

# 异结构超混沌系统动力学分析和同步控制策略研究\*

黄露 唐驾时 符文彬

(湖南大学机械与运载工程学院,长沙 410082)

**摘要** 基于混沌同步控制理论研究,结合同步控制与线性反馈控制方法,提出一种针对异结构超混沌系统的同步控制策略.在 Chua 混沌系统和 Chen 混沌系统理论研究基础上,通过增加两个反馈控制器得到两个异结构五阶混沌系统,对其进行动力学分析,证实其为五阶超混沌系统,并基于 Mathematic 环境下对其模型进行数值仿真,得到其平面相图.采用全状态投影同步方法实现对其同步控制,并用龙格-库塔算法进行数值模拟,证实该同步方法有效可行.

**关键词** 超混沌, 同步控制, Chua 系统, Chen 系统, 动力学

## 引言

混沌研究作为非线性科学领域的研究热点<sup>[1]</sup>,近年来在保密通讯、信号处理等许多领域越来越受到人们的重视<sup>[2]</sup>.存在两个或以上正 Lyapunov 指数的混沌系统称为超混沌系统,其至少在一个环面上产生发散和扩张,因而能产生更加复杂的动力学行为.因超混沌系统具有更强的随机性和不可预测性,在混沌加密、混沌通讯等实际应用领域有更多的优势.相对于普通混沌系统而言,对超混沌系统实现稳定性控制更为困难.目前,超混沌系统的同步控制研究主要集中在驱动系统和结构类型相同的三阶超混沌系统.本文基于超混沌系统理论和同步控制策略,对两种异结构五阶超混沌系统进行动力学分析并对其进行同步控制<sup>[3]</sup>.

借鉴三阶超混沌系统研究成果,本文首先提出两个异结构五阶超混沌系统,对其进行动力学分析,通过计算 Lyapunov 指数和维数,验证其超混沌特性.并采用 MATLAB 软件仿真,分析仿真结果.如今,国内外对混沌同步问题的研究取得了相当大的成果,提出了许多同步控制类型:自适应同步、广义同步、投影同步、完全同步、部分同步和 Q-S 同步等<sup>[4]</sup>.其中全状态投影同步控制方法<sup>[5]</sup>(FSHPS)可以使得对应的状态变量满足比例关系,且其比例系数可以相异,系统的相空间也可以自由压缩和拉伸.本文采用全状态投影同步控制策略,对提出的

两个异结构五阶超混沌系统实现同步控制.在工程实际中,对异结构<sup>[6]</sup>高阶超混沌系统实现同步控制,能增加系统的混沌性和加密通讯过程中硬件选择的灵活性,因而,本文的研究具有实用价值.

## 1 两类异结构五阶超混沌系统

### 1.1 五阶超混沌蔡氏系统

基于三阶蔡氏电路<sup>[7]</sup>模型,通过增加两个非线性状态反馈控制器来获得五阶超混沌系统.三阶蔡氏混沌电路的无量纲方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1 - f(x)) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中非线性函数  $f(x) = bx_1 + (a-b)\frac{|x_1+1| - |x_1-1|}{2}$ .

在状态方程(1)中增加两个非线性状态反馈控制器:  $x_4, x_5$ . 得到五阶超混沌蔡氏系统状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1 - f(x)) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta(x_2 - x_4) + \gamma x_3 \\ \dot{x}_4 = d(x_3 + x_5) \\ \dot{x}_5 = ex_4 + fx_5 \end{cases} \quad (2)$$

式中  $\alpha = 20, \beta = 12, \gamma = 0.12, d = -0.1, e = 30, f = -0.3, a = -1.27, b = -0.68$ . 其矩阵表示的数学模型为:

$$\dot{X} = AX + F(X) \tag{3}$$

其中,

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -0.12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, F(X) = \begin{bmatrix} -20f(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

通过 MATLAB 软件计算得到其 lyapunov 指数<sup>[8]</sup>为  $LE_1 = 0.359343, LE_2 = 0.254967, LE_3 = -2.110367, LE_4 = -2.158903, LE_5 = -3.153965$ . lyapunov 维数:

$$D = j + \frac{1}{|LE_{j+1}|} \sum_{n=1}^j LE_n \tag{4}$$

计算得到  $D = 2.291$ . 该系统的 lyapunov 指数  $LE_1, LE_2$  大于 0, 根据超混沌的理论, 具有两个及以上正的 lyapunov 指数且阶数为四阶及以上的混沌系统为超混沌系统. 而且本系统的 lyapunov 维数为分数, 证实该系统能产生混沌吸引子. 因而可得本系统为超混沌系统. 由 MATLAB 仿真得到其在  $x_1 - x_2, x_2 - x_3$  等在相平面的相图如图 1:

