)^2]^{-\frac{3}{2}} \quad (6)$$

令  $g(\theta) = [1 + (\tan\theta)^2]^{-\frac{3}{2}}$  并将  $g(\theta)$  化简成  $g(\theta) = \cos^3\theta$  对此式做泰勒展开得

$$g(\theta) = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \right]^3 \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

从而

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \omega^{*2}(y, t) \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \right]^6 dy + \frac{1}{2} \int_0^l GJ \left( \frac{\partial \beta(y, t)}{\partial y} \right)^2 dy$$

由于  $\theta$  值较小, 故

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \omega^{*2}(y, t) [1 - 3\omega'^2(y, t)] dy + \frac{1}{2} \int_0^l GJ \left( \frac{\partial \beta(y, t)}{\partial y} \right)^2 dy$$

所以

$$L = T - U = \frac{1}{2} [c_{11}\dot{\omega}^2 + 2c_{12}\dot{\omega}\dot{\beta} + c_{22}\dot{\beta}^2 - a_{11}\omega^2 + a_{12}\omega^4 - a_{13}\beta^2]$$

式中相应系数的表达式较复杂, 这里予以省略. 利用拉格朗日方程首先对广义坐标  $\omega$  求导得到方程

$$c_{11}\ddot{\omega} - c_{12}\ddot{\beta} + a_{11}\omega - a_{12}\omega^3 = Q_\omega \quad (8)$$

再对广义坐标  $\beta$  求导得到方程

$$c_{22}\ddot{\beta} - c_{12}\ddot{\omega} + a_{13}\beta = Q_\beta \quad (9)$$

其中  $Q_\omega$  与  $Q_\beta$  分别对应于广义坐标  $\omega(t), \beta(t)$  的广义气动力.

$$\text{广义气动力, } Q_\beta = \int_0^l M'(y, t)\phi(y) dy.$$

本文所讨论的机翼为无人机的大展弦比翼, 无人机一般飞行速度是亚音速, 利用格罗斯曼理论可得到气动力和气动力矩的表达式如下:

$$L' = (y, t) = -\frac{1}{2} \rho V^2 (2b) a_0 [\beta(y, t) +$$

$$\frac{\dot{\omega}(y, t)}{V} + \left( \frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\beta}(y, t)}{V}]$$

$$M' = (y, t) = \frac{1}{2} \rho V^2 (2b)^2 \left\{ a_0 \left( \frac{1+a}{2} - \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{4} \right) [\beta(y, t) + \frac{\dot{\omega}(y, t)}{V} +$$

$$\left( \frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\beta}(y, t)}{V}] - \frac{b\pi}{4V} \dot{\beta}(y, t) \}$$

式中  $V$  是指来流速度,  $\rho$  是指空气密度,  $a_0$  是根据升力线理论获得的大展弦比机翼的修正升力线斜率公式, 其表达式为  $(a_0 = \left( \frac{\partial C_l}{\partial \beta} \right)_\infty \frac{\lambda}{\lambda + 2})$  (其中  $\lambda$  是

机翼展弦比;  $(\frac{\partial C_l}{\partial \beta})_\infty$  是指无限翼展的升力线斜率),  $L'(y, t), M'(y, t)$  表示作用在弹性轴上的升力和力矩.

根据前面讨论可知:

$$\begin{aligned} L'(y, t) &= -\frac{1}{2}\rho V^2(2b)a_0[\phi(y)\beta(t) + \\ &\quad \frac{f(y)\dot{\omega}(t)}{V} + (\frac{1}{2} - a)b\frac{\phi(y)\dot{\beta}(t)}{V}] \\ M'(y, t) &= \frac{1}{2}\rho V^2(2b)^2\{a_0(\frac{1+a}{2} - \\ &\quad \frac{1}{4})[\phi(y)\beta(t) + \frac{f(y)\dot{\omega}(t)}{V} + (\frac{1}{2} - \\ &\quad a)b\frac{\phi(y)\dot{\beta}(t)}{V}] - \frac{b\pi}{4V\phi(y)}\dot{\beta}(t)\} \end{aligned}$$

代入整理得

$$\left. \begin{aligned} Q_\omega &= b_{12}V^2\beta(t) - d_{11}V\dot{\omega}(t) + d_{12}V\dot{\beta}(t) \\ Q_\beta &= d_{21}V\dot{\omega}(t) - b_{22}V^2\beta(t) - d_{22}V\dot{\beta}(t) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中  $b_{12}, b_{22}$  为气动刚度系数;  $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}$  为气动阻尼系数.

