

# 两自由度碰撞振动系统的粘滞运动和隆起现象\*

肖化燧 乐源 谢建华

(西南交通大学力学与工程学院, 成都 610031)

**摘要** 考虑了一类两自由度多运动约束的碰撞振动系统力学模型, 根据质块碰撞时可能出现的粘滞运动情况, 分别求出了各种可能粘滞运动情况时的解析解. 通过对粘滞运动判定的必要条件, 证明了当约束分别位于质块的异侧时, 两质块不会出现同时粘滞的运动, 即所谓的暂时“静止”状态. 当约束分别位于质块的同侧时, 通过对参数的调整, 可能出现同时粘滞的暂时“静止”状态. 最后通过数值计算, 分别在考虑的两种情况中, 对于外激励频率较小时, 验证了周期粘滞运动. 并且在约束位于质块的同侧时, 模拟出了两质块同时粘滞的暂时“静止”状态, 对于约束分别位于两质块的异侧时, 模拟出了周期粘滞运动和所谓的隆起现象. 由数值计算可以看到, 暂时的“静止”状态一般是由两个质块分别先后进入和离开粘滞运动而发生和结束的, 而不是两个质块同时粘滞和同时结束.

**关键词** 两自由度, 多约束, 碰撞振动, 粘滞运动

## 引言

在机械系统中, 由于生产误差或制作需要, 机械装置的零部件之间不可避免的存在间隙. 在外激励作用下, 零部件之间将发生相互碰撞. 在机械系统优化设计、高速列车动力学分析、各种航天器、核电站及噪声控制等方面, 碰撞振动问题的研究都具有重要意义. 一方面, 人们利用碰撞振动的动力学原理, 设计和制作各种机械, 如振动筛、冲击钻、打桩机等. 另一方面, 人们又不得不避免和隔离各种有害的碰撞, 如桥梁的坍塌、精密仪器的失效、噪声干扰等.

近年来, 国内外学者对非线性碰撞振动系统进行了广泛的研究并取得了相关成果. Shaw<sup>[1]</sup>等研究了单自由度和两自由度振子具有对称约束的碰撞系统. Toulemonde<sup>[2]</sup>等研究了单自由度和多自由度系统中的周期粘滞运动. Wagg<sup>[3-4]</sup>等对两自由度和多自由度系统的周期运动、粘滞运动及隆起现象都做了大量的研究, 并进行了数字模拟. 但 Wagg 等没有考虑奇异的情况及同时粘滞的情况. 谢建华<sup>[5-7]</sup>等给出了两自由度碰撞系统主要分岔类型及参数临界值的判断准则, 并对碰撞系统中, 当特征值穿越单位圆时的各种复杂情况进行了研究. 李

飞<sup>[8-9]</sup>等研究了多约束的碰撞振动, 给出了粘滞时系统之间的转换关系, 但没有给出同时粘滞的实例. 本文在对两自由度系统不同约束情况进行分析的基础上, 给出了各种粘滞条件下的解析解, 并对相关现象进行了数字验证. 验证了隆起现象及各种粘滞运动的存在性.

## 1 系统的力学模型

这里考虑一个具有多运动约束限制的两自由度碰撞振动系统的力学模型, 如图 1 所示.

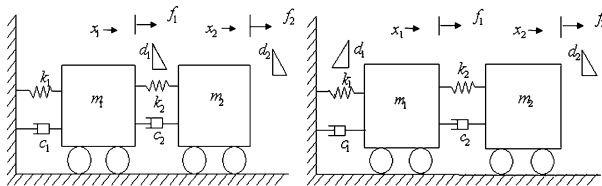


图 1 (a) 位移约束在同侧; (b) 位移约束在异侧

Fig. 1 (a) Displacement constraints in the same side  
(b) Displacement constraints in the different side

质块 1(2) 的质量为  $m_1(m_2)$ , 由刚度为  $k_1(k_2)$  的线性弹簧和阻尼系数为  $c_1(c_2)$  的线性阻尼器相互连接. 两个质块都只做水平运动, 分别受到简谐的外激励力  $f_i = A_i \cos(\delta t)$ ,  $i = 1, 2$  的作用. 质块 1(2) 只和与它距离为  $d_1(d_2)$  的约束发生碰撞. 假设

