第 10 卷第 3 期 2012 年 9 月
1672-6553/2012/10(3)/199-3

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 10 No. 3
Sep. 2012

利用变量变换构造耗散系统 Lagrange 函数

丁光涛†

（安徽师范大学物理与电子信息学院，芜湖 241000）

摘要 提出变系数耗散系统变分法逆问题的一种间接解法. 首先利用坐标和时间变量变换将系统运动微分方程化为自伴随方程，计算得到 Lagrange 函数后，再变换为原来变量以得到给定方程的 Lagrange 函数. 给出两个例子以说明所得结果的应用.

关键词 逆问题， 耗散系统， 自伴随性， Lagrange 函数

引 言

变分法逆问题研究给定的微分方程系统能否从变分原理中导出，问题的关键在于能否构造出对应的 Lagrange 函数，将方程写成等效的 Lagrange 方程形式[1-4]. 实现系统的 Lagrange 化以后，可以进一步讨论系统的 Hamilton 化和量子化，或利用分析力学方法求解问题. 现代科学技术中越来越多领域利用微分方程模型来描述系统运动规律，因此变分法逆问题不仅是数学力学和物理学的热门课题，而且已经推广到其它学科领域[1,5-7].

已经证明，Lagrange 方程是自伴随的，反过来，如果给定的方程是自伴随的，则可以直接计算得到 Lagrange 方程；如果方程是非自伴随的，那么可以利用变换理论先将方程化作自伴随的. 这样的变换有多种，其中既有保持变量不变的，又有利用变量变换的. 文献[2]中深入讨论了前一类变换方法，也涉及后一类变换，但只简单讨论了不包含时间变量的点(坐标)变换. 本文深入讨论后一类变换方法，以变系数耗散系统为例，研究如何确定包含时间变量的点变换，将微分方程变换成自伴随的. 耗散系统是普遍存在的系统，研究这种系统的变分法逆问题，实现其分析力学化，具有重要的理论意义和实用价值，长期以来一直是逆问题研究的重点和热点[1,2,4,6-11]. 本文最后举例用变量变换构造具体耗散系统的 Lagrange 函数.

1 一维系统的自伴随条件和变量变换

研究二阶常微分方程

$$F=A(t,q,\dot q)\ddot q+B(t,q,\dot q)=0 \tag{1}$$

满足下列条件

$$\frac{\partial B}{\partial \dot q}=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q}\dot q \tag{2}$$

则方程(1)是自伴随的，其 Lagrange 函数可以直接计算得到，如 Engels 第一方法

$$L(t,q,\dot q)=-q\int_0^1 \mathrm{d}\tau F(t,\tau q,\tau\dot q,\tau\ddot q)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'(\tau q)A(t,\tau q,\tau\tau'\dot q)\dot q \tag{3}$$

如果方程(1)不满足自伴随条件(2)，则可以在保持变量不变情况下，将方程变换为

$$h(t,q,\dot q)[A(t,q,\dot q)\ddot q+B(t,q,\dot q)]=A'(t,q,\dot q)\ddot q+B'(t,q,\dot q) \tag{4}$$

使(4)式满足自伴随条件，再计算 Lagrange 函数.

对非自伴随方程，还可以利用变量变换将其变换成新变量形式

$$M(\tau,x,x')x''+N(\tau,x,x')=0 \tag{5}$$

式中 τ, x 为新变量，且

$$x'=\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau,\quad x''=\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}\tau^2 \tag{6}$$

恰当选择变量变换可能使方程(5)满足自伴随条件，那么就可以计算新变量下 Lagrange 函数，然后再变换回到原来变量. 变量变换有不同类型，如

$$\tau=t,\quad x=x(q) \tag{7}$$

$$\tau=t,\quad x=x(t,q) \tag{8}$$

$$\tau=\tau(t,q,\dot q),\quad x=x(t,q,\dot q) \tag{9}$$

下面将深入研究变换(8)，而变换(7)是其特例. 文献[2]中列出了变换(9)，但是在这种普遍的变换下，一般不能保持 Lagrange 方程形式不变，因

2011-09-22 收到第 1 稿，2011-12-20 收到修改稿.

† 通讯作者 E-mail：dgt695@sina.com

此,本文不讨论.