方程可化为

$$\begin{aligned} c_{11}\ddot{\omega} - c_{12}\ddot{\beta} + a_{11}\dot{\omega} - 2a_{12}\omega^3 - b_{12}V^3\beta + \\ d_{11}V\dot{\omega} - d_{12}V\dot{\beta} &= 0 \\ c_{22}\ddot{\beta} - c_{12}\dot{\omega} + a_{13}\beta - d_{21}V\dot{\omega} + b_{22}V\beta + d_{22}V\dot{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

式中  $c_{11}, c_{12}, c_{22}$  为广义质量;  $a_{11}, a_{13}$  为广义刚度,  $a_{12}$  表示广义非线性刚度.

关于振型函数的选取, 对于第一阶纯弯和纯扭转型, 对其选取一定要满足机翼根部约束的边界条件, 大展弦比直机翼翼根根部约束边界条件为剖面固支的悬臂机翼, 为了便于计算, 此处本文选取的振型函数为一些初等函数, 而且满足机翼根部约束的边界条件, 其表达式如下:

$$f(y) = \frac{1}{l^2}y^2, \phi(y) = \frac{1}{l}y \quad (12)$$

从而

$$\begin{aligned} a_{11} &= EI \frac{4}{l^3}, a_{12} = EI \frac{3}{l^5}, a_{13} = EI \frac{GJ}{l} \\ c_{11} &= \frac{ml}{5}, c_{12} = -S_\alpha \frac{l}{4}, c_{22} = \frac{I_\alpha l^2}{3}, \\ b_{12} &= \frac{-\rho a_0 bl}{4}, b_{22} = \frac{-\rho a_0 bl(1+2a)}{6}, \\ d_{11} &= \frac{\rho a_0 bl}{5}, d_{12} = -\frac{\rho a_0 b^2 l(1-2a)}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{21} &= \frac{\rho a_0 b^2 l(1+2a)}{8} \\ d_{22} &= \frac{\rho b^3 l[2\pi - a_0(1-4a^2)]}{12} \end{aligned} \quad (13)$$

对(11)式解耦化简得到

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\omega} + \frac{k_\omega}{m_1}\omega - \frac{k_1}{m_1}\omega^3 + \frac{c_\omega}{m_1}\dot{\omega} + \frac{k_{\beta_1}}{m_1}\beta + \frac{k_{\beta_1}}{m_1}\dot{\beta} &= 0 \\ \ddot{\beta} + \frac{k_{\beta_2}}{m_1}\beta + \frac{c_{\beta_2}}{m_1}\dot{\beta} + \frac{k_{\omega_2}}{m_1}\omega - \frac{k_2}{m_1}\omega^3 + \frac{c_{\omega_2}}{m_1}\dot{\omega} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} m_1 &= c_{22}c_{11} - c_{12}^2, \quad k_{\omega_1} = a_{11}c_{22}, \quad k_{\omega_2} = a_{11}c_{12} \\ k_{\beta_1} &= a_{13}c_{12} + (b_{22}c_{12} - b_{12}c_{22})V^2, \quad k_1 = 2a_{12}c_{22} \\ k_{\beta_2} &= a_{13}c_{11} + (b_{22}c_{11} - b_{12}c_{12})V^2, \quad k_2 = 2a_{12}c_{12} \\ c_{\omega_1} &= (c_{22}d_{11} - c_{12}d_{21})V \\ c_{\omega_2} &= (c_{12}d_{11} - c_{11}d_{21})V \\ c_{\beta_1} &= (c_{12}d_{22} - c_{22}d_{12})V \\ c_{\beta_2} &= (c_{11}d_{22} - c_{12}d_{12})V \end{aligned} \quad (15)$$

## 2 颤振分析

选取翼型参数如下:

$$\begin{aligned} l &= 5.8\text{m}, EI = 4.08 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}^2, \\ 2b &= 3.15\text{m}, GJ = 16\text{N} \cdot \text{m}^2 \\ m &= 79\text{kg/m}, I_\beta = 74\text{kg} \cdot \text{m}^2, x_\beta = 0.1\text{m}, \\ ab &= -0.575, a_0 = 4.32, \end{aligned}$$

并记  $\xi = x_1, \xi = x_2, \beta = x_3, \dot{\beta} = x_4$ , 则机翼方程组化为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3 - a_4x_4 - e_1x_1^3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3 - b_4x_4 + e_2x_1^3 \end{aligned} \quad (16)$$

其中方程中各系数与速度  $V$  和展弦比  $\lambda$  有关, 表达式较为复杂, 这里予以省略.

