

关于弹性细杆力学的内约束*

薛纭^{1†} 王鹏^{2,3} 翁德玮^{2,1}

(1. 上海应用技术学院机械工程学院, 上海 201418) (2. 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(3. 新疆师范大学物理系, 乌鲁木齐 830054)

摘要 讨论了弹性细杆力学的变形几何方程在静力学建模中的地位和作用, 阐明了它与非完整约束的异同; 指出了只有满足物理条件的解才是物理上有意义的解. 结论对弹性细杆动力学仍然适用.

关键词 弹性细杆力学, 变形几何方程, 内约束, 非完整约束, 变形的物理条件

引言

“Kirchhoff 动力学比拟”思想是 Kirchhoff 于 1859 年在建立弹性细杆静力学理论时提出的^[1,2], 其依据是在平面截面假定下, 结合线弹性本构关系建立的矢量形式的力和力矩平衡微分方程, 其数学形式与刚体定点转动动力学的 Euler 方程相同, 两者存在着对应的比拟关系. 据此, 刚体运动的概念和方法被用来研究弹性细杆的变形及其平衡问题, 开辟了用动力学的概念和方法研究弹性细杆变形和平衡问题的新思路^[3-5].

按 Kirchhoff 动力学比拟, 刚体动力学的概念和方法可以移植到弹性细杆静力学: 研究对象由刚体转化为弹性细杆的刚性截面, 弧坐标比拟为时间变量, 刚体截面的位置和姿态等同于刚体的位置和姿态. 截面的弧坐标历程形成弹性细杆的几何形态. 刚体动力学的许多概念, 如非完整约束、运动稳定性等都可以移植到弹性细杆静力学.

注意到在弹性细杆的力学建模中需要指出其变形规则, 即变形几何方程, 这被称之为“内约束 (internal constraints)”, 或“材料约束 (material constraints)”^[6], 本文分别从建模和“Kirchhoff 动力学比拟”的角度探讨其力学意义, 明确内约束与通常的非完整约束的异同, 指出与数值解对应的弹性细杆实际位形的存在条件, 结论对弹性细杆动力学同样适用.

1 弹性细杆的内力计算是静不定问题

设除端截面外, 弹性细杆不受其它外力作用.

以弹性细杆的截面为对象, 中心线的弧坐标为 s , 建立原长度为 Δs 的微段杆的平衡方程, 并令 $\Delta s \rightarrow 0$, 导出弹性细杆的平衡微分方程^[2,7]

$$\tilde{\partial}_s \mathbf{F} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} = 0$$

$$\tilde{\partial}_s \mathbf{M} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \tilde{\partial}_s \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0 \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 、 \mathbf{F} 和 \mathbf{M} 依次为截面的弯扭度、内力的主矢和主矩, \mathbf{r} 为截面形心对固定点的矢径, $\tilde{\partial}_s$ 表示对弧坐标 s 的全导数, 波浪号表示相对与截面固结的主轴坐标系求导. 显然, 这 2 个矢量方程含有 4 个未知矢量, (1) 式不封闭, 构成不定方程, 因此, 弹性细杆的内力计算是静不定问题, 需要物理和变形几何两方面的补充方程.

文献中有两种解决方案:

方案一是补充如下关于主矩的本构方程和变形几何方程^[2]

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\omega}, s) \quad (2)$$

$$\tilde{\partial}_s \mathbf{r} = \mathbf{e}_3 \quad (3)$$

其中 \mathbf{e}_3 为截面的单位法向量. 方程组 (1) ~ (3) 封闭. 方程 (3) 给出了弹性细杆的变形规则, 其意义是要求变形前后的轴线始终与截面垂直, 且轴线不可伸缩. 这被称之为 Kirchhoff 弹性细杆.