模型中的阻尼是 Rayleigh 型阻尼,碰撞过程持续时间无穷小(可略去不计),碰撞恢复系数分别为  $r_1$  和  $r_2$ . 由牛顿第二定律建立运动时的运动方程为:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) = f_2 \end{cases} \quad (1)$$

这里,  $\dot{x}_i$  表示位移对时间  $t$  的一阶导数,  $\ddot{x}_i$  表示对时间  $t$  的二阶导数.

$$\text{取无量纲化参数为: } \omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, T = \omega t, \Omega = \frac{\delta}{\omega}, \epsilon$$

$$= \frac{c_2}{2\sqrt{k_2 m_2}}, \mu_{mi} = \frac{m_i}{m_2}, \mu_{ki} = \frac{k_i}{k_2}, \mu_{ci} = \frac{c_i}{c_2}, y_i = \frac{x_i}{A_1 + A_2},$$

令  $\psi = [\psi_1, \psi_2]^T$  是无量纲方程的正则模态矩阵,进行坐标变换  $Y = \psi Z$ , 运动方程变形为:

$$I\ddot{Z} + 2\epsilon\Lambda\dot{Z} + \Lambda Z = \tilde{f} \cos(\Omega T) \quad (2)$$

其中  $Z = [z_1, z_2]^T$ ,  $I$  为二阶单位阵,  $\Lambda = \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2]$ ,  $\tilde{f} = \psi^T f$ ,  $\omega_i$  是无碰撞情况下系统的固有频率.

令  $\epsilon_i = \epsilon \omega_i$ , 对于  $0 < \epsilon_i < 1$  的欠阻尼情况, 方程(2)存在解析解:

$$z_i = e^{-\epsilon_i \omega_i (T - t_0)} (B_i \cos(\omega_{di} (T - t_0)) + C_i \sin(\omega_{di} (T - t_0))) + Q_i \cos(\Omega T - \phi_i) \quad (3)$$

其中,  $\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \epsilon_i^2}$  是阻尼固有频率,  $B_i$  和  $C_i$  是由初值确定的任意常数,

$$Q_i = \frac{\tilde{f}_i}{[(\omega_i^2 - \Omega^2)^2 + (2\epsilon_i \Omega \omega_i)^2]^{1/2}},$$

$$\phi_i = \arctan\left(\frac{2\epsilon_i \Omega \omega_i}{\omega_i^2 - \Omega^2}\right)$$

把这里求出来的精确解,按照变换,迭代回原方程,可以得到原方程两次碰撞之间的解:

$$x_i = (A_1 + A_2) y_i = (A_1 + A_2) \psi_i Z \quad (4)$$

当  $x_i = d_i$  ( $i = 1$  或  $2$ ) 时候,碰撞发生. 这里考虑碰撞的牛顿模型,即在发生碰撞时给碰撞的振子一个速度突变,而其它振子状态保持不变. 对于一个孤立的碰撞发生时,即存在  $x_i = d_i$ , 而  $j \neq i$  的时候  $x_j \neq d_j$ , 碰撞过程由:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t_+) = -r_i \dot{x}_i(t_-), & x_i = d_i \\ \dot{x}_j(t_+) = \dot{x}_j(t_-), & x_j(t_+) = x_j(t_-) \end{cases} \quad (5)$$

然后把碰撞时刻作为初始时刻,该时刻的状态作为初始条件,重新计算原方程的解.

## 2 粘滞运动分析

当碰撞恢复系数  $r_i = 0$  时,质块与约束发生碰

撞后,其速度变为零. 如果此时该质块受到的合力不为零,并且指向约束,则质块和约束将粘靠在一起,直到合力改变方向,将其拉离. 称这种现象为粘滞运动. 对于  $r_i \neq 0$  的弹性碰撞,在一定条件下也会出现粘滞运动. 只是在进入粘滞之前会有一系列减幅振动的碰撞,被称为粘滞颤振序列. 粘滞颤振序列具有以下特点:

(1) 颤振期间,作用于质块上的合力不改变方向,且恒指向约束,即  $F_i d_i > 0$

(2) 碰撞时间间隔逐渐减小,并最终趋近于零.