按文[11]中的计算方法, 得系统的第一李雅普诺夫量为

$$L(V) = \frac{3\pi}{4c}(A_{111}^{(1)} + A_{222}^{(2)} + A_{333}^{(3)} + A_{444}^{(4)}) \quad (17)$$

其中各系数的意义及计算按文[11]中计算方法可得. 当  $L(V) < 0$  时, 发生 benign 颤振(超临界); 当  $L(V) > 0$  时, 发生 catastrophic 颤振(次临界).

接下来我们利用规范性理论来研究模型的颤振. 选取  $\lambda = 3.365$ , 其他参数选取不变, 则系统可化为

$$\dot{X} = A(V)X + f(X, V) \quad (18)$$

其中

$$A(V) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{0.4782}{V^2} & -0.0936 & -0.1172 + \frac{0.0802}{V^2} & -0.0944 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{0.0603}{V^2} & 0.0361 & \frac{1.01}{V^2} + 0.472 & -0.0474 \end{bmatrix}$$

$$f(X, V) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5641/V^2 \\ 0 \\ -0.0711/V^2 \end{bmatrix} x_1^3$$

系统在初始平衡点  $O(0,0,0,0)$  处的 Jacobi 矩阵的特征方程为:

$$\mu^4 + R_1\mu^3 + R_2\mu^2 + R_3\mu + R_4 = 0 \quad (19)$$

其中  $R_4 = 0.141$ ,

$$R_2 = [(-0.047 + 0.0026\pi)V^4 + 1.4883V^2]/V^3,$$

$$R_3 = [-0.0001V^4 + (0.0804 + 0.0133\pi)V^2]/V^4,$$

$$R_4 = (-0.013V^2 + 0.4765)/V^4.$$

当满足条件

$$R_3/R_1(R_3/R_1 - R_2) + R_4 = 0,$$

$$R_3/R_1 - R_2 < 0,$$

$$R_3 > 0,$$

即  $V_0 = 2.8$  时,特征方程存在一对纯虚特征根和一对负实部的特征根,机翼在此速度下发生颤振。

令  $V = V_0 + \varepsilon$ ,利用规范性理论及算法<sup>[12]</sup>,得到保留至 3 次项的极坐标形式下的规范型为:

$$\frac{dr}{dt} = a\varepsilon r + br^3$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = c + dr^2 - q\varepsilon r \quad (20)$$

其中  $a = 1.1386, b = -0.1124, c = 0.4807, d = -0.0342, q = -5.5505$ . 由于  $a$  和  $b$  异号,可知原系统将产生超临界 Hopf 分岔. 当  $\varepsilon < 0$  时,初始平衡点是渐近稳定的焦点;当  $\varepsilon > 0$  时,初始平衡点变为不稳定,在其附近出现一稳定的极限环。

### 3 数值模拟

首先选取无量纲流速  $V = 1.8 < V_0$ ,得到系统此时的相图如图 1 所示;再选取无量纲流速  $V = 3 > V_0$ ,得到系统此时的相图如图 2 所示,这与理论分析的结果是一致的。