方案二是除了关于主矩的本构方程 (2) 外, 再增加关于主矢的本构方程^[8]

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}, s) \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 为轴线的应变, 变形几何方程改为

$$\tilde{\partial}_s \mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}_3 \quad (5)$$

(4) 和 (5) 式的意义是除了弯扭变形外, 还考虑了轴线的伸缩和相邻截面的剪切变形, 相对于 Kirch-

hoff 弹性细杆,这被称之为精确模型.

上述分析表明,变形几何方程(3)和(5)式的地位等同于静不定问题求解中的变形协调方程,它规定了弹性细杆变形必须遵守的规则.

2 变形规则构成内约束

按“Kirchhoff 动力学比拟”,从约束方程的角度考察(3)和(5)式. 弹性细杆截面在空间的位形需要 6 个广义坐标确定,一般是取截面形心的位置坐标 (ξ, η, ζ) 和截面的姿态坐标,例如 Euler 角 $(\psi, \vartheta, \varphi)$,如图 1 和图 2 所示,图 2 中 $P-xyz$ 平面为与截面固结的形心主轴坐标系, e_1, e_2, e_3 为沿坐标轴的单位矢量,文献中称为 Cosserat 方向子^[7].

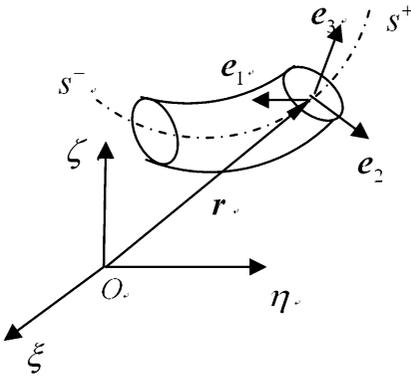


图 1 弹性细杆及其截面的 Cosserat 方向子
Fig.1 Thin elastic rod and its Cosserat directors of a cross section

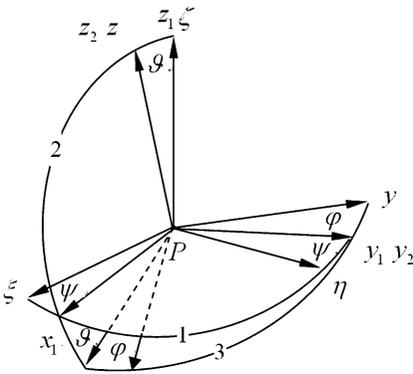


图 2 弹性细杆截面姿态的 Euler 角
Fig.2 Euler angles of a cross section of the elastic rod

(3)式的坐标表达式为

$$\partial_s \xi = \sin \psi \sin \vartheta \tag{6a}$$

$$\partial_s \eta = -\cos \psi \sin \vartheta \tag{6b}$$

$$\partial_s \zeta = \cos \vartheta \tag{6c}$$

(5)式的坐标表达式为

$$\begin{pmatrix} \partial_s \xi \\ \partial_s \eta \\ \partial_s \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 + 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

其中 \mathbf{Q} 为从主轴坐标系到惯性坐标系的过渡矩阵

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} c\psi c\varphi - c\vartheta s\psi s\varphi & -c\vartheta s\psi c\varphi - c\psi s\varphi & s\psi s\vartheta \\ c\varphi s\psi + c\psi c\vartheta s\varphi & -s\varphi s\psi + c\psi c\vartheta c\varphi & -c\psi s\vartheta \\ s\vartheta s\varphi & s\vartheta c\varphi & c\vartheta \end{pmatrix} \tag{8}$$

其中 c 表示 \cos , s 表示 \sin . 当诸 γ_i 恒为零时(7)式即成为(6)式. 显然,(6)和(7)式都是不可积的,其形式类似于冰刀的非完整约束,它使独立的广义速度(位形坐标对弧坐标的导数)个数减少. 然而,此约束无需对应的约束力,即弹性细杆的变形是自动满足这一约束的. 文献中称之为“内约束”,或“材料约束”^[6],它是特殊的非完整约束.

