

带有未知参数的驱动 - 响应网络的自适应同步*

王锦成

(漳州师范学院数学与信息科学系,漳州 363000)

摘要 研究由带有未知参数的混沌系统作为节点动力学构成的驱动 - 响应网络的自适应同步. 基于 Lyapunov 稳定性理论以及 LaSalle 不变原理, 设计合适的控制器和参数更新规则, 使得驱动系统与响应网络达到同步. 为了验证理论的正确性, 选择加权网络和 BA 无标度网络作为数值例子, 并比较相同网络结构下不同的节点动力学对同步时间的影响. 数值仿真表明了该控制方案的有效性.

关键词 驱动 - 响应网络, 自适应同步, 无标度网络, 混沌

引言

混沌是确定性系统产生的一种对初值具有敏感依赖性的类随机运动. 1990 年, Pecora 和 Carroll 开创性地实现混沌同步^[1]. 由于混沌同步在许多领域拥有巨大的潜在应用, 许多学者广泛地开展了混沌控制与同步的研究. 人们先后提出了一系列可以实现混沌同步的有效方法, 如 P - C 方法^[1], 主动控制^[2], 线性反馈控制^[3], 自适应反馈控制^[4], 滑模控制^[5]等.

另一方面, 自从 1998 年 Nature 上的“小世界网络”^[6]和 1999 年 Science 上的“无标度网络”^[7]两篇开创性文章发表之后, 复杂网络的研究掀起了一股热潮. 复杂网络的同步同样得到了广泛的研究^[8-16]. 针对单个网络的同步研究, 目前已经有了大量的研究成果^[8-12]. 近年来, 人们渐渐地考虑了双网络之间的同步即“外同步”^[13,14]. 此外, 胡满峰等首先提出了驱动 - 响应网络模型^[15,16]. 文献^[15]采用单个部分线性系统驱动响应网络, 实现了投影同步. 文献^[16]研究了驱动 - 响应网络的投影聚类同步. 文献^[15,16]研究的驱动 - 响应网络显示地把驱动系统放在了网络模型里. 这样, 网络的同步目标态就可以显示地表达在网络模型里. 在已有的单个网络同步(称“内同步”)的研究文献上, 其实存在一个目标系统充当驱动系统的角色. 而把驱动系统显示放在网络模型里的优点就是可以研究多种同步类型, 如完全同步、广义同步、投影

同步等^[17]. 这样可以扩展网络同步的实际应用范围. 文献^[18]进一步研究了网络节点动力学完全相同的驱动 - 响应网络的函数投影同步. 文献^[15, 16, 18]考虑的混沌系统要求为部分线性系统, 这样限制了其适用范围. 考虑到驱动系统存在不确定性以及网络节点的动力学不同, 文献^[19]针对此类驱动 - 响应网络研究了其函数投影同步. 在实际应用中, 混沌系统的参数可能是不同、未知或者不确定^[20,21]. 同样, 驱动系统以及网络节点的动力系统的参数可能未知或者失配. 然而, 目前针对带有未知参数的驱动 - 响应网络的研究相对较少. 基于以上的讨论及启发, 为简单起见, 本文试图研究带有未知参数的驱动 - 响应网络的完全同步. 基于 Lyapunov 稳定性理论以及结合自适应控制方法, 本文设计了相应的控制器以及参数更新规律实现驱动 - 响应网络的同步. 最后, 分别采用加权网络和 BA 无标度网络作为例子验证本文方法的有效性.

1 问题描述

本文主要是研究单个驱动系统与响应网络之间的同步. 考虑带有未知参数的混沌系统作为驱动系统, 其状态方程可以写为:

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\alpha \quad (1)$$

其中, $x \in R^n$ 为状态变量, $f(x) \in R^n$, $F(x) \in R^{n \times m}$ 为非线性矩阵函数, $\alpha \in R^m$ 为系统的未知参数向量. 假设 $\Omega \subset R^n$ 为混沌系统(1)的吸引域.

考虑由 N 个带有未知参数的混沌系统组成的

线性耗散耦合的响应网络,其相应的状态方程可以写为:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= f(y_i) + F(y_i)\alpha_i + c \sum_{j=1}^N a_{ij}\Gamma y_j + u_i(t), \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $y_i \in R^n$ 为第 i 个节点的状态变量, $\alpha_i \in R^m$ 为第 i 个节点未知参数向量, 常数 $c > 0$ 为网络的耦合强度, 矩阵 $A = (a_{ij})_{N \times N}$ 表示网络的拓扑结构, 称为外耦合矩阵, 并且满足耗散耦合条件 $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, N, \Gamma \in R^{n \times n}$ 为内耦合矩阵, $u_i(t)$ 为控制器.