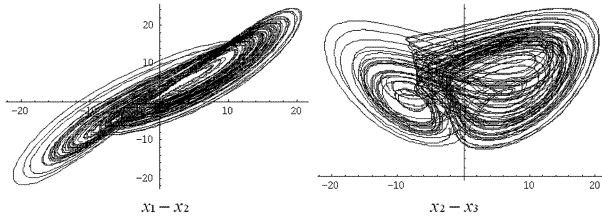


图 1  $x_1 - x_2, x_2 - x_3$  等平面相图

Fig. 1 The plane phase diagram of  $x_1 - x_2, x_2 - x_3$

由相图可以看出, 该系统产生双涡卷混沌吸引子<sup>[9]</sup>.

### 1.2 五阶超混沌 chen 系统

基于三阶 chen 系统模型<sup>[10]</sup>, 通过增加两个非线性状态反馈控制器来获得五阶超混沌系统. 三阶 chen 系统方程如下:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = by_1 - y_1y_3 + cy_2 \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - dy_3 \end{cases} \tag{5}$$

在状态方程(5)中增加两个非线性状态反馈控制器:  $y_4, y_5$ . 得到五阶超混沌 chen 系统状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(y_2 - y_1) + y_4 \\ \dot{y}_2 = by_1 - y_1y_3 + cy_2 \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - dy_3 + y_5 \\ \dot{y}_4 = y_2y_3 - ey_4 \\ \dot{y}_5 = y_3y_4 + fy_5 \end{cases} \tag{6}$$

式中, 当取  $\alpha = 36, b = 3, c = 12, d = 7, e = -0.6, f = -1$  时, 通过 MATLAB 计算得到其 lyapunov 指数为:  $LE_1 = 0.30283, LE_2 = 0.06843, LE_3 = 0.068970, LE_4 = 4.035782, LE_5 = 25.954088$ , 有两个指数大于 0, 说明该系统处于超混沌状态.

用矩阵表示的数学模型为:

$$\dot{Y} = BY + G(Y) \tag{7}$$

其中,

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 36 & 36 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}, G(Y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \\ y_2y_3 \\ y_3y_4 \end{bmatrix}.$$

截取其在  $y_1 - y_2, y_2 - y_3, y_3 - y_4, y_4 - y_5$  等相平面的相图如图 2:

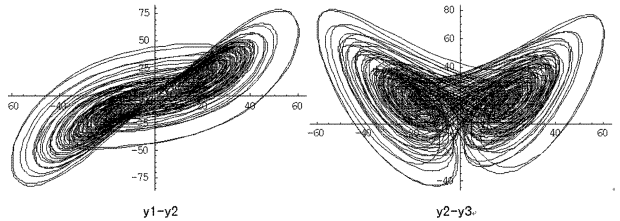


图 2  $y_1 - y_2, y_2 - y_3$  等平面相图

Fig. 2 The plane phase diagram of  $y_1 - y_2, y_2 - y_3$

从相平面图可以看出, 该系统同样具有双涡卷混沌吸引子.

## 2 异结构五阶超混沌系统同步控制研究及数值仿真

## 2.1 超混沌同步控制策略

超混沌系统具有很复杂的动力学行为,一般低阶系统控制方法如相空间重构、回归映像和非线性预测方法很难破译因超混沌加密后的信号,因而,对超混沌系统的同步控制研究更有意义. 本文接下来将通过全状态投影同步(Full State Hybrid Projective Synchronization, FSHPS)方法,实现上文中两种异结构五阶超混沌系统的同步控制.

