第10卷第2期2012年6月
1672-6553/2012/10(2)/127-3

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.10 No.2
Jun. 2012

Lagrange 函数族及其存在条件的再研究

丁光涛

（安徽师范大学物理与电子信息学院，芜湖 241000）

摘要 再研究由第一积分组成 Lagrange 函数族的结构及其存在条件，指出同一个函数族有多种表示方式，并给出新形式的函数族的存在条件.

关键词 Lagrange 函数族， 逆问题， 第一积分

引言

变分法逆问题研究能否将给定的微分方程系统写成 Lagrange 方程形式，其关键是构造 Lagrange 函数，这是数学力学和物理学领域中热门问题之一，并且已经取得很多成果[1-9]. 最近，我们提出了微分方程系统的第一积分与其 Lagrange 函数之间一种新的关系，利用这种关系可以构造 Lagrange 函数，甚至在满足一定条件情况下可以导出 Lagrange 函数族[10,11]. 本文以一维系统为例，进一步讨论这种 Lagrange 函数族的构成方式及其存在条件，特别是第一积分是速度的线性函数情况下的存在条件，并举例说明.

1 利用第一积分构造 Lagrange 函数的方法

研究二阶常微分方程

$$\ddot{x}=f(t,x,\dot{x}) \tag{1}$$

方程的一个第一积分为

$$I=I(t,x,\dot{x})=const \tag{2}$$

满足条件

$$\partial^2 I/\partial\dot{x}^2\neq 0 \tag{3}$$

由 I 可以构造方程(1)的 Lagrange 函数[10]

$$L=A(t,x)I(t,x,\dot{x})+B(t,x)\dot{x}+B_0(t,x) \tag{4}$$

式中因子 $A(t,x)$，$B(t,x)$，$B_0(t,x)$ 是下列方程的解

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\frac{\partial I}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial A}{\partial x}I-2A\frac{\partial I}{\partial x}-A\frac{\partial I}{\partial\dot{x}}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}+\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial B_0}{\partial x}=0 \tag{5}$$

如果方程(1)的某个第一积分 I 满足下列条件

$$2\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{\partial I}{\partial\dot{x}}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}=\phi(t)\frac{\partial I}{\partial\dot{x}} \tag{6}$$

则方程(1)存在一个与 I 相关的 Lagrange 函数族[11]

$$\bar{L}=A(t)F(I(t,x,\dot{x})),\ (\partial^2F/\partial\dot{x}^2\neq 0) \tag{7}$$

其中 F 是 I 的任意连续可微函数，因子

$$A=\exp\left(\int^t\phi(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \tag{8}$$

条件(6)的特殊情况是

$$2\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{\partial I}{\partial\dot{x}}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}=0 \tag{9}$$

此时 A 为常数.

2 Lagrange 函数族的多种表示和存在条件的其它形式

当第一积分 I 满足 Lagrange 函数族存在条件(6)或(9)时，它的一系列的光滑函数 $g(I)$，$g'(I)$，.... 仍然是第一积分，同样满足条件(6)或(9)，因此，Lagrange 函数族可以等价地写成

$$\bar{L}=A(t)F(g(I))=A(t)F'(g'(I)) \tag{10}$$

这就是说，与第一积分 I 对应的 Lagrange 函数族的构成方式也不是唯一的，而是有任意多种，简单地说，可以表示成 I 的函数，也可以表示成 I 的复合函数.

Lagrange 函数族的存在条件也可以改写成其它形式. 由于 I 是第一积分，故应有

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial I}{\partial\dot{x}}f(t,x,\dot{x})=0 \tag{11}$$

对(11)式求偏导数得

2011-08-17 收到第1稿，2011-12-20 收到修改稿.

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t\partial \dot{x}}+\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial \dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}^2}f+\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}=0 \tag{12}$$

由式(6)和(12),得到

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t\partial \dot{x}}-\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial \dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{x}^2}f=-\phi(t)\frac{\partial I}{\partial \dot{x}} \tag{13}$$

这是 Lagrange 函数族存在条件的新表示,式(13)与 f 和 I 都相关,但是,在特殊情况下可以从存在条件中形式上消除 f.

设第一积分 I 是 $\dot{x}$ 的线性函数,即

$$I=a(t,x)\dot{x}+b(t,x) \tag{14}$$

代人式(13),得到

$$\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial b}{\partial x}=-\phi(t)a \tag{15}$$

式(15)中不包含 f,可以作为式(13)的特例,在第一积分 I 是 $\dot{x}$ 的线性函数时,利用式(15)判断 Lagrange 函数族存在与否,是比较简单的. 应当指出,由于第一积分是方程(1)的积分,即与 f 是相关的,故我们说式(15)只是形式上消除了 f.

3 算 例

例 1 线性阻尼运动

$$\ddot{x}=-\gamma\dot{x} \tag{16}$$

两个第一积分分别是

$$I_1=\dot{x}e^{\gamma t}\quad I_2=\dot{x}+\gamma x \tag{17}$$

I_1 和 I_2 都满足条件(6),对应的两个 Lagrange 函数族分别为

$$\bar{L}_1=e^{-\gamma t}F_1(\dot{x}e^{\gamma t})\quad \bar{L}_2=e^{\gamma t}F_2(\dot{x}+\gamma t) \tag{18}$$

不难验证,I_1 和 I_2 也分别满足条件(13)和(15).

