

# 微重环境下 Cassini 贮液腔中液体晃动特性研究\*

岳宝增 于丹

(北京理工大学宇航学院力学系,北京 100081)

**摘要** 针对我国某一型号大型卫星液体燃料 Cassini 贮箱(腰为圆柱,两底为半球),应用有限元方法研究了微重环境下液体的小幅晃动问题和横向受迫晃动问题,采用 Galerkin 方法得到了系统的有限元离散方程;得到了晃动固有频率和等效力学模型参数. 针对周期脉冲激励,推导了液体作用于贮箱壁的晃动力和晃动力矩计算公式并给出了数值计算结果和分析结论.

**关键词** 微重力, 液体晃动, 等效力学模型, 有限元, 周期脉冲激励

## 引言

以充液航天器动力学为背景,在常重、微重条件下的贮箱液体晃动问题已得到广泛的重视和深入的研究,航天器的轨道机动使得贮箱中液体处于常重或失重状态,对于失重条件下液体晃动特性的研究,程绪铎、王照林用 Runge - kutta 方法得到了微重环境下旋转对称贮箱内静液面形状. 包光伟<sup>[1]</sup>用边界元的方法研究了全失重液体晃动固有频率,王照林<sup>[2]</sup>采用边界曲线离散化方法研究了微重状态下任意旋转对称容器内液体晃动动力学问题,分析给出了液体晃动的等效力学模型. 夏恒新、宝音贺西、郑亚研究了多腔充液晃动的等效特性<sup>[3]</sup>;陈健、范青云对微重力下贮箱推进剂的晃动进行了数值和实验研究<sup>[4]</sup>. 岳宝增、王照林、刘延柱对低重力环境下三维非线性晃动液体进行了数值模拟<sup>[5-7]</sup>. 本文用有限元的方法对微重环境下液体晃动问题进行了研究.

## 1 自由液面形状

微重力环境下充液航天器的液体晃动与常重环境下有着显著的区别. 在微重力环境下,液体面张力占主导地位, Bond 数(体力与表面张力之比)是影响液体自由表面形状及液体晃动动力学特性的一个重要参数.

在贮箱的最高点  $o$  如图(1)所示,建立柱坐标系. 微重时液体静表面是由表面张力及液体与固壁

交界处的接触角所完全决定的. 为简化问题,把三维问题简化为二维问题. 跨越液体自由面压力满足如下的公式

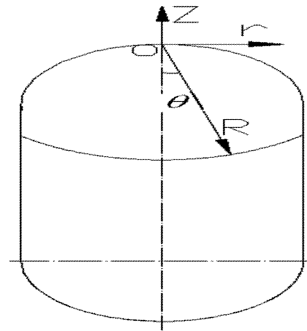


图 1 充液贮腔几何形状

Fig. 1 Geometric shape for liquid filled container

$$p_0 - p = \sigma k \tag{1}$$

其中,  $p_0$  为气压是常数,  $p$  自由面正下方压力,  $\sigma$  为表面张力系数,  $k$  为自由液面主曲率.

由于质量力有势,液体静压力  $p$  为

$$p = -\rho g z + c \tag{2}$$

将方程(2)代入方程(1),并且引入无量纲量:  $Z = z/R_0, k = R_0 K, N_{B0} = \rho g R_0^2 / \sigma$ , 于是可以得到:

$$N_{B0} Z - C = K \tag{3}$$

当为旋转对称容器时:

$$K = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r z'_r / \sqrt{1 + z'^2_r}) \tag{4}$$

将上述各式整理、合并,并且将原来直角坐标系转换为极坐标系  $Z = -R \cos \theta, r = R \sin \theta$  于是得到:

$$R'' = \frac{2R^2 + 3R'^2}{R} - \frac{R'}{R^2} \text{ctg}\theta (R^2 + R'^2) + \frac{1}{R} \times (N_{BO}R \cos\theta + C)(R^2 + R'^2)^{3/2} \quad (5)$$

其中  $R'$  和  $R''$  分别为  $R$  对  $\theta$  的一阶和二阶导数。

当  $\theta=0$  时,由(3)式可得:

$$C = -N_{BO}R_0 - K_0 \quad (6)$$

于是(5)可写为,

$$R'' = \frac{2R^2 + R'^2}{R} - \frac{R'}{R^2} \text{ctg}\theta (R^2 + R'^2) + \frac{1}{R} \times (N_{BO}(R \cos\theta - R_0) - k_0/R_0)(R^2 + R'^2)^{3/2} \quad (7)$$