当半径为 a 的圆截面弹性细杆约束在半径为 R 的圆柱面上时,柱面约束方程

$$\xi^2 + \eta^2 = (R + a)^2 \tag{9}$$

或

$$\xi = (R + a) \cos \psi \tag{9a}$$

$$\eta = (R + a) \sin \psi \tag{9b}$$

和内约束方程(6)式要求截面与圆柱面接触点所在的直径与圆柱面轴线垂直,即可导出^[9]

$$\partial_s \psi = -\frac{\sin \vartheta}{R + a} \tag{10}$$

其中 ψ, ϑ 分别为弹性细杆截面的进动角和章动角. 方程(10)是(6)是在柱面约束下的表现形式.

体现变形规则的非完整约束方程(6)、(7)和(10)式与经典非完整约束的本质区别在于无需对应的约束力.

众所周知,几何约束可以嵌入动能表达式而减少力学系统的维数. 但是,非完整约束按此做法消去不独立的广义速度将导致所谓 Lindelöf 错误^[10,11]. 然而,依靠(3)、(5)式,可以从矢量表达的平衡微分方程导出弹性细杆平衡的 Lagrange 方程.

3 位形的数值解要满足物理约束

弹性细杆的位形是截面的弧坐标历程,表现为平衡微分方程的解. 但是,并非数学上的解在物理上都是有意义的,还要受到如下两个物理上的约束:

- 1) 弹性细杆不能互相嵌入;

2) 对弹性细杆的精确模型, 还须满足下面3个彼此等价条件

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_3 > 0 \quad (11a)$$

$$\gamma_3 > -1 \quad (11b)$$

$$\partial_s \bar{s} > 0 \quad (11c)$$

其中 \bar{s} 为变形后的弧坐标.

(11a-c) 的等价性可以由 (5) 式数乘 \mathbf{e}_3 , 以及 γ_3 的弧坐标表达式

$$\gamma_3 = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{s} - \Delta s}{\Delta s} = \partial_s \bar{s} - 1 \quad (12)$$

得到.

(11) 式的物理意义是指变形和运动都不能使弹性细杆的长度压缩为零, 同时截面的剪切变形不能导致截面的法向量与轴线的切向量垂直.

上述物理约束只有在求得弹性细杆位形的数值解后再进行判断, 舍弃不满足条件 1) 和 2) 的解.

当发生互相嵌入时, 表明存在自接触结束, 需要重新考虑自接触约束力对弹性细杆位形的影响. 显然, 自接触约束的存在与否除了与截面的弧坐标历程有关外, 还与截面的几何形状和大小有关.

设已知弹性细杆中心线的矢径为 $\mathbf{r}(s)$, ($0 \leq s \leq l$), 截面在主轴坐标系中的边界矢径为 $\mathbf{b} = b_1(s, u)\mathbf{e}_1 + b_2(s, u)\mathbf{e}_2$, 其中 u 为参数, 在其取值范围内 b 的矢端曲线形成截面的封闭边界且为凸的. 弹性细杆的外形方程可写为

$$\mathbf{R}(s, u) = \mathbf{r} + \mathbf{b} \quad (13)$$

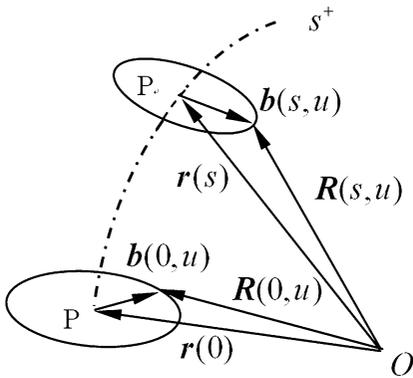


图3 弹性细杆截面的边界

Fig. 3 The boundary of a cross section of the thin elastic rod

如图3所示, 这是关于 s, u 的二元矢值函数. 对于任意两个截面, 不存在嵌入是指对任意的 $(s_1, u_1) \neq (s_2, u_3)$, 至多有一点使

$$\mathbf{R}(s_1, u_1) = \mathbf{R}(s_2, u_3) \quad (14)$$

对(14)式情形, 在平衡微分方程及其求解中须考

虑自接触约束力.