本文的基本目标是设计合适的控制器实现响应网络的每个节点和驱动系统同步, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - y_i\| = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

其中, $\|\cdot\|$ 表示欧式范数, 即向量 $x \in R^n$ 的范数定义为: $\|x\| = \sqrt{x^T x}$.

2 控制器设计及稳定性分析

为了实现以上目标, 这里需要做出以下假设:

H1: 假设连续函数 f 在有界区域 Ω 上满足 Lipschitz 条件, 即存在正常数 L_f , 使得

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L_f \|x - y\| \quad (4)$$

许多混沌系统满足 H1, 如 Lorenz 系统, Chen 系统, Genesio - Tesi 系统等.

定义误差变量 $e_i = x - y_i, i = 1, 2, \dots, N$. 则由 (1)、(2) 可得到误差系统

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= f(x) - f(y_i) + F(x)\alpha - F(y_i)\alpha_i - \\ &c \sum_{j=1}^N a_{ij}\Gamma e_j - u_i(t), i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5)$$

因此, 驱动 - 响应网络之间的同步就转化为了误差系统(5)的稳定性问题.

定理 1: 如果驱动系统满足 H1, 并且满足以下 3 个条件:

条件(1): $u_i(t) = F(x)\hat{\alpha} - F(y_i)\hat{\alpha}_i + \hat{\theta}e_i$;

条件(2): $\dot{\hat{\alpha}} = F^T(x) \sum_{i=1}^N e_i, \dot{\hat{\alpha}}_i = -F^T(y_i)e_i$;

条件(3): $\dot{\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^N \|e_i\|^2$;

其中, $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_i$ 分别为 α, α_i 的参数估计, $i = 1, 2, \dots, N$.

则驱动 - 响应网络可以实现同步.

证明: 选择 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N e_i^T e_i + \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^T (\alpha_i - \hat{\alpha}_i) + \right.$$

$$\left. (\alpha - \hat{\alpha})^T (\alpha - \hat{\alpha}) + (\theta - \hat{\theta})^2 \right) \quad (6)$$

其中, θ 待定常数.

则 V 沿误差系统(5)关于时间的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N e_i^T \dot{e}_i - \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^T \dot{\hat{\alpha}}_i - (\alpha - \hat{\alpha})^T \dot{\hat{\alpha}} - \\ &(\theta - \hat{\theta}) \dot{\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^N e_i^T (f(x) - f(y_i) + F(x)\alpha - \\ &F(y_i)\alpha_i - c \sum_{j=1}^N a_{ij}\Gamma e_j - u_i(t)) - \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \\ &\hat{\alpha}_i)^T \dot{\hat{\alpha}}_i - (\alpha - \hat{\alpha})^T \dot{\hat{\alpha}} - (\theta - \hat{\theta}) \dot{\hat{\theta}} = \\ &\sum_{i=1}^N e_i^T (f(x) - f(y_i) + \sum_{i=1}^N e_i^T F(x)(\alpha - \hat{\alpha}) - \\ &\sum_{i=1}^N e_i^T F(y_i)(\alpha_i - \hat{\alpha}_i) - c \sum_{i=1}^N e_i^T \sum_{j=1}^N a_{ij}\Gamma e_j - \\ &\sum_{i=1}^N e_i^T \hat{\theta} e_i) - \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^T \dot{\hat{\alpha}}_i - (\alpha - \hat{\alpha})^T \dot{\hat{\alpha}} - \\ &(\theta - \hat{\theta}) \dot{\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (7)$$

因为

$$\dot{\hat{\alpha}} = F^T(x) \sum_{i=1}^N e_i, \dot{\hat{\alpha}}_i = -F^T(y_i)e_i, \dot{\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^N \|e_i\|^2 \quad (8)$$

所以(7)式可以改写为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N e_i^T (f(x) - f(y_i)) - c \sum_{i=1}^N e_i^T \sum_{j=1}^N a_{ij}\Gamma e_j - \\ &\sum_{i=1}^N e_i^T \hat{\theta} e_i - (\theta - \hat{\theta}) \dot{\hat{\theta}} \leq L_f \sum_{i=1}^N \|e_i\|^2 - \\ &c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} e_i^T e_j - \sum_{i=1}^N e_i^T \hat{\theta} e_i - (\theta - \hat{\theta}) \dot{\hat{\theta}} \leq \\ &\sum_{i=1}^N (L_f - \theta) \|e_i\|^2 - c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} e_i^T \Gamma e_j \end{aligned} \quad (9)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} e_i^T \Gamma e_j &= e^T A \otimes \Gamma e = \frac{1}{2} e^T (Q^T + \\ &Q) e \geq \lambda_{\min} \left(\frac{Q^T + Q}{2} \right) \|e\|^2 = \\ &\lambda_{\min} \left(\frac{Q^T + Q}{2} \right) \sum_{i=1}^N \|e_i\|^2 \end{aligned} \quad (10)$$

这里, $e = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T)^T \in R^{nN}, Q = A \otimes \Gamma, \lambda_{\min} \left(\frac{Q^T + Q}{2} \right)$ 为 $\frac{Q^T + Q}{2}$ 的最小特征值, 从而,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N (L_f - c \lambda_{\min} \left(\frac{Q^T + Q}{2} \right) - \theta) \|e_i\|^2 = \\ &- \sum_{i=1}^N e_i^T e_i \leq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

这里, $\theta = L_f - c\lambda_{\min}(\frac{Q^T + Q}{2}) + 1$.

