第 10 卷第 3 期 2012 年 9 月
1672-6553/2012/10(3)/202-7
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 10 No. 3
Sep. 2012

伪振子分析法的证明及其在高阶 Hopf 分岔中的应用*

俞亚娟[1,3] 王在华[1,2†]

(1. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室,南京 210016)
(2. 解放军理工大学理学院,南京 211101)(3. 常州大学数理学院,常州 213164)

摘要 采用由闭轨分岔出极限环的思路给出了伪振子分析法的严格证明,所得结果推广了伪振子分析法的主要结论,使其能够应用于高阶 Hopf 分岔问题,其中分岔周期解的稳定性分析需要高于三次的非线性项. 论文给出两个数值算例检验了伪振子分析法的有效性.

关键词 伪振子分析法, Hopf 分岔, 时滞微分方程, 极限环

引言

Hopf 分岔是自治非线性系统的一种特有现象,表现为平衡态失稳后出现周期运动,广泛存在于工程技术领域. 例如,飞机机翼的颤振[1,2],金属切削系统的再生颤振[3,4],高速列车的蛇形运动[5,6],经济危机的周期性发生[7,8],心脏的周期跳动[9,10]等等. 这种由 Hopf 分岔所产生的周期运动可以是有利的,如心脏的周期跳动,也可以是有害的,如飞机机翼的颤振、金属切削系统的再生颤振,高速列车的蛇形运动,经济危机的周期性发生等. 因此,Hopf 分岔是工程技术中许多实际非线性系统的一个重要研究问题.

Hopf 分岔分析包括两部分,一是分岔的存在性,二是分岔周期解的振幅和频率的计算以及分岔周期解的稳定性. 存在性问题相对简单,可以由线性稳定性分析得到. 而研究分岔周期解性质的方法主要有中心流形约化法[11-14]和奇异摄动法[15-21]. 中心流形定理在理论上保证了在分岔点附近中心流形的存在性,从而可以将整个系统方程投影到一个二维的中心流形上,然后在中心流形上确定方程周期解的性质. 但是,中心流形的计算包含了大量的符号运算,得到的结果也非常复杂,很难清晰地反映系统参数对分岔周期解的影响. 这种复杂性在时滞系统的分岔分析中表现更为明显. 另外,一般情况下无法获得中心流形的精确表达式,只能求其低阶多项式近似表达式,导致在某些问题的应用中精度很差[22]. 相比之下,摄动法在许多情况下应用起来更加方便,特别是在力学系统的分岔分析中更是这样. 例如,Nayfeh 在[23]中通过几个具体的问题,详细比较了多尺度法与中心流形约化法在计算分岔周期解时的复杂性,发现多尺度法所涉及的计算更加简单易行,并且计算精度也不差. 最近,本文作者之一及其合作者提出了研究时滞系统 Hopf 分岔的一种新方法,称之为伪振子分析法(pseudo - oscillator analysis)[24]. 伪振子分析法是能量法[25]与平均法[26]的一种综合应用,但比摄动法更加直接,对研究单状态变量时滞系统的 Hopf 分岔周期解特别有效,应用起来更加方便. 该方法主要思路是:由原系统方程出发,构造一个新的振动方程(称之为伪振子),它可视为无阻尼单自由度振动系统的一个小扰动系统,因而可定义其能量函数并计算相应的功函数,进而利用平均功函数的性质来研究原系统的 Hopf 分岔周期解. 该方法的计算过程简单、计算量小、计算结果也简单,易于实现. 伪振子分析法已被应用于金属切削颤振[28],生物细胞与种群演化[27,29],磁悬浮车辆振动[30],经济模型[31]等问题的分析中. 伪振子分析法也被推广到研究具有复系数的时滞系统 Hopf 分岔周期解[32]. 在某些问题的 Hopf 分岔分析中,分岔周期解的稳定性不能由不超过三次的非线性项来决定,而必须用到更高次的非线性项[33],这种情况称之为高阶 Hopf 分岔问题.

在文献[24]中,作者并没有给出伪振子分析

2011-11-29 收到第 1 稿,2012-01-05 收到修改稿.
* 国家自然科学基金重点资助项目(11032009)和国家杰出青年科学基金资助项目(10825207)
† 通讯作者 E-mail:zhwang@ nuaa. edu. cn

法的严格数学证明,而是在附加多个条件的基础上应用慢变泛函微分方程的平均化定理[26]来证明的.本文的目的是给出伪振子分析法的一种严格数学证明.为此,我们首先在第 1 节简要介绍了伪振子分析法的主要计算过程和主要结论,然后在第 2 节给出了本文的主要结论,其推广的结论可用于研究退化(所谓的高阶 Hopf 分岔)问题.第 3 节给出了两个算例来说明伪振子分析法的有效性.最后在第 4 节对本文工作进行了总结.