其中,  $N_{BO} = \rho g R^2 / \sigma$  被称为 Bond 数。以  $\sigma / \rho = 2.5 \times 10^{-5} \text{m}^3 / \text{s}^2$ ,  $g = 10^{-2} \text{m} / \text{s}^2$  贮腔半径  $R = 0.289 \text{m}$ , 贮腔圆柱段高度  $0.325 \text{m}$  为例数值模拟自由液面形状,图2为不同充液比时自由液面的形状及其有限元网格划分。

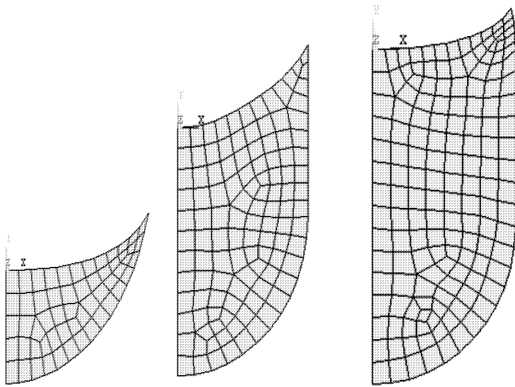


图2 自由液面数值模拟结果

Fig. 2 Numerical results of the free-surface

## 2 自由晃动模态分析

### 2.1 控制方程的推导

在没有自旋的容器中,可以假定液体的晃动是无旋的,且流体被认为是无粘性和不可压缩的,贮箱为刚性腔,建立图3所示柱坐标系。

流体的晃动速度势函数  $\phi(r, \theta, z, t)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (9)$$

自由面上动力学条件,当忽略流体粘性时为:

$$-\frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial r} + g\eta = 0 \quad \Gamma_2 \text{ 上} \quad (10)$$

此式只在静液面平衡位置附近近似满足,即  $z$

$= 0$  时。(8)、(9)、(10)式构成了刚性贮腔内液体晃动的全部边值问题。

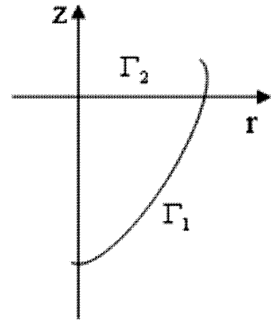


图3 柱坐标系

Fig. 3 Cylindrical coordinate system

### 2.2 数值解的有限元公式

考虑 Cassini 贮箱为轴对称容器,将场变量按  $\text{cos}m\theta$  的级数展开,然后再线性叠加,并假定场变量随时间变化规律是  $e^{i\omega t}$ ,即令

$$\phi = \phi(r, z) \text{cos}m\theta e^{i\omega t} \quad (11)$$

式(8)、(9)、(10)变为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_1 \text{ 上} \\ -\frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \\ g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \omega^2 \phi = 0 \quad \Gamma_2 \text{ 上} \end{cases} \quad (12)$$

在方程(12)中,当  $m > 0$  时含有  $r = 0$  的单元中刚度矩阵中将出现积分奇点,为了克服这一困难,作变换

$$\phi(r, z) = r^m \varphi(r, z) \quad (13)$$

得:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2m+1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0 \\ -\frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2m+1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \omega^2 \varphi = 0 \Big|_{z=0} \end{cases} \quad (14)$$

考虑到量纲的一致性后,采用伽辽金(Galerkin)法对上述方程进行有限元离散,令

$$\varphi = \sum N_i \varphi_i$$

其中  $N_i$  是插值基函数,  $\varphi_i$  是节点变量,推导得数值计算的有限元公式如下:

$$\left(k_{ij} - \frac{\omega^2}{g} m_{ij}\right) \varphi_i = 0$$

$$k_{ij} = \iint_D \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) r dr dz + \frac{\sigma}{\rho g} \int_{z=0} \frac{\partial^2 N_i}{\partial r^2} r \frac{\partial N_j}{\partial r} dr + 2m \frac{\sigma}{\rho g} \int_{z=0} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} dr + m \iint_D \left( N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} - N_j \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) dr dz + \int \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} N_j + m N_i N_j \right) dz \quad (15)$$

$$m_{ij} = \int_{z=0} r N_i N_j dr \quad (16)$$

在用 Matlab 编程过程中,将看做是单元刚度矩阵、将  $m_{ij}$  看做是单元质量矩阵,之后进行刚度矩阵和质量矩阵的组装,计算微重环境下的液体晃动的特征模态。