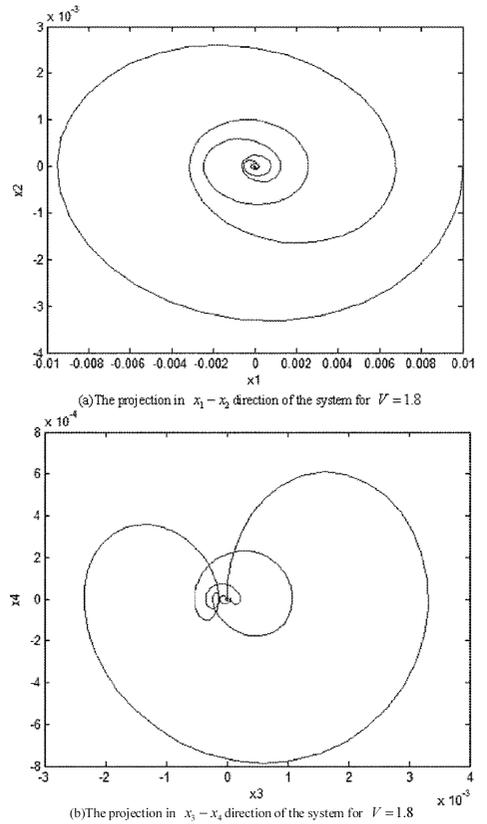


图 1  $V = 1.8 < V_0$  时系统的相图

Fig. 1 The phase portrait of the system for  $V = 1.8 < V_0$

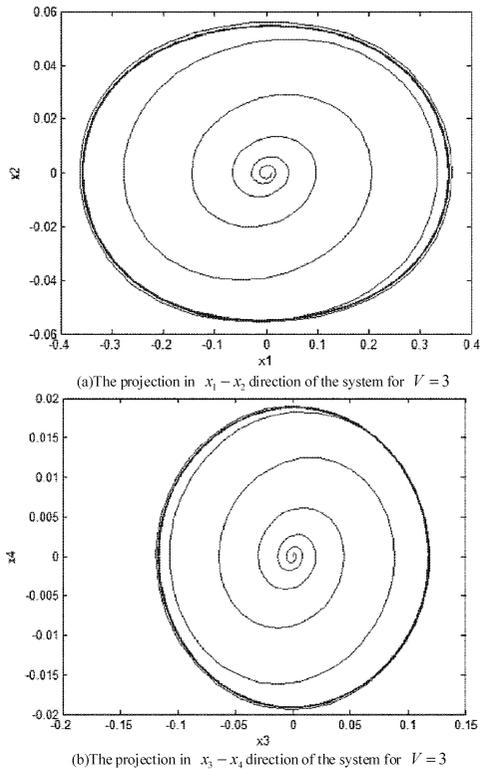


图 2  $V = 3 > V_0$  时系统的相图

Fig. 2 The phase portrait of the system for  $V = 3 > V_0$

其他参数不变,变动无量纲流速  $V$ ,得到系统的分岔图如图3所示.

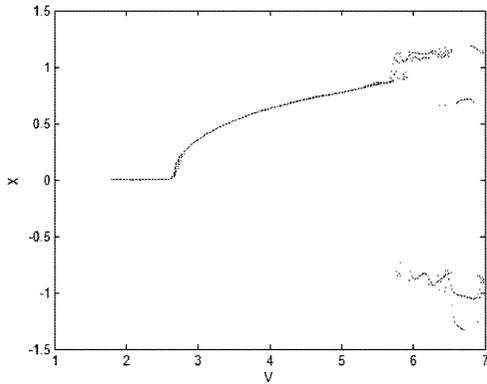


图3 系统关于无量纲流速  $V$  的分岔图

Fig. 3 The bifurcation diagram of the system in the dimensionless speed  $V$

最后,选取不同的展弦比,得到机翼的颤振速度与展弦比的关系曲线如图4所示.由图4可知,当展弦比变化时,颤振速度先随着展弦比的增大而减小;当展弦比达到一临界值时,颤振速度随着展弦比的增大而增大;最后当展弦比达到另外一临界值时,颤振速度随着展弦比的增大而减小.

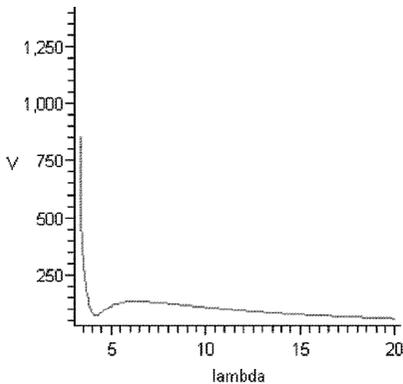


图4 颤振速度与展弦比的关系曲线图

Fig. 4 The curve of the flutter speed and aspect ratio

## 4 结论

本文结合材料力学中曲率的概念,利用格罗斯曼理论计算气动力,建立了一类大展弦比机翼的非线性动力学模型.利用第一李雅普诺夫量研究了该系统由稳态平衡解向 Hopf 分岔解(颤振运动)演化的临界条件和路径,以及系统发生 benign 颤振(超临界)、catastrophic 颤振(次临界)的识别条件.利用规范性理论、Hopf 分岔定理研究了模型的颤振行为,并研究了不同展弦比对颤振速度的影响.