(3) 碰撞时的速度逐渐减小,并最终趋近于零.

满足以上条件后,振子将进入粘滞运动状态,一旦粘滞发生,该系统变成单自由度系统.

## 3 粘滞运动时候的解析解

### 3.1 粘滞状态 1: 当 $x_1 = d_1$ 时

这时,  $x_1 = d_1, \dot{x}_1 = 0$ , 因此从(1)式可以得到降维的运动方程为:

$$\ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_2} \dot{x}_2 + \frac{k_2}{m_2} (x_2 - d_1) = \frac{A_2}{m_2} \cos(\delta t) \quad (6)$$

此时作用于振子 1 上的合力为:

$$F_1 = c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - d_1 (k_1 + k_2) + A_1 \cos(\delta t) \quad (7)$$

方程(6)有解析的解:

$$x_2 = d_1 + b_2 \cos(\delta t - \phi_2) + e^{-\tilde{\zeta} \tilde{\omega}_n (t - t_s)} [a_1 \cos(\tilde{\omega}_d (t - t_s)) + a_2 \sin(\tilde{\omega}_d (t - t_s))] \quad (8)$$

这里  $\tilde{\omega}_n = \sqrt{k_2/m_2}$ ,  $\tilde{\zeta} = \frac{c_2}{2m_2 \tilde{\omega}_n}$ ,  $\tilde{\omega}_d = \tilde{\omega}_n \sqrt{1 - \tilde{\zeta}^2}$ ,  $b_2 =$

$$\frac{A_2/m_2}{[(\tilde{\omega}_n^2 - \delta^2)^2 + (2\tilde{\zeta}\delta\tilde{\omega}_n)^2]^{1/2}}, \phi_2 = \arctan\left(\frac{2\tilde{\zeta}\delta\tilde{\omega}_n}{\tilde{\omega}_n^2 - \delta^2}\right),$$

$t_s$  是初始时刻,  $a_1$  和  $a_2$  是由初值确定的任意常数. 在粘滞开始的时候  $t_s = t$ , 因此, 在(8)中代入  $t_s = t$  可以求得:

$$\begin{cases} a_1 = x_2(t_s) - d_1 \\ a_2 = \frac{1}{\tilde{\omega}_d} (\dot{x}_2(t_s) + \tilde{\zeta} \tilde{\omega}_n (x_2(t_s) - d_1)) \end{cases} \quad (9)$$

第(8)式的初始条件为, 当  $x_1 = d_1, \dot{x}_1 = 0$  时, 即粘滞刚刚开始的时候  $x_2$  和  $\dot{x}_2$  的值. 当力  $F_1$  等于零, 并且改变符号的时候, 为质块 1 粘滞运动结束. 这时, 系统又将回到原来的自由运动, 系统的自由度将从 1 增加到 2. 如果此时的时间为  $t_f$ , 则  $t_f$  为重

新回到原两自由度系统的初始时刻. 此时的初始条件为:  $x_{10} = d_1, \dot{x}_{10} = 0, x_{20} = x_2(t_f), \dot{x}_{20} = \dot{x}_2(t_f)$ . 带入式(4)重新计算相应的  $B_i$  和  $C_i$  的值.

### 3.2 粘滞状态 2: 当 $x_2 = d_2$ 时

这时,  $x_2 = d_2, \dot{x}_2 = 0$ , 因此从(1)式可以得到降维的运动方程为:

$$\ddot{x}_1 + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \dot{x}_1 + \frac{k_1 + k_2}{m_1} x_1 - \frac{k_2}{m_1} d_2 = \frac{A_1}{m_1} \cos(\delta t) \quad (10)$$

