第 10 卷第 1 期 2012 年 3 月
1672-6553/2012/10(1)/015-6

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 10 No. 1
Mar. 2012

非对称强非线性振动特征分析*

李银山　潘文波　吴艳艳　李欣业

（河北工业大学 机械工程学院 力学系，天津　300130）

摘要　提出了构造一类非线性振子解析逼近周期解的的初值变换法. 用 Ritz - Galerkin 法，将描述动力系统的二阶常微分方程，化为以振幅、角频率和偏心距为独立变量的不完备非线性代数方程组；关键是考虑初值变换，增加补充方程，构成了以角频率、振幅和偏心距为变量的完备非线性代数方程组. 作为例子利用初值变换法求解了相对论修正轨道方程的六种分岔周期解. 给出了非对称振动的幅频曲线和偏频（偏心距与角频率的关系）曲线. 发现了固有角频率漂移现象.

关键词　初值变换法，　非对称振动，　分岔，　偏 - 频曲线，　固有角频率漂移

引 言

在传统的非线性振动研究中，周期解的定性分析与定量分析是相分离的. C - L 方法[1]（陈予恕和 Langford W. F. 1988）把两者统一在了一起. C - L 方法建立了周期解的拓扑结构和系统参数之间的关系，把经典的非线性振动理论发展到可求整个参数空间中的周期解问题[2]，统一了世界文献上对非线性参数系统似乎矛盾的结果[3,4].

传统的周期解摄动法[4,5]是在线性振动周期解的基础上摄动的，控制微分方程的摄动与初始条件是相分离的. 因此，传统的摄动法对许多具有周期解的问题无法求解. 对于一般的强非线性振动系统，由于情况复杂，虽然取得了可喜的成果[6~8]，但目前还缺乏象弱非线系统那样一整套通用的近似求解方法. 特别是对非对称强非线性振动问题探讨较少.

文献[9 - 11]采用初值变换法的思想求解了对称强非线性振动问题；文献[12,13]采用初值变换法的思想求解了非对称强非线性振动问题.

本文对相对论修正轨道方程进行了分岔分析，采用初值变换法求解了相对论修正轨道方程的六种非对称周期解，首次绘出了偏 - 频（偏心距与角频率）的关系曲线，发现了固有角频率漂移现象，并分析了产生的原因.

1　初值变换法

李银山[9 - 13]提出的初值变换法，其基本思想是把一个非线性微分方程组的解，用两项谐波的组合来解析逼近. 首先采用谐波平衡法，得到以振幅，角频率和偏心距为未知数的不完备非线性代数方程组（未知数减去方程数等于一）；然后利用能量守恒原理，对初始条件进行变换，把用位移和速度表示的初始条件变换成振幅，角频率和偏心距之间的协调方程（增加了一个补充方程），从而构成了关于振幅，角频率和偏心距为未知数的完备非线性代数方程组；对这个非线性代数方程组进行求解，就可以得到振幅，角频率和偏心距.

考察方程

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{1a}$$

为存在周期解的动力系统. 这里，$f(x)$ 是其变量 x 的任意非线性函数. 初始条件为：

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{1b}$$

首先对方程（1a）进行奇异性分析，判断是否有周期解，是对称周期解，还是非对称周期解，然后根据周期解的类型分别进行求解.

1.1　考虑初值变换的单项谐波平衡法

(I) 单项谐波平衡

设动力系统（1a）的非对称周期解为

$$x = a_0 + a_1\cos(\omega t) \tag{2}$$

令 $\psi = \omega t$ 用 Ritz - Galerkin 平均法得到：

$$\int_0^{2\pi} [\ddot{x} + f(x)]\cos(s\psi)\mathrm{d}\psi = 0, (s = 0,1) \tag{3a}$$

即单项谐波平衡解偏—幅—频关系.

2011-11-2 收到第 1 稿，2011-11-12 收到修改稿.
* 国家自然科学基金重点资助项目（10632040）

Ⅱ 初值变换

变换初始条件(1b),增加补充方程

$$(a_0+a_1)^2=(x_0-e)^2+\frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} \tag{3b}$$

这里 e 为中心坐标.

Ⅲ 确定振幅、角频率和偏心距

由(3)联立可解得 ω, a_0, a_1.

1.2 考虑初值变换的两项谐波平衡法

Ⅰ 两项谐波平衡

设动力系统(1a)的非对称周期解为

$$x=a_0+a_1\cos(\omega t)+a_2\cos(2\omega t) \tag{4}$$

令 $\psi=\omega t$ 用 Ritz-Galerkin 平均法得到:

$$\int_0^{2\pi}[\ddot{x}+f(x)]\cos(s\psi)\mathrm{d}\psi=0,(s=0,1,2) \tag{5a}$$

可得到两项谐波平衡解偏—幅—频关系.

Ⅱ 初值变换

变换初始条件(1b)增加补充方程

$$(a_0+a_1+a_2-e)^2=(x_0-e)^2+\frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} \tag{5b}$$

Ⅲ 确定振幅、角频率和偏心距

由方程组(5)联立可解得 ω, a_0, a_1, a_2.