定义如下的混沌系统数学模型:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \Phi(X_1) \\ \dot{X}_2 = \Psi(X_1, X_2) \end{cases} \quad (8)$$

上式中:  $X_1 = (X_{10}, X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n})^T$ ,  $X_2 = (X_{20}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n})^T$ ,  $X_1, X_2$  为系统的状态变量,其中  $X_1$  定义为驱动系统的状态变量,  $X_2$  定义为响应系统的状态变量. 将驱动系统和响应系统进行全状态投影,令其投影函数为:  $X = X_2 - \vec{\alpha}X_1$ , 其中  $\vec{\alpha}$  为  $n \times n$  非零对角矩阵,  $\vec{\alpha} = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 其中  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为状态变量  $X_1, X_2$  缩放系数. 若从不同初值  $X_{10}$  和  $X_{20}$  开始,系统满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} |X| = 0$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} |X_2 - \vec{\alpha}X_1| = 0$ , 则我们可以定义该混沌系统(8)满足全状态投影同步(FSHPS)控制要求. 对于超混沌系统,我们定义如下系统进行全状态投影同步理论验证.

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = \Phi(Y_1) + F(Y_1) \\ \dot{Y}_2 = \Psi(Y_1, Y_2) + G(Y_1, Y_2) \end{cases} \quad (9)$$

式中的  $F(Y_1), G(Y_1, Y_2)$  为非线性项.  $Y_1 = (Y_{10}, Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n})^T$ ,  $Y_2 = (Y_{20}, Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2n})^T$ ,  $Y_1, Y_2$  为系统的状态变量,其中  $Y_1$  定义为驱动系统的状态变量,  $Y_2$  定义为响应系统的状态变量. 在响应系统中,我们增加一个同步控制器  $\Gamma, \Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)^T$ . (9)式变为:

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = \Phi(Y_1) + F(Y_1) \\ \dot{Y}_2 = \Psi(Y_1, Y_2) + G(Y_1, Y_2) + \Gamma \end{cases} \quad (10)$$

令其投影函数为:  $Y = Y_2 - \vec{b}Y_1$ ,  $\vec{b}$  为  $n \times n$  阶非零对角矩阵,  $\vec{b} = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , 为状态变量  $Y_1, Y_2$  缩放系数. 同样地,若系统满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} |Y_2 - \vec{b}Y_1| = 0$ , 则可使得该超混沌系统实现全状态投影同步. 本文的任务就是要通过设计合适的同步控制器  $\Gamma$ , 实现两种异结构五阶超混沌系统同步控制.

本文需要引入一条定理<sup>[11-13]</sup>1. 定理1描述如下:

对于一个微分系统  $\frac{dZ}{dt} = CZ, Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T, C$  为  $n \times n$  阶常数矩阵. 若矩阵  $C$  的特征值  $\lambda_i$  满足  $|\arg(\lambda_i)| > \pi/2$ , 则该微分系统的在零点处渐近稳定, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} Z = 0$ .

## 2.2 五阶超混沌蔡氏系统和五阶超混沌 chen 系统全状态投影同步

### 2.2.1 同步控制分析

上文提出的两个超混沌系统:五阶超混沌蔡氏系统  $\dot{X} = AX + F(X)$  和五阶超混沌 chen 系统  $\dot{Y} = BY + G(Y)$ . 令五阶超混沌蔡氏系统为驱动系统,五阶超混沌 chen 系统为响应系统. 并在响应系统中加入控制器  $\Gamma, \Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5)^T$ , 得到受控的响应系统为  $\dot{Y} = BY + G(Y) + \Gamma$ . 取控制器  $\Gamma = c(AX + F(X) - BX) - G(Y) - K(Y - cX)$ , 其中  $K$  和  $c$  为非零常数矩阵,  $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^T$  为缩放系数. 由超混沌系统全状态投影同步理论可得,只要证明  $\lim_{t \rightarrow \infty} |Y - cX| = 0$ , 则可实现五阶超混沌蔡氏系统与五阶超混沌 chen 系统全状态投影同步. 因

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |Y - cX| &= \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{Y} - c\dot{X}|, \\ \dot{Y} - c\dot{X} &= BY + G(Y) + \Gamma - c(AX - F(X)) = \\ &= BY + G(Y) + c(AX + F(X) - BX) - G(X) - \\ &= K(Y - cX) - c(AX - F(X)) = BY - cBX - \\ &= (B - K)(Y - cX). \end{aligned}$$