1　伪振子分析法

本文考察如下形式的单变量滞后型时滞微分方程

$$F(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x^{(n)}(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\cdots,x^{(n-1)}(t-\tau),p)=0 \qquad (1)$$

其中最高阶导数项不含有时滞 τ,而 p 为参数,在某些问题中 p 不出现而以 τ 为参数,F 至少有四阶连续偏导数,且 $F(0,0,\cdots,0,p)=0$.我们假设方程(1)在 $p=p_0$ 处发生 Hopf 分岔,即假设方程(1)在 $x=0$ 处的线性化微分方程的特征函数 $D(\lambda,p)$ 满足如下条件:

（ⅰ）　对充分小的 $\varepsilon=|p-p_0|$,$D(\lambda,p)$ 有一对复根 $\lambda(\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)\pm i\beta(\varepsilon)$;

（ⅱ）　$\alpha(0)=0,\omega_0=\beta(0)\neq 0$,其它所有特征根在 $\varepsilon=0$ 时均有负实部;

（ⅲ）　$\dot{\alpha}(0)=\left(\frac{\mathrm{d}\Re(\lambda)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0}\neq 0$,其中 $\Re(z)$ 是 $z\in\mathbb{C}$ 的实部.

那么,分岔周期解的振幅及稳定性可按如下步骤来确定[24]

第一步:构造伪振子方程

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2x(t)+\delta F(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x^{(n)}(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\cdots,x^{(n-1)}(t-\tau),p)=0 \qquad (2)$$

其中 $\delta=\pm 1$,具体取值由分岔点附近的稳定性决定,我们将在后面例子中介绍 δ 取值方法.

在参数 $p=p_0$ 的充分小的邻域内,方程(1)的分岔周期解可表示为[15]

$$x_\varepsilon(t)=a(\varepsilon t)\cos(\omega(\varepsilon t)+\theta(\varepsilon t))=a\cos(\omega_0t+\theta)+O(\varepsilon) \qquad (3)$$

其中 $a=a(0)$,$\theta=\theta(0)$,由初始条件确定.一方面,$x_\varepsilon(t)$ 满足方程(1);另一方面,这个解的主要部分 $x^*(t)=a\cos(\omega_0t+\theta)$ 正好是方程 $\ddot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=0$ 的解,从而 $x_\varepsilon(t)$ 近似满足方程(2).因此,在分岔点附近,伪振子方程(2)可以认为是 $\ddot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=0$ 的小扰动方程.

第二步:取方程(2)的能量(也称为方程(1)的伪能量)函数

$$E=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\omega_0^2x^2$$

计算其沿着方程(2)的解的导数(称为方程(1)的伪功率)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2)}=-\delta\cdot F(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x^{(n)}(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\cdots,x^{(n-1)}(t-\tau),p)\cdot\dot{x}(t) \qquad (4)$$

由于在分岔点附近有 $x(t)=x_\varepsilon(t)\approx x^*(t)$,且 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2)}\approx 0$,因此,伪功率函数 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2)}$ 是周期为 $T=2\pi/\omega_0$ 的慢变周期函数.

第三步:在参数 $p=p_0$ 的充分小的邻域内,利用平均法的思想,对伪功率函数进行平均得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2)}\approx h(a)=-\frac{\delta}{T}\int_0^T F(x^*(t),\dot{x}^*(t),\cdots,x^{*(n-1)}(t),x^{*(n)}(t),x^*(t-\tau),\dot{x}^*(t-\tau),\cdots,x^{*(n-1)}(t-\tau),p)\cdot\dot{x}^*(t)\mathrm{d}t \qquad (5)$$

称为方程(1)的平均伪功率函数.

利用函数 F 的泰勒展式及(3)式有

$$h(a)=c_2(p)a^2+c_4(p)a^4+o(a^6),$$
$$c_2(p)=-\frac{1}{2}\omega\delta\mathrm{Im}(D(i\omega_0,p)) \qquad (6)$$

其中 $\mathrm{Im}(z)$ 是 $z\in\mathbb{C}$ 的虚部.

伪振子分析法[24]的主要结论如下:对充分小的 ε,

(1) 如果 $h''(0)<0$,则平凡解 $x=0$ 是渐近稳定的,如果 $h''(0)>0$,则 $x=0$ 是不稳定的.