此时作用于振子 2 上的合力为:

$$F_2 = c_2 \dot{x}_1 + k_2(x_1 - d_2) + A_2 \cos(\delta t) \quad (11)$$

方程(10)有解析的解:

$$x_1 = \frac{k_2 d_2}{k_1 + k_2} + b_1 \cos(\delta t - \phi_2) + e^{-\tilde{\zeta} \tilde{\omega}_n (t - t_s)} [c_1 \cos(\tilde{\omega}_d(t - t_s)) + c_2 \sin(\tilde{\omega}_d(t - t_s))] \quad (12)$$

$$\text{这里 } \tilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}}, \tilde{\zeta} = \frac{c_1 + c_2}{2m_1 \tilde{\omega}_n}, \tilde{\omega}_d = \tilde{\omega}_n \sqrt{1 - \tilde{\zeta}^2}, b_1 = \frac{A_1/m_1}{[(\tilde{\omega}_n^2 - \delta^2)^2 + (2\tilde{\zeta}\delta\tilde{\omega}_n)^2]^{1/2}}, \phi_1 = \arctan$$

$\left(\frac{2\tilde{\zeta}\delta\tilde{\omega}_n}{\tilde{\omega}_n^2 - \delta^2}\right), t_s$  是初始时刻,  $c_1$  和  $c_2$  是由初值条件确定的任意常数. 在粘滞运动开始的时候  $t_s = t$ , 因此在(12)式中代入  $t_s = t$ , 可以求得:

$$\begin{cases} c_1 = x_1(t_s) - b_1 \cos(\delta t_s - \phi_1) - \frac{k_2 d_2}{k_1 + k_2} \\ c_2 = \frac{1}{2\tilde{\omega}_d} [\dot{x}_1(t_s) + 2\tilde{\zeta}\tilde{\omega}_n c_1 + \delta b_1 \sin(\delta t_s - \phi_1)] \end{cases} \quad (13)$$

其粘滞开始和结束的状态和方式与质块 1 的粘滞运动一样.

### 3.3 粘滞状态 3: 当 $x_1 = d_1$ 并且 $x_2 = d_2$ 时

这时整个系统处于暂时的静止状态. 此时有  $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$ , 可以得到作用于振子 1 和振子 2 上的力分别为:

$$F_1 = k_2 d_2 - (k_1 + k_2) d_1 + A_1 \cos(\delta t) \quad (14)$$

$$F_2 = k_2(d_1 - d_2) + A_2 \cos(\delta t) \quad (15)$$

这时系统的解为:  $x_1 = d_1, x_2 = d_2$ . 当其中任何一个力等于零, 并且改变符号的时候, 为粘滞状态 3 结束.

事实上, 由粘滞运动存在的判定条件

$$F_i d_i > 0 \quad (16)$$

约束位于异侧, 有两种情况:

1、当  $d_1 > 0, d_2 < 0$  时; 由(16)则要求  $F_2 < 0$ , 由(15)因为  $A_i, k_i$  都是非负数, 所以有  $\cos(\delta t) < 0$ . 再考虑(14), 由于  $d_1 > 0, d_2 < 0, \cos(\delta t) < 0$ , 则有  $F_1 < 0$ , 于是  $F_1 d_1 < 0$  矛盾.

2、当  $d_1 < 0, d_2 > 0$  时, 由(16)则要求  $F_1 < 0$ , 于是由(14)有  $\cos(\delta t) < 0$ , 再考虑(15)有  $F_2 < 0$ , 于是  $F_2 d_2 < 0$  矛盾.

综合 1、2 可证, 当约束位于异侧时, 两质块同时粘滞的运动不会发生. 当约束位于同侧时, 通过调节参数, 可能出现两质块同时粘滞的运动.

## 4 隆起现象

在粘滞运动中, 可能发生某质块在出现粘滞以后, 又被突然拉回一个小距离, 随后再次与约束粘滞一段时间, 最后才被拉离的现象, 把这种现象称为隆起现象 (rising phenomena), 也就是所谓的 "rising bifurcation", 它在性质上类似与擦边分岔<sup>[2]</sup>. 文[4]也证明了隆起现象与多滑动分岔 (multi-sliding bifurcation) 的相似性.