令  $Z = Y - cX$ , 则上式可表示为:  $\dot{Z} = (B - K)Z$ . 根据定理1可知,只需矩阵  $(B - K)$  特征值  $\lambda_i$  满足  $|\arg(\lambda_i)| > \pi/2$ , 则可证明  $\lim_{t \rightarrow \infty} Z = 0$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} |Y - cX| = 0$ .

$$\text{选取 } K = \begin{bmatrix} 40 & 36 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 则 } B - K =$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

通过计算得到,  $B - K$  的5个特征值分别为:  $\lambda_1$

$-4, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -7, \lambda_4 = \lambda_5 = -1$ . 可以看出所有的特征值都为负实数, 即  $|\arg(\lambda_i)| > \pi/2$ . 从而可以得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} |Y - cX| = 0$ , 即实现了两种异结构五阶超混沌系统的同步控制.

### 2.2.2 同步控制器设计

一个优良的控制器能使两个超混沌系统达到同步的时间更短, 更快趋于稳定, 是实现本文同步控制的前提. 上文中提出需要设计一个合适的控制器, 来实现全状态投影同步控制. 已经定义控制器  $\Gamma = c(AX + F(X) - BX) - G(Y) - K(Y - cX)$ ,  $K$  和  $c$  为  $5 \times 5$  阶常数非零矩阵. 选取  $c$  为  $5 \times 5$  阶单位对角矩阵, 同步控制器  $\Gamma$  如下:

$$\Gamma_1 = 24x_1 + 20x_2 - 20f(x) - 40y_1 - 36y_2,$$

$$\Gamma_2 = -2x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1y_3 - 15y_2,$$

$$\Gamma_3 = -12x_1 - 0.12x_2 + 19x_3 - y_1y_2 - y_5 + x_5,$$

$$\Gamma_4 = -0.1x_3 - 0.1x_5 + x_4 - y_2y_3 - 1.6x_4,$$

$$\Gamma_5 = 30x_4 - 9.3x_5 - y_3y_4 - 5y_5.$$

### 2.3 数值仿真结果

为了证实对异结构超混沌系统实现同步的方法真实可行, 本文利用 MATLAB 软件, 采用五阶定步长龙格-库塔算法来进行数值模拟. 下面重新定义  $Y - cX$  为两个异结构超混沌系统的误差函数, 令  $E = Y - cX$ . 其中  $c$  为缩放系数矩阵. 为了使系统不丧失随机性, 随机选择驱动系统和响应系统的状态初值如下:  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = -0.5, x_4(0) = 3.7, x_5(0) = -3. y_1(0) = 0.3, y_2(0) = 2.4, y_3(0) = -0.8, y_4(0) = -3.6, y_5(0) = 5$ . 同样随机选取缩放系数如下:  $c_1 = 2.5, c_2 = -2, c_3 = -4.5, c_4 = 0.6, c_5 = 4$ . 时间步长  $\Delta t = 0.02$ . 经 MATLAB 软件仿真, 得到误差曲线的时间历程图如图 3.

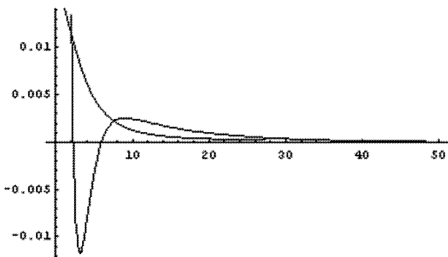


图3 误差曲线时间历程图

Fig.3 timing diagram of error curve

由误差曲线的时间历程演化曲线可看出其误差值最终趋向于零点, 并渐近稳定, 可得出结论: 两个异结构五阶超混沌系统通过全状态投影同步控

制, 实现渐近同步.

## 3 结论

在混沌系统理论研究基础上, 通过在三阶蔡氏混沌系统和三阶 chen 混沌系统中增加两个反馈控制参数, 得到两个异结构五阶混沌系统. 通过 Lyapunov 指数计算和混沌相图分析, 证实得到的五阶混沌系统为超混沌系统.