(2) 若存在 $a_0>0$ 使得 $h(a_0)=0$ 且 $h'(a_0)\neq 0$,则当 $h'(a_0)<0$ 时,分岔周期解 $x(t)\approx a_0\cos(\omega_0t+\theta)$ 是渐近稳定的,当 $h'(a_0)>0$ 时,$x(t)\approx a_0\cos(\omega_0t+\theta)$ 是不稳定的.

(3) 特别地,当 $c_2(p)<0$,$c_4(p)>0$ 时,对应的分岔周期解 $x(t)\approx a_0\cos(\omega_0t+\theta)$ 是不稳定的,而当 $c_2(p)>0$,$c_4(p)<0$ 时,对应的分岔周期解 $x(t)\approx a_0\cos(\omega_0t+\theta)$ 是稳定的.

注记 1　和方程(1)等价的形式应为

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2x(t)+[\pm F(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x^{(n)}(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\cdots,x^{(n-1)}(t-\tau),p)-(\ddot{x}(t)+\omega_0^2x(t))]=0 \tag{7}$$

视其为振动方程 $\ddot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=0$ 的小扰动方程，功率函数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)}=-[\pm F(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x^{(n)}(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\cdots,x^{(n-1)}(t-\tau),p)-(\ddot{x}(t)+\omega_0^2x(t))]\cdot\dot{x}(t)$$

由于在分岔点附近有 $x(t)=x_\varepsilon(t)\approx x^*(t)$，且 $\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)}\approx 0$，因此，伪功率函数 $\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)}$ 是周期为 $T=2\pi/\omega_0$ 的慢变周期函数. 于是，平均功率函数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)}\approx-\frac{1}{T}\int_0^T[\pm F(x^*(t),\dot{x}^*(t),\cdots,x^{*(n-1)}(t),x^{*(n)}(t),x^*(t-\tau),\dot{x}^*(t-\tau),\cdots,x^{*(n-1)}(t-\tau),p)-(\ddot{x}^*(t)+\omega_0^2x^*(t))]\cdot\dot{x}^*(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{T}\int_0^T[\pm F(x^*(t),\dot{x}^*(t),\cdots,x^{*(n-1)}(t),x^{*(n)}(t),x^*(t-\tau),\dot{x}^*(t-\tau),\cdots,x^{*(n-1)}(t-\tau),p)]\cdot\dot{x}^*(t)\mathrm{d}t \tag{8}$$

这表明方程(7)的扰动项中的 $\ddot{x}(t)+\omega_0^2x(t)$ 对该系统的平均功率函数的值没有影响，因而在伪振子方程中不包含该项.

注记2　方程(1)的平凡解 $x=0$ 的稳定性可由线性稳定性分析得到：如果所有特征根都具有非负实部，则 $x=0$ 是渐近稳定的，如果至少存在一个正实部的特征根，则 $x=0$ 是不稳定的. $\delta=\pm1$ 的取值应使上述渐近稳定性的结论与 $h''(0)<0$ 一致.

2　伪振子分析法的证明

我们记 $\dot{x}(t)=y(t)$，则方程(2)可改写为：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=y(t)\\ \dot{y}(t)=-\omega_0^2x(t)-\delta\cdot F(x(t),y(t),\cdots,y^{(n-2)}(t),y^{(n-1)}(t),x(t-\tau),y(t-\tau)\cdots,y^{(n-2)}(t-\tau),p)\end{cases} \tag{9}$$

注意到，在分岔点附近，上述方程组可视为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=y(t)\\ \dot{y}(t)=-\omega_0^2x(t)\end{cases} \tag{10}$$

的小扰动方程，而后者的解可表示为

$$x(t)=\varphi(t,a)=a\cos(\omega_0t+\theta),\quad y(t)=\psi(t,a)=-a\omega_0\sin(\omega_0t+\theta) \tag{11}$$

在相平面 (x,y) 上，此周期解为一条闭轨（记为 Γ_a），满足

$$x^2+\frac{y^2}{\omega_0^2}=a^2$$

闭轨(11)上的任一点，特别地，由正 x 轴上的点 $(a,0)$ 沿此闭轨经时间 $T=2\pi/\omega_0$ 后又返回到该点. 我们要证明，对充分小的 ε，在一定条件下，方程(9)也存在平面上的一条闭轨，其周期近似等于 $T=2\pi/\omega_0$，而该闭轨对应于Hopf分岔产生的周期解.

为此，我们需下面的预备知识[33]：

定义1　集合 A 称为方程(9)的不变集，如果对一切 $t\in\mathbb{R}$，方程(9)的解满足 $x(t)\in A$；集合 A 称为方程(9)的正(负)不变集，如果对一切 $t>0(t<0)$ 有 $x(t)\in A$.