事实上, 隆起现象是在粘滞运动结束的时候, 即  $F_i = 0$  并改变符号的时候, 此时粘滞运动系统将回到原来的两自由度系统, 此时作用于质块  $i$  上的力也将发生突然变化. 如果此时有  $F_i d_i > 0$ , 即作用于质块上的力使其靠向约束, 则将发生颤振, 直至再次粘滞, 形成隆起现象; 如果发生颤振, 而不再出现粘滞, 则不能成为隆起现象.

## 5 数值模拟

在图(a)和(b)两种情况中, 我们设置相同的系统固有参数:  $m_1 = m_2 = 1, k_1 = k_2 = 1, c_1 = c_2 = 0.1, r_1 = r_2 = r = 0.7$ , 考虑外激励变化时振子的运动状况.

计算特征矩阵的特征值和相应的特征值为:

$$\lambda_1 = 0.3820, \quad \lambda_2 = 2.6180,$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0.5257 \\ 0.8507 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0.8507 \\ -0.5257 \end{pmatrix}$$

于是得到标准正交矩阵, 即正则模态矩阵  $\psi = [\xi_1, \xi_2] = \begin{bmatrix} 0.5257 & 0.8507 \\ 0.8507 & -0.5257 \end{bmatrix}$

在情况(a)中取  $d_1 = d_2 = 0.3, A = [A_1, A_2]^T = [0.5, 0]^T$ , 此时在低频率范围会发生周期粘滞运动. 如图 2 所示, 为  $\delta = 0.16$  时的位移响应.

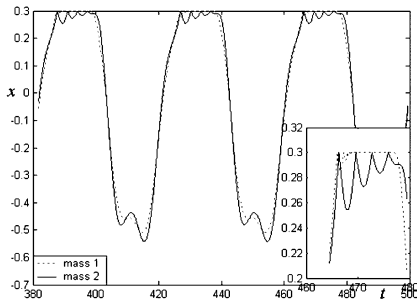


图2 周期粘滞运动和不完全的颤振序列

Fig. 2 Periodic sticking motion and incompletely chattered sequence

从局部放大图可以看到,质块1存在完整的颤振序列,进入了粘滞,而质块2却是不完全的颤振序列.若改变外激励的振幅,取  $A = [A_1, A_2]^T = [0.4, 0.1]^T$ ,可以得到两质块同时粘滞的暂时“静止”状态,如图3所示.

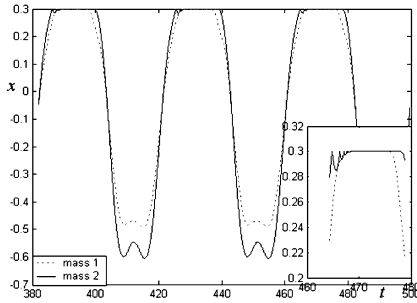


图3 两质块同时粘滞的暂时“静止”

Fig. 3 Temporarily "motionless" of two masses sticking at the same time

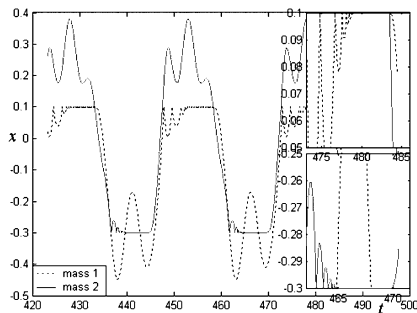


图4 约束位于异侧的周期粘滞运动

Fig. 4 Periodic sticking motion of constraints in the different side

从局部放大可以看到,两个质块进入粘滞和粘滞结束一般不是同时的.系统从两自由度先变为1自由度,再变为“静止”状态,然后又由“静止”状态变为1自由度,再回到两自由度运动.

在情况(b)中取  $d_1 = -0.3, d_2 = 0.1$ ,外激励振幅  $A = [A_1, A_2]^T = [0.5, 0]^T$ .图4为  $\delta = 0.25$  时的位移响应.当  $\delta = 0.2576$  时,会发生所谓的隆起现象,如图5所示.