由 I_1 或 I_2 可以构成新的第一积分,例如

$$I'_1=\ln I_1=\ln\dot{x}+\gamma t \tag{19}$$

$$I'_2=I_2^2=(\dot{x}+\gamma x)^2=\dot{x}^2+2\gamma x\dot{x}+\gamma x) \tag{20}$$

它们同样满足条件(6)和(13),对应的两个 Lagrange 函数族

$$\bar{L}'_1=e^{-\gamma t}F'_1(\ln\dot{x}e^{\gamma t}) \tag{21}$$

$$\bar{L}'_2=e^{\gamma t}F'_2(\dot{x}^2+2\gamma x\dot{x}+\gamma^2x^2) \tag{22}$$

函数族 $\bar{L}_1,\bar{L}'_1$ 以及 $\bar{L}_2,\bar{L}'_2$,实际上是分别等价的,两个等价的函数族中的 Lagrange 函数相同,例如

$$L_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2e^{\gamma t}=e^{-\gamma t}(\frac{1}{2}I_1^2)=e^{-\gamma t}(\frac{1}{2}e^{2I'_1}) \tag{23}$$

$$L_2=e^{\gamma t}(\dot{x}+\gamma x)^{-1}=e^{\gamma t}I_2^{-1}=e^{\gamma t}{I'_2}^{-1/2} \tag{24}$$

例 2 简谐振动

$$\ddot{x}+x=0,(\omega^2=1) \tag{25}$$

两个第一积分分别是

$$I_1=a_1\dot{x}+b_1=\dot{x}\cos t+x\sin t \tag{26}$$

$$I_2=a_2\dot{x}+b_2=\dot{x}\sin t-x\cos t \tag{27}$$

代人条件(15),得到

$$\partial a_1/\partial t-\partial b_1/\partial x=-2\sin t=-\phi_1(t)\cos t,$$
$$\phi_1(t)=2\tan t; \tag{28}$$

$$\partial a_2/\partial t-\partial b_2/\partial x=2\cos t=-\phi_2(t)\sin t,$$
$$\phi_2(t)=-2\cot t \tag{29}$$

对应两个 Lagrange 函数族分别为

$$\bar{L}_1=\sec^2tF_1(I_1)=\sec^2tF_1(\dot{x}\cos t+x\sin t),$$
$$(\partial^2F_1/\partial\dot{x}^2\neq0) \tag{30}$$

$$\bar{L}_2=\csc^2tF_2(I_2)=\csc^2tF_2(\dot{x}\sin t-x\cos t),$$
$$(\partial^2F_2/\partial\dot{x}^2\neq0) \tag{31}$$

参 考 文 献

1 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅰ. New York:Spinger-Verlag. 1978

2 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics II. New York:Spinger-Verlag. 1983

3 Lopuszanski J. The inverse varitional problem in classical mechanics. Singapore: World Scientific,1999

4 梅凤翔. 分析力学专题. 北京:北京工业学院出版社,1988 (Mei F X. Analytical mechanical special problems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press 1988 (in Chinese))

5 Hojman S, Urrutia L F. On the inverse problem of the calculus of variations. *J, Math. Phys.* 1981, 22: 1896 ~ 1903

6 丁光涛. 一种构造 Lagrange 函数的直接方法,安徽师范大学学报,1996 , 19: 382 ~ 386 (Ding G T. A direct metrod for the construction of Lagrangian. *J. Anhui Normal Univ.*, 1996,19: 382 ~ 386 (in Chinese))

7 Cieśliński J L, Nikiciuk T. A direct approach to the construction of standard and non-standard Lagrangian for dissipative-like dynamical systems with variable coefficients. *J. Phys. A: Math. Theor*, 2010, 43: 175205

8 丁光涛. 从运动方程构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报,2010,8:305 ~ 310 (Ding GT. A direct approach to the construction of Lagrangians from the equations of motion. *Journal of Dynamics and Control*, 2010,8: 305 ~ 310 (in Chinese))

9 丁光涛. 一维变系数耗散系统 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的新构造方法. 物理学报,2011,60:044503(Ding G

T. A new approach to the construction of Lagrangians and Hamiltonians for one - dimensional dissipative systems with variable coefficients. *Acta Phys. Sin.*, 2011, 60: 044503 (in Chinese))

10 丁光涛. 从第一积分构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报, 2011, 9: 102 ~ 105 (Ding G T. A direct approach to the construction of the Lagrangians from the first integral. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9: 102 ~ 105 (in Chinese))

11 丁光涛. 关于一类 Lagrange 函数族的存在条件. 动力学与控制学报, 2011, 9(3): 219 ~ 221 (Ding G T. On the conditions for the existence of a class of the families of Lagrangians. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(3): 219 ~ 221 (in Chinese))

RESTUDY ON THE FAMILY OF LAGRANGIANS AND ITS EXISTENCE CONDITIONS

Ding Guangtao

(*College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

Abstract The structure of Lagrangian's family formed of first integral and the existence conditions were restudied. The study shows that a Lagrangian's family can be constructed in many sorts of ways. The new forms of the existence conditions of Lagrangian's family were given.

Key words family of Lagrangians, inverse problem, first integral

Received 17 August 2011, revised 20 December 2011.