引理1　设集合 A 是方程(9)的有界正不变集，且有方程(9)的轨线进入 A，则 A 包含平衡点或极限环.

另外，容易证明

引理2　设方程

$$\dot{x}(t)=f(x),x(0)=x_0 \tag{12}$$

在区间 $[0,T]$ 上的解存在，记为 $x(t,x_0),t\in[0,T]$，其中 $f(x)$ 是连续函数. 设 $g(t)$ 是区间 $[0,T]$ 上的连续函数，那么方程

$$\dot{x}(t)=f(x)+g(x),\quad x(0)=x_0 \tag{13}$$

在区间 $[0,T]$ 上的解也存在，记为 $X(t,x_0),t\in[0,T]$，并且有

$$|x(t,x_0)-X(t,x_0)|\leqslant MT \tag{14}$$

其中 M 是 $|g(x)|$ 在 $[0,T]$ 上的一个上界.

现在我们定义函数 $M(x,y)$ 和 $\Phi(a)$ 如下：

$$M(x,y)=x^2+\frac{y^2}{\omega_0^2} \tag{15}$$

$$\Phi(a)=-\frac{2\delta}{\omega_0^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}[F(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x^{(n)}(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\cdots,x^{(n-1)}(t-\tau),p)]\dot{x}(t)\mathrm{d}t \tag{16}$$

那么有

定理1　如下结论成立：

(1) 对充分小的 $\varepsilon=|p-p_0|$，方程(9)在方程(10)的闭轨 $\Gamma_a:x^2+\frac{y^2}{\omega_0^2}=a^2$ 附近有闭轨的必要条

件是 $\Phi(a)=0$.

(2) 若 $a_0>0$, $\Phi(a_0)=0$, 且 $\Phi(a)$ 在 $a=a_0$ 处不取极值，则对充分小的 ε，方程(9 在 Γ_{a_0} 附近有闭轨.

(3) 如果 $\Phi(a_0)=\cdots=\Phi^{(2k)}(a_0)=0$, $\Phi^{(2k+1)}(a_0)<0$，则对充分小的 ε，方程(9)在 Γ_{a_0} 附近有稳定的闭轨. 如果 $\Phi^{(2k+1)}(a_0)>0$，则结论中的闭轨不稳定.

证明　首先，直接计算可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right|_{(9)}=2x\dot{x}+\frac{2y\dot{y}}{\omega_0^2}=-\frac{2\delta}{\omega_0^2}[F(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x^{(n)}(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\cdots,x^{(n-1)}(t-\tau),p)]\dot{x}(t)\mathrm{d}t$$

当 p 充分接近 p_0 时有

$$|-\delta\cdot F(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x^{(n)}(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\cdots,x^{(n-1)}(t-\tau),p)|_{(11)}\approx 0 \tag{17}$$

从而，方程(9)从点 $(a,0)$ 出发的轨线：

$$x=\varphi_p(t,a),\quad y=\psi_p(t,a) \tag{18}$$

必经过时间 $T_p(a)$ 后又返回到正 x 轴上. 函数 $M(x,y)$ 沿轨线(18)经时间 $T_p(a)$ 后的改变量为

$$\Phi_p(a)=M(\varphi_p(T_p(a),a),0)-M(a,0)=\int_0^{T_p(a)}\left.\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right|_{(9)}\mathrm{d}t=-\frac{2\delta}{\omega_0^2}\int_0^{T_p(a)}[F(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t),x^{(n)}(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\cdots,x^{(n-1)}(t-\tau),p)]\dot{x}(t)\mathrm{d}t$$

其中 $x=\varphi_p(t,a)$, $y=\psi_p(t,a)$. 如果方程(9)有闭轨，则上述改变量应为零.

由解对参数、初值的连续依赖性及引理 2，对任给的 $\varepsilon_1>0$，存在 $\delta_1>0$，使得当 $|a_1-a|<\delta_1$, $|p-p_0|<\min\{\delta_1,\varepsilon\}$ 时，有

$$|\varphi_p(t,a_1)-\varphi(t,a)|<\varepsilon_1,\ |\psi_p(t,a_1)-\psi(t,a)|<\varepsilon_1,\ |T_p(a_1)-T|<\varepsilon_1 \tag{19}$$

再结合(17)式，只要 p 充分接近 p_0, a_1 充分接近 a, $\Phi_p(a_1)$ 就能充分接近 $\Phi(a)$.