2 一类耗散系统逆问题的变量变换解法

研究一类一维变系数耗散系统

$$\ddot{q}+f(t,q)\dot{q}^2+g(t,q)\dot{q}+h(t,q)=0 \tag{10}$$

由于不满足条件(2),故方程(10)不是自伴随的.引入变换(8),方程(10)变换为

$$\ddot{x}(\frac{\partial x}{\partial q})^{-1}+[f(\frac{\partial x}{\partial q})-\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}](\frac{\partial x}{\partial q})^{-3}\dot{x}^2+ [2\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}-2\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial q}\frac{\partial x}{\partial q}-2f\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial q}+ g(\frac{\partial x}{\partial q})^2](\frac{\partial x}{\partial q})^{-3}\dot{x}-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(\frac{\partial x}{\partial q})^{-1}+ 2\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial q}(\frac{\partial x}{\partial q})^{-2}+f(\frac{\partial x}{\partial t})^2(\frac{\partial x}{\partial q})^{-2}- \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}(\frac{\partial x}{\partial t})^2(\frac{\partial x}{\partial q})^{-3}-g(\frac{\partial x}{\partial q})^{-1}(\frac{\partial x}{\partial t})+h=0 \tag{11}$$

根据条件(2),如果方程(11)是自伴随的,则应满足下列条件

$$2(f\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial^2 x}{\partial q^2})(\frac{\partial x}{\partial q})^{-3}\dot{x}+2\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}(\frac{\partial x}{\partial q})^{-3}- 2\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial q}(\frac{\partial x}{\partial q})^{-2}-2f\frac{\partial x}{\partial t}(\frac{\partial x}{\partial q})^{-2}+g(\frac{\partial x}{\partial q})^{-1}= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial x}{\partial q})^{-1}\dot{x}+\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial x}{\partial q})^{-1} \tag{12}$$

由此式出发,并经过化简得到

$$2f(\frac{\partial x}{\partial q})-\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}=0,\quad 4f\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial q}+g\frac{\partial x}{\partial q}=0 \tag{13}$$

变换(8)由方程(13)确定.

以新变量 t 和 x 表示的方程(10)满足自伴随条件,利用式(3)计算得到 $L(t,x,\dot{x})$,再变换回到原来变量,就得到与方程(10)对应的 $L(t,q,\dot{q})$.

3 算例

例1 变系数平方阻尼运动

$$\ddot{q}+\frac{1}{q}\dot{q}=0 \tag{14}$$

对比方程(10)并引入变换(8),方程(13)写成

$$\frac{2}{q}\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}=0,\quad \frac{4}{q}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial q}=0 \tag{15}$$

方程(15)的一个解为

$$x=\frac{1}{3}q^3 \tag{16}$$

方程(14)变换成

$$(3x)^{-2/3}\ddot{x}-(3x)^{-3/5}\dot{x}^2=0 \tag{17}$$

容易证明方程(17)是自伴随的. 由式(3)得到

$$L(x,\dot{x})=\frac{1}{2}(3x)^{-2/3}\dot{x}^2 \tag{18}$$

变换回原变量,得到

$$L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}q^2\dot{q}^2 \tag{19}$$

文献[2]中讨论过这种运动,运动方程为

$$q\ddot{q}+\dot{q}^2=0 \tag{20}$$

从方程特点出发,直接引入变换

$$q'=\frac{1}{2}q^2$$

方程(20)写成

$$\ddot{q}'=0 \tag{21}$$

对应的 Lagrange 函数为

$$L'=\frac{1}{2}\dot{q}'^2=\frac{1}{2}q^2\dot{q}^2 \tag{22}$$

结果与式(19)相同,但是式(22)利用的是特殊方法,对 $f=f(q)$ 一般情形不能使用,而本文前面提出的方法,具有较大的普遍性.

例2 Lane-Emden 方程[9,12]

$$\frac{d^2\psi}{d\xi}+\frac{2}{\xi}\frac{d\psi}{d\xi}+\psi^k=0 \tag{23}$$

方程描述多方指数为 k 的流体,在自引力作用下形成球对称星球的半径 ξ 和密度 ψ 的关系. 对照方程(10),$f=0$,由方程(13)前面一个方程,可设变换(8)为

$$x=\varphi(\xi)\psi \tag{24}$$

代入方程(13)后面一个得到

$$-d\varphi/d\xi+2\varphi/\xi=0 \tag{25}$$

解得 $\varphi=\xi^2$ 即

$$x=\xi^2\psi,\quad \psi=\xi^{-2}x \tag{26}$$

方程(23)变换为自伴随方程

$$\xi^{-2}\frac{d^2x}{d\xi^2}-2\xi^{-3}\frac{dx}{d\xi}+2\xi^{-4}x+\xi^{-2k}x^k=0 \tag{27}$$