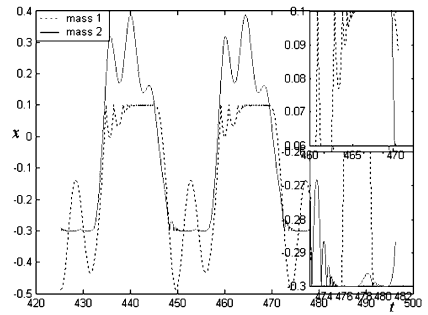


图5 周期粘滞运动及隆起现象

Fig. 5 Rising phenomena and periodic sticking motion

## 6 结论

当碰撞振动系统所受的外激励力的频率较低时,往往会发生颤振、粘滞、混沌等复杂的动力学行为,在此过程中还会出现擦边等非常规分岔.对于本文所研究的系统,当外激励频率  $\delta$  较小时,通过参数的选择,都可能发生周期粘滞运动.随着  $\delta$  的增大,其粘滞区域越来越小,以致颤振序列不完整,而不再出现粘滞现象.在粘滞运动中,对于参数的特殊选择,可能会出现隆起现象.当约束分别位于质块的异侧时,不可能出现暂时的“静止”,而当约束位于质块的同侧时,通过参数的选择,可能出现暂时的“静止”.但这个“静止”,一般不是同时发生的,而是由质块先后进入粘滞而发生的.

## 参考文献

- Shaw J, Shaw S W. The onset of chaos in a two-degree of freedom impacting system. *J. Appl. Mech.*, 1989, 56:168 ~ 174
- Toulemonde C, Gontier C. Sticking motions of impact oscillators. *Eur. J. Mech. A; Solids*. 1998, 17:339 ~ 366
- Wagg D J, Bishop S R. Chatter, Sticking and chaotic impacting motion in a two-degree of freedom impact oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2001, 11: 57 ~ 71
- Wagg D J. Rising phenomena and the multi-sliding bifurcation in a two-degree of freedom impact oscillator. *Chaos Solitons and Fractals*, 2004, 22: 541 ~ 548
- Wen G L. Codimension-2 Hopf bifurcation of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 242: 475 ~ 485
- 谢建华,文桂林,肖建.两自由度碰撞振动系统分岔参数

- 的确定. 振动工程学报, 2001, 14(3): 285 ~ 290 (Xie J H, W G L. Criteria of bifurcation parameters of vibro-impact system with two-degree-of-freedom. *Journal of Vibration Engineering*, 2001, 14(3): 249 ~ 253 (in Chinese))
- 7 Luo G W, Xie J H. Hopf bifurcation of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 213: 391 ~ 408
- 8 林梅, 丁旺才, 武俊虎. 两点碰撞振动系统的周期运动与分叉. 动力学与控制学报, 2006, 4(1): 16 ~ 21 (Lin M, Ding W C, Wu J H. Periodic motion and bifurcation of a vibro-impact system with two motion limiting constraints. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1): 16 ~ 21 (in Chinese))
- 9 李飞, 丁旺才. 多约束碰撞振动系统的粘滞运动分析. 振动与冲击, 2010, 29(5): 150 ~ 156 (Li F, Ding W C. Analysis of sticking motion in a vibro-impact system with multiple constraints. *Journal of Vibration and Shock*, 2010, 29(5): 150 ~ 156 (in Chinese))

## STICKING MOTIONS AND RISING PHENOMENA IN THE TWO-DEGREE-OF-FREEDOM VIBRO-IMPACT SYSTEM\*

Xiao Huayi Yue Yuan Xie Jianhua

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031 China)

**Abstract** A class of two-degree-of-freedom multiple constraint mechanics model of the vibro-impact system was considered. According to the oscillator possible sticking situation, the explicit solution of every possible situation was worked out. Through the sticking motion's necessary condition, we prove that the two oscillators won't appear sticking at the same time when the constraints are in different side. When constraints are located in the same side, by adjusting the parameters, the sticking may occur at the same time. That was called temporarily "motionless" situation. Finally, numerical calculation verified the cycle sticking motion and rising phenomena when the constraints are in different side and temporarily "motionless" situation when constraints are located in the same side. By numerical calculation, one can see that temporary "motionless" situation generally happens or ends by two vibrators successively entering or leaving sticking motion. It is not that the two oscillators are sticking or end at the same time.

**Key words** the two degree of freedom, multi-constraint, vibro-impact, sticking motion