基于高维超混沌系统同步控制策略的研究, 针对两种异结构的五阶超混系统, 以全状态投影同步控制方法为基础, 通过理论证实该方法同样适合异结构超混沌系统的同步控制. 设计一个同步控制器  $\Gamma$ , 成功实现了五阶超混沌蔡氏系统与五阶超混沌 chen 系统同步. 这种控制方法有一个显著的优点: 能满足混沌系统状态变量的不可预测性. 因为在很多的物理系统中, 很难满足状态变量可测, 所以方法在实际控制超混沌系统时是十分有利的. 随机选择一组状态变量作为初始值, 通过龙格-库塔算法来进行数值模拟, 理论推导和数值仿真可以证实本文实现异结构五阶超混沌系统同步控制方法的可行性.

## 参 考 文 献

- 1 E. Lorenz, Deterministic non-periodic flows. *J. Atmospheres Science*, 1963, 20(2): 130 ~ 141
- 2 王国红, 段小虎. 基于变形蔡氏电路的混沌掩盖保密通信研究. 空军工程大学学报(自然科学版), 2005, 6(4): 49 ~ 52, 62 (Wang G H, Duan X H. The study of chaotic mask secure communication based on a modified chua circuit. *Journal Of Air Force Engineering University (Natural Science Edition)*, 2005, 6(4): 49 ~ 52, 62 (in Chinese))
- 3 方天化. 超混沌同步的非线性控制方法. 原子能科学技术, 1998, 32(2): 184 ~ 188 (Fang T H. Synchronization of hyperchaos by nonlinear variable feed back control method. *Atomic Energy Science And Technology*, 1998, 32(2): 184 ~ 188 (in Chinese))
- 4 王宇野, 许红珍. 异结构不确定混沌系统的广义投影同步. 系统工程与电子技术, 2010, 2(2): 96 ~ 99 (Wang Y Y, Xu H Z. Generalized projective synchronization between two different uncertain chaotic systems. *Systems Engineering And Electronics*, 2010, 2(2): 96 ~ 99 (in Chinese))
- 5 Hu M F, Xu Z Y, Zhang R, et al. Adaptive full state hybrid

- projective synchronization of chaotic systems with the same and different order. *Phys Lett A*, 2007,361(3):315~327
- 6 Li G H. Generalized projective synchronization between two different chaotic systems using active backstepping control. *Physical Letters A*, 2006,355(4-5):326~330
- 7 Brown, R. Generalization of the Chua equations, *IEEE Trans. Circuits Syst. - I*, 1993
- 8 Alan Wolf, et al, Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 1985,16(1):288~320
- 9 郝柏林. 分叉、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他. 物理学进展, 1983,3(3):330~420 (Hao B L. Bifurcation、Chaos、Strange Attractor、Turbulence and all that. *Progress In Physics*, 1983,3(3):330~420(in Chinese))
- 10 陈启宗. 线性系统理论与设计. 北京:科学出版社,1988
- (Chen Q Z. Linear system theory and design/third edition. Beijing:Science Press,1988 (in Chinese))
- 11 Matignon D. Stability results of fractional differential equations with applications to control processing. Lille France: IMACS, IEEE - SMC,1996
- 12 Zou Y L, Zhu J. Controlling the chaotic n-scroll Chua's circuit with two pass filters. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006,29(2):398~410
- 13 蒋楠,魏毅强. Lorenz系统与Rossler系统的异结构同步. 动力学与控制学报,2011,9(2):131~134 (Jiang N, Wei Y Q. Synchronization of Lorenz system and Rossler system with different structure. *Journal of Dynamics and Control*, 2011,9(2):131~134 (in Chinese))

## DIFFERENT STRUCTURE HYPERCHAOS SYSTEM DYNAMICS ANALYSIS AND SYNCHRONOUS CONTROL STRATEGY RESEARCH\*

Huang Lu Tang Jiashi Fu Wenbin

(College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract** Based on the chaos synchronization control theory research, and combined with the simultaneous control and linear feedback control method, this paper put forward a control strategy for the synchronization of different structure hyperchaotic system. On the basis of Chua chaos system and Chen chaos system theory research, two different structure five order chaotic systems were obtained by adding two feedback controllers, and the dynamics analysis confirmed that they were the fifth-order hyperchaotic system, whose plane phase diagrams were obtained by numerical simulation in Mathematic environment. By adopting the Full State Hybrid Projective Synchronization, their simultaneous synchronization control can be achieved, and the Runge-Kutta algorithm was used to numerically simulate the control, which confirmed that the synchronization method was effective and feasible.

**Key words** hyperchaotic, synchronization control, Chua system, Chen system, dynamics