由方程(3)计算得到

$$L=\frac{1}{2}\xi^{-2}(\frac{dx}{d\xi})^2-\xi^{-4}x^2-\frac{1}{k+1}\xi^{-2k}x^{k+1} \tag{28}$$

变换为原变量,得到

$$L=\frac{1}{2}\xi^2(\frac{d\psi}{d\xi})^2+2\xi\psi\frac{d\psi}{d\xi}+\psi^2-\frac{1}{k+1}\xi^2\psi^{k+1} \tag{29}$$

由于

$$2\xi\psi\frac{d\psi}{d\xi}+\psi^2=\frac{d}{d\xi}(\xi\psi^2)$$

故式(29)中函数 L 经过规范变换得到[9]

$$L=\frac{1}{2}\xi^2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2-\frac{1}{k+1}\xi^2\psi^{k+1} \tag{30}$$

4　结论

以一维变系数耗散系统为例,提出了利用坐标和时间变量变换求解变分法逆问题的新路径,即利用变换使新变量下运动微分方程满足自伴随条件,在计算得到新变量表示的 Lagrange 函数后,变换回到原来变量的 Lagrange 函数. 我们具体讨论了一种一维变系数耗散系统,导出了对这种系统变量变换应该满足的方程,这是新的结果. 显然,这个方法对一维非耗散系统是适用的,也可以直接推广到简单的对称的多维耗散系统,但是如何推广到一般的比较复杂的多维耗散系统,还有待进一步研究.

参　考　文　献

1 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅰ. New York:Spinger-Verlag. 1978

2 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅱ. New York:Spinger-Verlag. 1983

3 Lopuszanski J. The inverse varitional problem in classical mechanics. Singapore: World Scientific,1999

4 梅凤翔. 分析力学专题. 北京:北京工业学院出版社, 1988 (Mei F X. Special problems of analytical mechanics. Beijing: Beijing Institute Technology Press, 1988 (in Chinese))

5 丁光涛,陶松涛. 一阶 Lagrange 力学逆问题及其在非力学领域中的应用. 科学通报,2008,53: 872 ~ 876 (Ding G T, Tao S T. Inverse problem of first-order Lagrangian mechanics and its application in non-mechanics subjects. *Chin. Sci. Bull.* 2008,53: 872 ~ 876 (in Chinese))

6 Nucci M C, Leach P G L. Lagrangians galore. *J. Math. Phys.*, 2007,48 123510

7 Riewe F. Mechanics with fractional derivatives. *Phys. Rev.*, 1997, E55: 3581 ~ 3592

8 Musielak Z E. Standard and non-standard Lagrangians for dissipative dynamical system with variable coefficients. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2008, 41:055205

9 Cieśliński J L, Nikiciuk T. A direct approach to the construction of standard and non-standard Lagrangians for dissipative-like dynamical systems with variable coefficients. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2010,43:17250

10 丁光涛. 从运动方程构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报, 2010,8: 305 ~ 310 (Ding G T. A direct approach to the construction of Lagrangians from the motion equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8: 305 ~ 310 (in Chinese))

11 丁光涛. 一维变系数耗散系统 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的新构造方法. 物理学报,2011,60:044503 (Ding G T. A new approach to the construction of Lagrangians and Hamiltonians for one-dimensional dissipative systems with variable coefficients. *Acta Phys. Sin*, 2011,60:044503(in Chinese))

12 Shapiro S L, Teukolsky S A. Black Holes, White Dwarfs, Newtron Stars. New York: Wiley, 1983

THE CONSTRUCTION OF LAGRANGIANS FOR DISSIPATIVE-LIKE SYSTEMS BY USING THE TRANSFORMATIONS OF VARIABLES

Ding Guangtao†

(*The College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

Abstract An indirect approach to the construction of Langrangians for dissipative-like systems was presented. First, the differential equations of motion were transformed into the self-adjoint equations with transforming the coordinates and time variables. Secondly, a Lagrangian can be computed from the self-adjoint equations of motion. Lastly, the Lagrangian of the given equations was obtained by the inverse transformation of the coordinates and time variables. Two examples were given to illustrate the applications of the results.

Key words inverse problem, dissipative system, self-adjointness, Lagrangian

Received 22 September 2011, revised 20 December 2011.

† Corresponding author E-mail: dgt695@ sina. com