若 $\Phi(a)\neq 0$，则当 p 充分接近 p_0, a_1 充分接近 a 时应有 $\Phi_p(a)\neq 0$，即方程(9)从点 $(a_1,0)$ 出发的轨线不是闭轨. 由解对初值的连续依赖性，当 p 充分接近 p_0，方程(9)从点 $(a_1,0)$ 附近出发的轨线都不是闭轨. 这与定理中(1)的条件矛盾，从而定理 1 中的结论(1)得证.

如果 $\Phi(a_0)=0$，且 $\Phi(a)$ 在 $a=a_0$ 处不取极值，那么对任给的 $\varepsilon_1>0$，存在 $0<\delta_1<\varepsilon_1$，使得 $\Phi(a_0-\delta_1)$, $\Phi(a_0+\delta_1)$ 异号. 从而当 p 充分接近 p_0，有 $\Phi_p(a_0-\delta_1)$, $\Phi_p(a_0+\delta_1)$ 异号. 于是当 p 充分接近 p_0 时，存在 $a_p\in(a_0-\delta_1,a_0+\delta_1)\subset(a_0-\varepsilon_1,a_0+\varepsilon_1)$ 使 $\Phi_p(a_p)=0$. 即对任给的 $\varepsilon_1>0$，当 p 充分接近 p_0，方程(9)从 x 轴上区间 $(a_0-\varepsilon_1,a_0+\varepsilon_1)$ 内的点 $(a_p,0)$ 出发的轨线是闭轨，再利用不等式(19)知该闭轨 Γ_{a_0} 在闭轨附近. 定理 1 的结论(2)证完.

如果 $\Phi(a_0)=\cdots=\Phi^{(2k)}(a_0)=0$, $\Phi^{(2k+1)}(a_0)<0$，即 $\Phi(a)$ 在 $a=a_0$ 处不取极值，故存在 $\delta_1>0$ 满足 $a_0-\delta_1>0$，使得 $\Phi(a_0-\delta_1)>0$, $\Phi(a_0+\delta_1)<0$. 从而当 p 充分接近 p_0 时有

$$\Phi(a_0-\delta_1)>0,\ \Phi(a_0+\delta_1)<0$$

由 $\Phi_p(a)$ 的定义及上式可知方程(9)从点 $(a_0-\delta,0)$ 出发的轨线再与正 x 轴相交时，交点在点 $(a_0-\delta,0)$ 的右侧；而从点 $(a_0+\delta,0)$ 出发的轨线再与正 x 轴相交时，交点在点 $(a_0+\delta,0)$ 的左侧. 这两段轨线与正 x 轴上连接这两段轨线段的两个区间围成一个环形区域 R. 显然 R 是正不变集，利用引理 1，区域 R 内有方程(9)的稳定极限环. 与结论(2)相仿，这个极限环应在 Γ_{a_0} 附近.

同理可证 $\Phi(a_0)=\cdots=\Phi^{(2k)}(a_0)=0$, $\Phi^{(2k+1)}(a_0)>0$ 时的情况. 定理 1 证毕!

进一步，由(6)式与(16)式可知

$$h(a)=\frac{\omega_0^3}{4\pi}\Phi(a) \tag{20}$$

再结合定理 1 可将伪振子分析法的主要结论推广为

定理 2　如下结论成立：

(1) 对充分小的 $\varepsilon=|p-p_0|$，方程(9)在闭轨 $\Gamma_a: x^2+\dfrac{y^2}{\omega_0^2}=a^2$ 附近有闭轨的必要条件是 $h(a)=0$.

(2) 如果存在 $a_0>0$ 使得 $h(a_0)=0$，且 $h(a)$ 在 $a=a_0$ 不取极值，则对充分小的 ε，方程(9)在 Γ_{a_0} 附近有闭轨.

(3) 如果存在 a_0 使得 $h(a_0)=\cdots=h^{(2k)}(a_0)=0$, $h^{(2k+1)}(a_0)<0$，则对充分小的 ε，方程(9)在 Γ_{a_0} 附近有稳定的闭轨. 如果 $h^{(2k+1)}(a_0)>0$，则结论中的闭轨不稳定.