由 LaSalle 不变原理^[22], 可以得到:

$$\|e_i\| \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty), i = 1, 2, \dots, N.$$

从而, 误差系统(5)是渐近稳定的, 即驱动-响应网络实现了同步.

3 数值仿真

为了验证本文方法的有效性, 下面采用两个例子

进行分析. 以下均考虑内耦合矩阵为 $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

耦合强度为 $c = 5$.

例 1: 考虑驱动系统和响应网络的节点为 Chen 混沌系统, 其状态方程为:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

当 $\alpha_1 = 35, \alpha_2 = 28, \alpha_3 = 3$ 时, 系统呈现混沌现象, 如图 1.

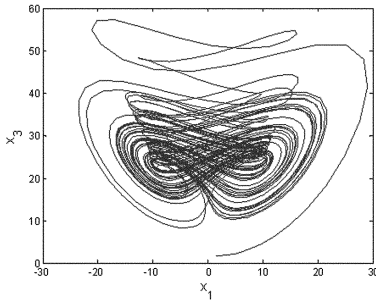


图 1 Chen 混沌系统吸引子

Fig. 1 The attractor of Chen chaotic system

假设响应网络由 5 个节点组成的加权网络, 其邻接矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad (13)$$

系统的初值及参数估计的初值为 0~2 的随机数, 采用 Matlab 软件进行仿真可以得到误差图, 如图 2. 从图 2, 可以看出误差系统很快收敛到零点, 进一步说明了驱动-响应网络实现了同步.

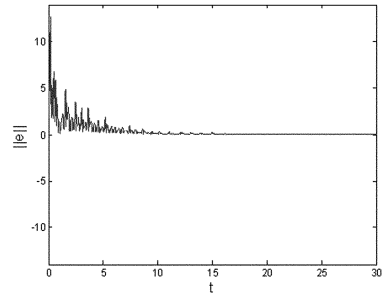


图 2 误差图

Fig. 2 The synchronization error

例 2: 考虑驱动系统和响应网络的节点为 Lorenz 混沌系统, 其状态方程为:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

当 $\alpha_1 = 10, \alpha_2 = 28, \alpha_3 = \frac{8}{3}$ 时, 系统呈现混沌现象, 如图 3.

如图 3.

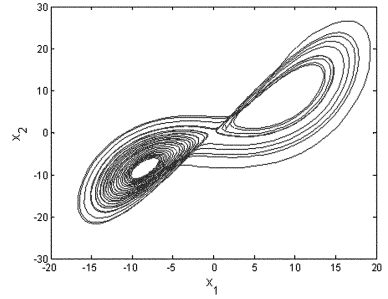


图 3 Lorenz 混沌系统吸引子

Fig. 3 The attractor of Lorenz chaotic system

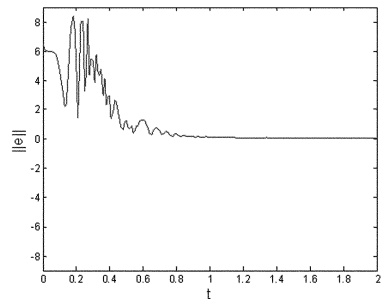


图 4 误差图(BA 无标度网络的节点为 Lorenz 系统)

Fig. 4 The synchronization error (the dynamics of the node is Lorenz system)

假设响应网络由节点数目为 50, 初始为 3 个孤立节点, 新增加的节点优先连接 3 条边生成的 BA 无标度网络. 系统的初值及参数估计的初值为

0~2 的随机数,采用 Matlab 软件进行仿真可以得到误差图,如图 4. 从图 4,可以看出误差系统很快收敛到零点,进一步说明了驱动—响应网络实现了同步. 对于例 1,我们同样考虑其网络结构为 BA 无标度网络,可以得到如图 5 的误差图. 比较图 4、图 5,同步时间跟节点的动力学紧密相关.