## 参 考 文 献

- 1 任智毅,金海波,丁运亮.大展弦比复合机翼机翼气动裁剪设计新方法.南京航空航天大学学报,2011,43(1):18~24(Ren Z Y, Jin H B, Ding Y L. New method for aeroelastic tailoring of high aspect ratio composite wings. *Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2011,43(1):18~24(in Chinese))
- 2 赵常,杨茂.基于 UMARC 的大展弦比机翼空气动力建模方法.科学技术与工程,2010,10(12):2913~2919(Zhao C, Yang M. Aerodynamic modeling of high-aspect-ratio wing based on UMARC. *Science Technology and Engineering*, 2010,10(12):2913~2919(in Chinese))
- 3 田坤簧,谷良贤,王洪伟.基于 Hamilton 原理的大展弦比直机翼固有特性分析.机械强度,2010,32(5):854~858(Tian K H, Gu L X, Wang H W. Inherence characteristic analysis of high aspect ratio wing based on Hamilton's principle. *Journal of Mechanical Strength*, 2010,32(5):854~858(in Chinese))
- 4 谢长川,张欣,陈桂彬.复合材料大展弦比机翼动力学建模与颤振分析.飞机设计,2004,(2):6~10(Xie C C, Zhang X, Chen G B. Dynamic modeling and flutter analysis for high-aspect-ratio composite wing. *Aircraft Design*, 2004,(2):6~10(in Chinese))
- 5 赵永辉,胡海岩.大展弦比夹芯翼大攻角颤振分析.振动工程学报,2004,17(1):25~29(Zhao Y H, Hu H Y. Flutter analysis of a high-aspect-ratio sandwich wing under large angle of attack. *Journal of Vibration Engineering*, 2004,17(1):25~29(in Chinese))
- 6 谢长川,吴志刚,杨超.大展弦比柔性机翼的气动弹性分析.北京航空航天大学学报,2003,29(12):1077~1090(Xie C C, Wu Z G, Yang C. Aeroelastic analysis of flexible large aspect ratio wing. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2003,29(12):1077~1090(in Chinese))
- 7 刘湘宁,向锦武.大展弦比复合材料机翼的非线性颤振分析.航空学报,2006,27(2):213~218(Liu X N, Xiang J W. Study of nonlinear flutter of high-aspect ratio composite wing. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2006,27(2):213~218(in Chinese))
- 8 杨仕福,王琪,赵永辉,王立峰.大展弦比机翼控制.动力学与控制学报,2011,9(1):79~85(Yang S F, Wang Q, Zhao Y H, Wang L F. Control of a high-aspect-ratio wing using multiple actuators. *Journal of Dynamics and Control*,

- 2011, 9(1): 79 ~ 85 (in Chinese))
- 9 Tang D, Dowell E H. Effects of geometric structural non-linearity on flutter and limit cycle oscillations of high-aspect-ratio wings. *Journal of Fluids and Structures*, 2004, 19(3): 291 ~ 306
- 10 Tang D, Dowell E H. Experimental and theoretical study of gust response for high-aspect-ratio wing. *AIAA Journal*, 2002, 40(3): 419 ~ 429
- 11 Librescu L, Chiocchia G, Marzocca P. Implications of cubic physical/ aerodynamic non-linearities on the character of the flutter instability boundary. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38(2): 173 ~ 199
- 12 Yu P. Computation of normal forms via a perturbation technique. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 211(1): 19 ~ 38

## STABILITY AND BIFURCATION FOR A NONLINEAR MODEL OF HIGH-ASPECT-RATIO WINGS \*

Zhou Liangqiang<sup>1†</sup> Chen Fangqi<sup>1</sup> Ge Peng<sup>2</sup>

(1. College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China )

(2. Beijing Institute of Structure and Environment Engineering, Beijing 100076, China )

**Abstract** Combining the curvature concept in mechanics of materials with the Grossman theory to calculate the aeroelastic force, the nonlinear dynamic model of high-aspect-ratio wings was established by using Lagrange equation. The model was rewritten as dimensionless equations. The critical conditions and route for the stable solution to Hopf bifurcation solution were investigated by using the first Lyapunov quantity. The identification conditions for benign flutter and catastrophic flutter were obtained. The flutter is benign when the first Lyapunov quantity is negative, while the flutter is catastrophic when the first Lyapunov quantity is positive. The flutter was also studied by the normal form theory and Hopf bifurcation theory. The influence of different aspect ratio on the flutter speed was investigated. The results show that the flutter speed first decreases, then increases, and at last decreases as the aspect ratio increases. The Numerical Simulations were also given, which verify the analytical results.

**Key words** high-aspect-ratio wings, flutter, stability, bifurcation