很明显，上述结论(3)中 $k=0$ 对应于伪振子分析法关于分岔周期解稳定性的结论，且分岔点附

近,分岔周期解可表示为

$$x(t)\approx a_0\cos(\omega_0 t+\theta),\quad y(t)\approx -a_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\theta),$$

3 两个算例

例1 考虑时滞 van der Pol 方程

$$\ddot{x}(t)+\dot{x}(t-\tau)+\frac{9}{2}x^2(t-\tau)\dot{x}(t-\tau)+x(t-2\tau)=0,\quad (0<\tau<\pi/4) \tag{21}$$

对应于平凡解 $x=0$ 的线性化微分方程的特征方程为

$$D(\lambda,\tau)=\lambda^2+\lambda e^{-\lambda\tau}+e^{-2\lambda\tau}=0 \tag{22}$$

由[13]可知,该方程在 $\tau=\pi/6$ 处有一对共轭纯虚根 $\lambda=\pm i$,且其它的根的实部均小于零,且有

$$\left(\Re\frac{d\lambda}{d\tau}\right)\bigg|_{\tau=\pi/6}=1\neq 0 \tag{23}$$

从而方程(21)在 $\tau=\pi/6\approx 0.5236$ 处发生 Hopf 分岔.

表1 例1中的分岔周期解的幅值

Table 1 The amplitude of bifurcated periodic solution of Example 1

Parameter τ	Amplitude of pseudo - oscillator analysis a_0	Numerical amplitude
0.53	0.0992	0.0995
0.54	0.1585	0.1587
0.55	0.2008	0.2013
0.56	0.2354	0.2365
0.57	0.2654	0.2669
0.58	0.2922	0.2943

在分岔点附近,利用 $x(t)=a\cos(\omega_0 t+\theta)$,$(\omega_0=1)$,直接计算可知伪功率函数为

$$h(a)=-\frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}\delta[\ddot{x}(t)+\dot{x}(t-\tau)+\frac{9}{2}x^2(t-\tau)\dot{x}(t-\tau)+x(t-2\tau)]\dot{x}(t)dt=\frac{\delta}{2}[a^2\cos(\tau)(2\sin(\tau)-1)-\frac{9}{8}a^4\cos(\tau)] \tag{24}$$

由于当 $\tau=0.5$ 时,平衡点 $x=0$ 是渐近稳定的,因而 $\delta=1$. 由(24)式知:当 $\tau>\pi/6$ 时,有 $h''(0)=\frac{a}{2}\cos(\tau)(2\sin(\tau)-1)>0$,故此时 $x=0$ 不稳定,但存在

$$a_0=\sqrt{\frac{8(2\sin(\tau)-1)}{9}}$$

使得 $h(a_0)=0$,且 $h'(a_0)=-a_0(2\sin(\tau)-1)\cos(\tau)<0$,所以方程(21)在 $\tau=\pi/6$ 处产生的 Hopf 分岔周期解

$$x(t)\approx\sqrt{\frac{8(2\sin(\tau)-1)}{9}}\cos(t+\theta)$$

是稳定的,且分岔是超临界的. 由表1可以看出,在分岔点附近,伪振子分析法和数值计算得到的周期解的幅值吻合得很好,其中数值法幅值利用 Matlab 中 DDE23 算法所得,固定步长为0.005.

例2 考虑一阶时滞方程

$$\dot{x}(t)+(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)x(t-1)-4\varepsilon^{\frac{4}{6}}x^3(t-1)+\frac{24}{5}\varepsilon^{\frac{2}{6}}x^5(t-1)-\frac{64}{35}x^7(t-1)=0 \tag{25}$$

方程在平衡点 $x=0$ 处的线性化方程的特征方程为

$$D(\lambda,\tau)=\lambda+(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)e^{-\lambda}=0 \tag{26}$$

在 $\varepsilon=0$ 处有一对共轭纯虚根 $\lambda=\pm\frac{\pi}{2}i$,其它根的实部均为负,且

$$\left(\Re\frac{d\lambda}{d\varepsilon}\right)\bigg|_{\varepsilon=0}=\frac{2\pi}{4+\pi^2}\neq 0 \tag{27}$$

从而方程(25)在 $\varepsilon=0$ 处发生 Hopf 分岔. 这是一个退化的 Hopf 分岔问题,其分岔周期解的稳定性需要三次以上的非线性项.

在分岔点附近,利用 $x(t)=a\cos(\omega_0 t+\theta)$,$(\omega_0=\frac{\pi}{2})$,直接计算可得

$$h(a)=-\frac{\delta}{4}\pi a^2(a^6-3\varepsilon^{\frac{2}{6}}a^4+3\varepsilon^{\frac{4}{6}}a^2-\varepsilon) \tag{28}$$