### 2.3 模态计算结果

在以下的数值计算中,模态频率采用公式  $\omega^2/g$ , 充液比为  $h/R$ 。

算例一: 设  $\sigma/\rho = 2.5 \times 10^{-5} m^3/s^2, g = 10^{-3} g_0$

表 1 当  $g = 10^{-2} m/s^2$  时的计算结果

Table 1 Numerical result for  $g = 10^{-2} m/s^2$

Filling ratio	First - order	Second - order	Third - order
0.15	3.1346	12.9423	24.6515
0.4	6.4168	18.6521	30.6074
0.5	6.5538	18.6021	30.8076
0.75	6.9771	18.6333	31.1614

算例二: 设  $\sigma/\rho = 2.5 \times 10^{-5} m^3/s^2, g = 10^{-4} g_0$

表 2 当  $g = 10^{-3} m/s^2$  时的计算结果

Table 2 Numerical result for  $g = 10^{-3} m/s^2$

Filling ratio	First - order	Second - order	Third - order
0.15	7.5390	16.8096	27.5617
0.4	11.3333	21.2839	32.4210
0.5	11.4886	21.6196	32.4832
0.75	11.6085	22.5615	32.5563

以下为充液比为 0.4 常重与微重下特征频率 ( $\omega^2/g$ ) 比较

表 3  $g$  取不同值时的计算结果比较

Table 3 Comparison of the numerical results for different value of  $g$

$g$	First - order	Second - order	Third - order
$g_0$	6.0542	18.5628	30.1234
$10^{-3} g_0$	6.4168	18.6521	30.6074
$10^{-4} g_0$	11.3333	21.2839	32.4210
$10^{-5} g_0$	74.6233	88.7584	97.0612

结果分析:

由上述各表可以看出,微重环境下,液体自由液面在圆柱段时,改变充液比液体晃动特征频率变化不大,这一点与常重状态下液体晃动特征频率随充液比的变化趋势相一致;随着  $g$  值的减小,表面张力对液体晃动的影响越来越大,计算结果与实际情况相符。

## 3 微重环境下受迫晃动

### 3.1 等效力学模型参数

计算的等效模型为单摆模型。

以  $\sigma/\rho = 2.5 \times 10^{-5} m^3/s^2, g = 10^{-3} g_0$  为例,计算单摆的一阶等效摆重、等效摆长、悬挂点位置等效模型参数

表 4 模型参数

Table 4 Model parameters

$h$	$m_1 (kg)$	$l_1 (m)$	$z_1 (m)$
0.4	20.8827	0.1558	-0.0118
0.5	21.6229	0.1526	-0.0453

注:以自由液面最低点为基准点。

充液航天器在机动的过程中,为实现预定的轨道或姿态控制,会进行瞬时的开机动作,从而产生脉冲激励。由于贮箱轴向方向的激励可理解为重力加速度  $g$  的变化,此种激励下晃动产生的反作用力、反作用力矩比较容易求出,于是这里我们只分析贮箱在水平脉冲激励下的响应。

### 3.2 周期脉冲激励下液体势函数

图 4 为周期脉冲激励函数示意图。周期脉冲激励函数傅里叶展开为:

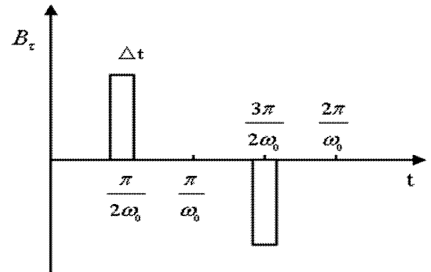


图 4 脉冲激励函数

Fig. 4 Pulse excitation function

$$\bar{B}_\tau = B_\tau \sum_m C_m \sin(m\omega_0 t)$$

其中

$$C_m = \begin{cases} 0, & m \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{m\pi} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \frac{m\delta\pi}{2}, & m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\delta = \Delta t / (\frac{1}{2}T)$$