诚然, 只有稳定的平衡位形才是弹性细杆实际可观测到的位形.

4 结语

弹性细杆力学的变形几何方程赋予弹性细杆的变形规则, 构成弹性细杆的内约束, 其特点是无需存在对应的约束力, 可以直接代入静力学方程中, 借助于此, 可以将矢量形式的静力学方程转化为平衡的 Lagrange 方程; 弹性细杆平衡微分方程满足物理条件, 且稳定的解才是物理上可观察到的平衡位形.

作者感谢上海应用技术学院《化工过程机械》重点学科建设基金(1020Q121001)的支持.

参 考 文 献

- 1 Love A E H. A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity. 4-th ed. New York : Dover, 1927
- 2 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学—DNA 力学模型的理论基础. 北京: 清华大学出版社, 2006 (Liu Y Z. Non-linear mechanics of thin elastic rod. Beijing: Tsinghua University Press, 2006 (in Chinese))
- 3 刘延柱, 薛纭, 陈立群. 弹性细杆平衡的动态稳定性. 物理学报, 2004, 53(8): 2424 ~ 2428 (Liu Y Z, Xue Y, Chen L Q. Dynamical stability of equilibrium of a thin elastic rod. Acta Physica Sinica, 2004, 53(8): 2424 ~ 2428 (in Chinese))
- 4 Xue Y, Shang H L. Jourdain Principle of a Super-Thin Elastic Rod Dynamics. Chinese Physics Letters, 2009, 26(7): 074501 ~ 3
- 5 薛纭, 刘延柱, 陈立群. 超细长弹性细杆的分析力学问题. 力学学报, 2005, 37(4) (Xue Y, Liu Y Z, Chen L Q. On analytical mechanics for a super-thin elastic rod. Acta Mechanica Sinica, 2005, 37(4): 485 ~ 493 (in Chinese))
- 6 Stuart S, Antman. Nonlinear problems of elasticity, 2nd ed. Springer-Verlag New York, Inc. 2005: 270
- 7 Cao D Q, Tucker R W. Nonlinear dynamics of elastic rods using the cosserat theory: modelling and simulation. International Journal of Solids and Structure, 2008, 45(2): 460 ~ 477
- 8 薛纭, 翁德玮. 轴线存在应变时弹性细杆力学的两个概念. 力学与实践, 2011, 33(5): 65 ~ 67 (Xue Y, Weng D W. Two concepts on shearable and extensible elastic rod

- mechanics. *Mechanics in Engineering*, 2011, 33(5): 65 ~ 66 (in Chinese))
- 9 刘延柱, 薛纭. 受圆柱面约束弹性细杆的平衡与稳定性. *应用力学学报*, 2005, 22(3): 391 ~ 394 (Liu Y Z, Xue Y. Equilibrium and stability of elastic rod constrained to cylinder. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2005, 22(3): 391 ~ 394 (in Chinese))
- 10 Mei F X, Wu H B. Dynamics of constrained mechanical systems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2009
- 11 陈滨. 分析动力学. 北京: 北京大学出版社, 1987 (Chen Bin. Analytical dynamics. Beijing: Beijing University Press, 1987 (in Chinese))

ON THE INTERNAL CONSTRAINT OF THE THIN ELASTIC ROD MECHANICS *

Xue Yun^{1†} Wang Peng² Weng Dewei^{2,1}

(1. School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China)

(2. Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract The paper discusses the role and influence of the geometrical equation of deformation of elastic rod mechanics in the modeling of statics, and explains similarities and differences between this deformation equation and nonholonomic constraint in analytical dynamics. It is indicated that only the solutions of the equation satisfying the physical conditions of the rod are meaningful. The conclusions are also valid in the condition of elastic rod dynamics.

Key words mechanics of thin elastic rod, geometrical equation of deformation, internal constraints, non-holonomic constraints, physical conditions of the elastic rod