当 $\varepsilon=-0.1$ 时,平衡点 $x=0$ 是渐近稳定的,因而取 $\delta=1$. 由(28)式知:当 $\varepsilon>0$ 时,有 $h''(0)=\frac{\pi\varepsilon}{4}>0$,故此时 $x=0$ 不稳定,但存在 $a_0=\sqrt[6]{\varepsilon}$ 使得 $h(a_0)=0$,且

$$h'(\sqrt[6]{\varepsilon})=-\frac{\pi}{4}(8a^7-18\varepsilon^{\frac{2}{6}}a^5+12\varepsilon^{\frac{4}{6}}a^3-2\varepsilon a)_{a=\sqrt[6]{\varepsilon}}=0$$

$$h''(\sqrt[6]{\varepsilon})=-\frac{\pi}{4}(56a^6-90\varepsilon^{\frac{2}{6}}a^4+36\varepsilon^{\frac{4}{6}}a^2-2\varepsilon)_{a=\sqrt[6]{\varepsilon}}=0$$

$$h^{(3)}=-\frac{\pi}{4}(336a^5-360\varepsilon^{\frac{2}{6}}a^3+72\varepsilon^{\frac{4}{6}}a)_{a=\sqrt[6]{\varepsilon}}=-12\pi\varepsilon^{\frac{5}{6}}<0$$

因此,当 $\varepsilon>0$ 时,分岔产生3重稳定周期解 $x(t)\approx\sqrt[6]{\varepsilon}\cos(\frac{\pi}{2}t+\theta)$,此时分岔是超临界的. 表2比较了伪振子分析法得到的结果和数值计算结果,两者吻

合得较好,其中数值幅值是利用 Matlab 中 DDE23 算法所得,固定步长为 0.005.

表 2　例 2 中的分岔周期解的幅值

Table 2　The amplitude of bifurcated periodic solution of Example 2

Parameter ε	Amplitude of pseudo – oscillator analysis a_0	Numerical amplitude
0.1	0.6813	0.6568
0.15	0.7289	0.7443
0.2	0.7647	0.7948
0.25	0.7937	0.8281
0.3	0.8182	0.8574
0.35	0.8395	0.8831

4　结论

伪振子分析法是研究单变量时滞系统 Hopf 分岔周期解的一种新方法,具有分析过程简单、计算量小、计算精度较高等方面的优点. 本文采用闭轨分支出极限环的思路给出了伪振子分析法的一种严格数学证明,所得到的结论推广了伪振子分析法的主要结论,使得伪振子分析法可用于高阶 Hopf 分岔问题. 但伪振子分析法用到了非线性动力学中的平均法,使得一些非线性项的贡献不能在伪功率函数中得到体现,从而使该方法的应用范围受到影响.

参　考　文　献

1　Zhao Y H. Stability of a two-dimensional airfoil with time-delayed feedback control. *Journal of Fluids and Structures*, 2009, 25:1 ~ 25

2　Shahrzad P, Mahzooon M. Limit cycle flutter of airfoils in steady and unsteady flows. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 256:213 ~ 225

3　M. Luciano V, Juan C J, Eduardo R C. Analysis of compliance between the cutting tool and the workpiece on the stability of a turning process. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2008,48:1054 ~ 1062

4　Wahia P, Chatterjee A . Self-interrupted regenerative metal cutting in turning. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008,43:111 ~ 123

5　Huigol R R . Hopf friedrichs bifurcation and the hunting of a railway axle. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1978, 36:85 ~ 94

6　苏本才. 机车蛇形运动的分叉特征. 振动与冲击,1992, 1:69 ~ 76 (Su B C. The bifurcation of the locomotive crawl vibration. *Journal of Vibration and Shock*, 1992,1:69 ~ 76 (in Chinese))

7　Semmler W . A macroeconomic limit cycle with financial perturbations. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 1987, 8:469 ~ 495

8　Franke R ,Asada T . A Keynes-Goodwin model of the business cycle. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 1994,24:273 ~ 295

9　Glass L,Guevara M R ,Shrier A . Bifurcation and chaos in a periodically stimulated cardiac oscillator. *Physica D*, 1983,7:89 ~ 101

10　Nearing B D ,Huang A H ,Verrier R L . Dynamic tracking of cardiac vulnerability by complex demodulation of the T-wave . *Science*, 1991,252:437 ~ 440

11　Hale J K . Theory of Functional Differential Equation . New York::Springer-Verlag,1977

12　Meng X Z,Wei J J. Stability and bifurcation of mutual system with time delay. *Chaos,Solutions and Fractals*, 2004, 21:729 ~ 940

13　Yu W W,Cao J D. Hopf bifurcation and stability of periodic solutions for van der Pol equation with time delay. *Nonlinear Analysis*, 2005,62:141 ~ 165

14　Ma Z P,Huo H F,Li C Y. Stability and Hopf bifurcation analysis on a predator-prey model with discrete and distributed delays. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, 2009,10:1160 ~ 1172