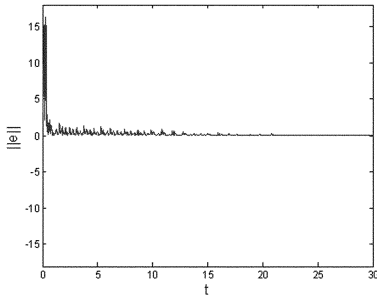


图 5 误差图(BA 无标度网络的节点为 Chen 系统)

Fig. 5 The synchronization error (the dynamics of the node is Chen system)

4 结论

本文基于 Lyapunov 稳定性理论,设计合适的控制器和参数更新律,实现了带有未知参数的驱动—响应网络的自适应同步. 分别采用加权网络和无标度网络验证了该方法的有效性. 同时,比较了相同的网络结构下不同动力学对同步时间的影响. 最后,数值仿真说明了该方法是可行的.

参 考 文 献

- 1 Pecora L O, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8):821~824
- 2 Bowong S, Kakmeni F M, Siewe M S. Secure communication via parameter modulation in a class of chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2007, 12(3):397~410
- 3 Tao C H, Xiong H X, Hu F. Two novel synchronization criteria for a unified chaotic system. *Chaos Solitons and Fractals*, 2006, 27(1):115~120
- 4 Chen S H, Lü J H. Parameters identification and synchronization of chaotic systems based upon adaptive control. *Physics Letters A*, 2002, 299(4):353~358
- 5 Yan J, Hung M, Chiang T, Yang Y. Robust synchronization of chaotic systems via adaptive sliding mode control. *Physics Letters A*, 2006, 356(3):220~225
- 6 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-

- world' networks. *Nature*, 1998, 393:440~442
- 7 Balabasi A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286:509~512
- 8 Barahona M, Pecora L M. Synchronization in small-world systems. *Physical Review Letters*, 2002, 89(5):1~4
- 9 Wang X F, Chen G R. Pinning control of scale-free Dynamical networks. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2002, 310(3):521~531
- 10 Lu W L, Li X, Rong Z H. Global stabilization of complex networks with digraph topologies via a local pinning algorithm. *Automatica*, 2010, 46(1):116~121
- 11 张刚,张伟. 复杂网络的脉冲同步. 动力学与控制学报. 2009, 7(1):1~4 (Zhang G, Zhang W. Impulsive synchronization of compl-exnetwork. *Journal of Dynamics and Control*, 2009,7(1):1~4(in Chinese))
- 12 Zhou C, Kurths J. Dynamical weights and enhanced synchronization in adaptive complex networks. *Physical Review Letters*, 2006, 96,164102:1~4
- 13 Tang H W, Chen L, Lu J A, Tse C K. Adaptive Synchronization between two complex network with nonidentical topological structures. *Physica A*, 2008, 387:5623~5630
- 14 Li C P, Sun W G, Kurths J. Synchronization between two coupled complex networks. *Physical Review E*, 2007, 76(4),0462041:1~6
- 15 Hu M F, Yang Y Q, Xu Z Y, et al. Projective synchronization in drive-response dynamical networks. *Physica A*, 2007, 381:475~466
- 16 Hu M F, Xu Z Y, Yang Y Q. Projective cluster synchronization in drive-response dynamical networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2008, 387(14):3759~3768
- 17 胡满峰. 混沌投影同步研究及其应用. 江南大学[博士学位论文], 2008 (Hu M F. Study on Synchronization of Chaotic systems with Its Application. Jiangsu university [Dissertation for the Doctoral Degree], 2008 (in Chinese))
- 18 Zhang R, Yang Y Q, Xu Z Y, et al. Function Projective synchronization in drive-response dynamical network. *Physica A*, 2010, 374:3025~3028
- 19 Du H Y. Function projective synchronization in drive-response dynamical networks with non-identical nodes. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2011, 44(7):510~514
- 20 Zhang H G, Huang W, WANG Z L, et al. Adaptive synchronization between two different chaotic systems with unknown parameters. *Physics Letters A*, 2006, 350:363~

366

Applications, 2010, 15(2):166 ~ 175

21 Cai J P, Lin M L, Yuan Z Z. Secure commication using practical synchronization between two different chaotic systems with uncertainties. *Mathematical and Computational*

22 LaSalle J P. The extent of asymptotic stabilit . Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America ,1960, 46:363 ~ 365

ADAPTIVE SYNCHRONIZATION OF DRIVE-RESPONSE DYNAMICAL NETWORK WITH UNKNOWN PARAMETERS*

Wang Jincheng

(*Department of Mathematics and Information Science, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, China*)

Abstract This paper investigated the adaptive synchronization of a drive-response dynamical network, in which each node is a chaotic system with unkonwn parameters. Based on the Lyapunov stability theory and LaSalle's invariant set theory, suitable controllers and parameters update laws were designed to achieve synchronization between the drive system and response dynamical network. A weighted network and a scale-free network were used as examples to verify theoretical results. In addition, with the same network topology, synchronization time of different dynamics was compared. Numerical simulations show the effectiveness of the control scheme.

Key words drive-response network, adaptive synchronization, scale-free network, chaos