故周期脉冲激励下,液体受迫晃动势函数的表达式可写作:

$$\varphi = \frac{B_r \cos \theta}{(1 + B_\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k \varphi_k}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\omega_0 (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \frac{m\delta\pi}{2} \cos(m\omega_0 t)}{\omega_k^2 - m^2\omega_0^2}$$

从(17)式可以看出,周期脉冲激励下液体受迫晃动势函数可以展开为包含自由晃动液体晃动势函数和液体晃动特征频率的函数,所以对受迫晃动的分析可以在液体自由晃动的基础上进行进一步的深入。

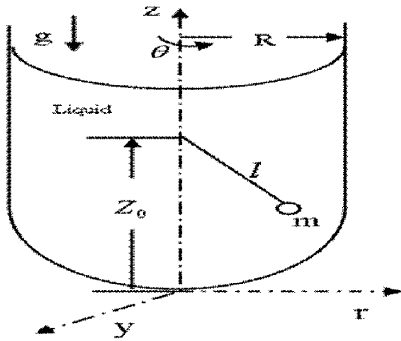


图 5 贮腔几何模型及坐标系

Fig. 5 Container geometry and coordinate system

### 3.3 反作用力、反作用力矩

图 5 所示为部分充液 Cassini 贮箱所在坐标系. 贮箱在外界激励下产生的晃动力是由液体内部压强(随时间变化)加在壁面上产生的. 故由图 5 分析可知液体晃动对壁面水平作用力为:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\xi_0} p \sin \beta \cos \theta r_i d\xi d\theta \quad (18)$$

考虑液体受迫晃动  $k$  阶模态的反作用力和反作用力矩. 贮箱中晃动液体产生的反作用力可以从理想流体伯努利方程中得出:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = c \quad (19)$$

在计算液体自由晃动模式的过程中我们同样得到液体内部各个结点上的势函数值,而从(19)式可以看出自由晃动液体内部压强可以由势函数反映出来,这样计算受迫晃动  $k$  阶模态的反作用力和反作用力矩的问题就得到了解决。

$k$ -th 模态最大作用力系数

$$F_x = \pi \omega_0 \int_0^{\xi_0} \rho \varphi_k(r_i, z_i) r_i \sin \beta d\xi \quad (20)$$

$k$ -th 模态最大作用力矩系数

$$M_y = \pi \omega_0 \int_0^{\xi_0} \rho \varphi_k(r_i, z_i) r_i z_i \sin \beta d\xi \quad (21)$$

以水平方向加速度以  $q_1 = 0.16m/s^2$ , 轴向重力加速度  $g = 0.01m/s^2$ , 一周期内脉冲激励作用时间 0.5s, 充液比为 0.4、0.5、0.6 为例, 计算周期脉冲激励下液体晃动反作用力、作用力矩。

以(21)、(20)式为基础计算周期脉冲激励下反作用力、反作用力矩; 计算结果如图 6 ~ 图 8。

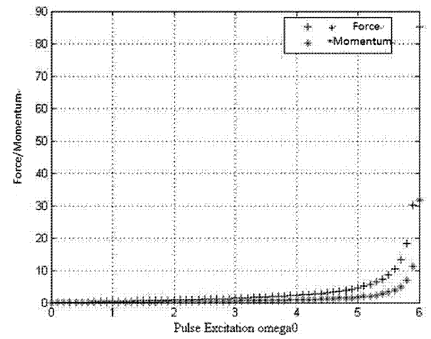


图 6 充液比 0.4 时的计算结果

Fig. 6 Numerical results for liquid-filled Ratio 0.4

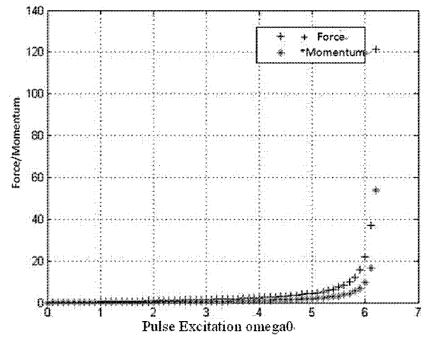


图 7 充液比 0.5 的计算结果

Fig. 7 Numerical results for liquid-filled Ratio 0.5

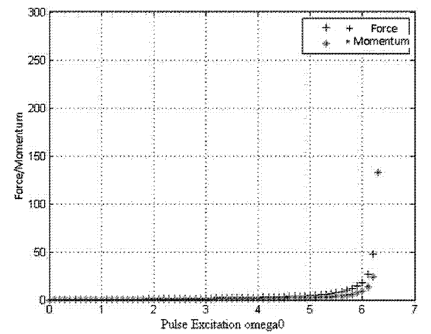


图 8 充液比为 0.6 时计算结果

Fig. 8 Numerical results for liquid-filled Ratio 0.6

## 4 结论

通过对本文计算结果的分析比较,可总结出如下结论:

(1) 微重环境下,液体自由液面在圆柱段时,改变贮箱充液比液体晃动特征频率变化不大,这一点与常重状态下液体晃动特征频率随充液比的变化趋势一致;当  $g$  值大于  $0.01m/s^2$  时表面张力对固有频率的影响很小,但是随着  $g$  值得减小,表面张力对液体晃动的影响越来越大,计算结果与实际相符.

(2) 当重力加速度为  $g = 0.01m/s^2$ ,腔体某一水平方向最大作用力为  $F_{max} = 10\sqrt{3}N$  时,对应水平方向最大加速度  $a_1 = 0.16m/s^2$ ,由图 6、图 7、图 8 可以看出,外界激励频率远离液体晃动固有频率时晃动液体对腔壁产生的作用力与  $F_{max}$  相比较很小,可以忽略不计.

## 参 考 文 献

1 包光伟. 全失重液体晃动的固有频率. 宇航学报, 1994, 15(4):65~70 (Bao G W. Natural frequencies of liquid slosh in zero-gravity condition. *Journal of Astronautics*, 1994,15(4):65~70 (in Chinese))

2 王照林,匡金炉. 微重状态下任意旋转对称容器内液体晃动特性研究. 宇航学报,1992,3:1~7 (Wang Z L, Kuang J L. Low-gravity sloshing in an arbitrary rotational symmetry rigid tank. *Journal of Astronautics*, 1992,3:1~7(in Chinese))

3 夏恒新,宝音贺西,郑亚. 多腔充液晃动的等效特性. 动力学与控制学报,2007,5(4):346~349 (Xia H X, Baoyin H X, Zheng Y. Equivalent characteristics of liquid sloshing in multi-tank. *Journal of Dynamics and Control*, 2007,5(4):346~349(in Chinese))

4 陈健,范晴云. 贮箱内推进剂微重力下晃动的有限元模拟及试验. 上海航天,2004,3:15~19 (Chen J, Fan Q Y. Finite element analysis and experiment technology of propellants slosh in tank under micro gravity. *Aerospace Shanghai*, 2004,3:15~19 (in Chinese))

5 岳宝增,刘延柱,王照林. 低重力环境下三维液体非线性晃动的数值模拟. 宇航学报,2000,21(4):25~30 (Yue B Z, Liu Y Z, Wang Z L. Simulation of three dimensional liquid nonlinear sloshing under low gravity environment. *Journal of Astronautics*,2000,21(4):25~30 (in Chinese))

6 Yue B Z. Nonlinear phenomena of three-dimensional liquid sloshing in micro-gravity environment. *Chinese Science Bulletin*, 2006, 51(20): 2425~2431

7 Ikedat. Nonlinear parametric vibrations of an elastic structure with a rectangular liquid tank. *Nonlinear Dynamics*, 2003,33:43~70

# RESEARCH ON LIQUID SLOSHING CHARACTERISTICS IN CASSINI CONTAINER IN MICRO-GRAVITY ENVIRONMENT \*

Yue Baozeng Yu Dan

(Department of Mechanics, School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

**Abstract** For a certain geometric shape of liquid fuel container-Cassini tank, which has a cylindrical waist and two hemispherical bottoms, and is used in a large satellite of our country, the problems of liquid sloshing and lateral forced sloshing in micro-gravity environment were studied by using finite element method. The finite element equations of the system were derived by means of Galerkin method. The natural frequency of sloshing and the equivalent model parameters of sloshing were obtained. For periodic pulse excitations, the numerical formulations for computing the sloshing force and momentum acting on the wall of the tank were deduced. Finally, the numerical results and some conclusion remarks were given.

**Key words** micro-gravity, liquid sloshing, equivalent mechanical model, finite element method, periodic pulse excitation