15　Nayfeh A H,Chin C M,Pratt J. Perturbation Methods in nonlinear dynamics: Applications to machining dynamics. *Journal of Manufacturing Science and Technology*, 1997, 119:485 ~ 493

16　Hu H Y,Wang Z H . Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag,2002

17　Das S L,Chatterjee A. Multiple scales without center manifold reduction for delay differential equations near Hopf bifurcations. *Nonlinear Dynamics*, 2002,30:323 ~ 335

18　Gilsinn D E. Estimating critical Hopf bifurcation parameters for a second-order delay differential equation with application to machine tool chatter. *Nonlinear Dynamics*, 2002,30:103 ~ 154

19　Francoise J P,Llibre J. Analytical study of a triple Hopf bifurcation in a tritrophic food chain model. *Applied Mathematics and Computation*, 2011,217:7146 ~ 7154

20　Atay F M. Delayed-feedback control of oscillation in nonlinear planar systems. *International Journal of Control*, 2002,75:297 ~ 304

21 Wang H L, Hu H Y. Bifurcation analysis of a delayed dynamic system via method of multiple scales and shooting technique. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, 15: 425 ~ 450

22 Xu J, Chung K W. A perturbation incremental scheme for studying Hopf bifurcation in delayed differential systems. *Science in China series E: Technological science*, 2009, 52: 698 ~ 708

23 Nayfeh A H. Order reduction of retarded nonlinear systems-the method of multiple scales versus center-manifold reduction. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 51: 483 ~ 500

24 Wang Z H, Hu H Y. Pseudo-oscillator analysis of scalar nonlinear time-delay systems near a Hopf bifurcation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17: 2805 ~ 2814

25 李骊,叶红玲.强非线性系统周期解的能量法.北京:科学出版社,2008 (Li L, Ye H L. Energy Analysis for the Periodic Solutions of Strongly Nonlinear Systems. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))

26 Hale J K. Averaging method for differential equations with retarded arguments and a small parameter. *Journal of Differential Equations*, 1966, 2: 57 ~ 73

27 Li J, Wang Z H. Hopf bifurcation of a nonlinear Lasota-Wazewska-type population model with maturation delay. *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems. Series B: Applications & Algorithms*, 2007, 14: 611 ~ 623

28 Gao F, Wang H L, Wang Z H. Hopf bifurcation of a nonlinear delayed system of machine tool vibration via pseudo-oscillator analysis. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2007, 8: 1561 ~ 1568

29 Li J Y. Hopf bifurcation of the sunflower equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10: 2574 ~ 2580

30 李静.一类经济模型的分岔周期解.动力学与控制学报,2010,8:380 ~ 384 (Li J. Hopf bifurcation of an economic model . *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8: 380 ~ 384 (in Chinese))

31 Zhang L L, Huang L H, Zhang Z Z. Hopf bifurcation of the maglev time-delay feedback system via pseudo-oscillator analysis. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, 52: 667 ~ 673

32 Li J Y, Wang Z H. Local Hopf bifurcation of complex nonlinear systems with time-delay. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2009, 19: 1069 ~ 1079

33 张锦炎,冯贝叶.常微分方程几何理论与分支问题.北京:北京大学出版社,2000:237 ~ 243 (Zhang J Y, Feng B Y. Geometrical theory and bifurcation of ordinary differential equations. Beijing: Peking University Press, 2000: 237 ~ 243 (in Chinese))

PROOF OF THE PSEUDO-OSCILLATOR ANALYSIS AND ITS APPLICATION ON HIGH-ORDER HOPF BIFURCATION*

Yu Yajuan[1,3] Wang Zaihua[1,2†]

(1. *State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, *Nanjing* 210016, *China*)

(2. *Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing* 211101, *China*)

(3. *School of Mathematics and Physics, Changzhou University, Changzhou* 213164, *China*)

Abstract Based on the idea of bifurcating a limit cycle from a closed orbit of a nonlinear system, this paper presents a mathematical proof of the pseudo-oscillator analysis developed recently. The result generalizes the main conclusions of the pseudo-oscillator analysis, and it can also be used to study the problem of high-order Hopf bifurcation, whose stability requires nonlinear terms with order larger than 3. Two illustrative examples are given for demonstration.

Key words pseudo-oscillator analysis, Hopf bifurcation, time-delay, limit circle

Received 29 November 2011, revised 5 January 2012.

* The project supported by National Natural Science Foundation of China (11032009) and National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China (10825207)

† Corresponding author E-mail: zhwang@nuaa.edu.cn