2 应用

一行星围绕太阳运行之轨道方程为带有参数 c_0, c_2 的二次非线性哈密顿系统:

$$\ddot{x}+\omega_0^2x+c_0+c_2x^2=0 \tag{6a}$$

其中 c_2x^2 是相对论修正项,不妨取 $\omega_0=1$. 其初始条件为:

$$x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \tag{6b}$$

2.1 周期解存在性和对称性分岔分析

方程(6a)有两个平衡点:

$$x_1^*=\frac{-\omega_0^2+\sqrt{\omega_0^4-4c_0c_2}}{2c_2},\quad x_2^*=\frac{-\omega_0^2-\sqrt{\omega_0^4-4c_0c_2}}{2c_2}\qquad c_2\neq 0 \tag{7}$$

哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2}\dot{x}^2+c_0x+\frac{1}{2}\omega_0^2x^2+\frac{1}{3}c_2x^3 \tag{8}$$

势能函数

$$V=c_0x+\frac{1}{2}\omega_0^2x^2+\frac{1}{3}c_2x^3 \tag{9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0,\quad c_0+\omega_0^2x+c_2x^2=0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0,\quad 2c_2x=0 \tag{11}$$

若两个平衡点中有一个是中心 $x^{\#}=e$,令 $x=y+e$,代入(10)式,并令关于 y 的偶次项系数等于零,得到

$$c_0+\omega_0^2e+c_2e^2=0\quad(\text{常数项为零}) \tag{12}$$

$$c_2=0\quad(\text{二次项系数为零}) \tag{13}$$

产生分岔满足的条件是(10)~(13)式. 其中(10)式是平衡条件;(11)式是稳定性条件;(12)和(13)式是对称性条件.

方程(6a)具有对称周期解的有三种情况:

(a) $c_0=0, c_2=0, e=0$;

(b) $c_0>, c_2=0, e=-c_0$;

(c) $c_0<, c_2=0, e=-c_0$.

此时对应线性振动.

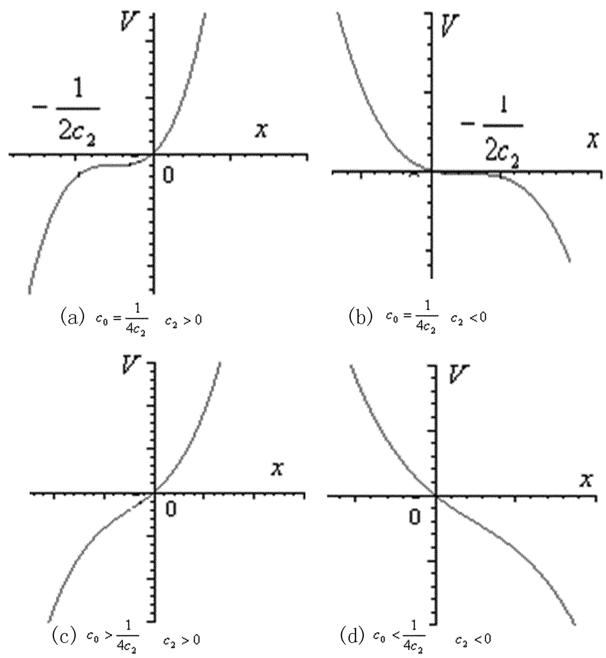


图1 无周期解的势函数

Fig. 1 Potential function of non periodic solution

方程(6a)具有非对称周期解的有六种情况:

(a) $c_0=0, c_2>0, e=0$;

(b) $c_0=0, c_2<0, e=0$;

(c) $0<c_0<\frac{1}{4c_2}, c_2>0, e=x_1^*$;

(d) $\frac{1}{4c_2}<c_0<0, c_2<0, e=x_2^*$;

(e) $c_0<0, c_2>0, e=x_1^*$;

(f) $c_0>0, c_2<0, e=x_2^*$.

如图1中所示的势能曲线,方程(6a)无周期

解的有四种情况:

$(a)\ c_0=\dfrac{1}{4c_2}, c_2>0$;

$(b)\ c_0=\dfrac{1}{4c_2}, c_2<0$;

$(c)\ c_0>\dfrac{1}{4c_2}, c_2>0$;

$(d)\ c_0<\dfrac{1}{4c_2}, c_2<0$.

2.2　非对称强非线性自由振动的初值变换法

设方程(6a)的解为

$$x=a_0+a_1\cos(\omega t)+a_2\cos(2\omega t) \tag{14}$$

令 $\psi=\omega t$ 用 Ritz 平均法:

$$\int_0^{2\pi}[\ddot{x}+f(x)]\cos(s\psi)\mathrm{d}\psi=0,(s=0,1,2) \tag{15}$$

单项谐波平衡解的幅—频－偏关系:

$$c_0+a_0+\frac{c_2}{2}(2a_0^2+a_1^2)=0 \tag{16a}$$

$$(1-\omega^2)+2c_2a_0=0 \tag{16b}$$

初始条件约束方程:

$$(a_0+a_1-e)^2=(x_0-e)^2+\frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} \tag{16c}$$

由方程组(16)联立可解得 ω, a_0, a_1.

两项谐波平衡解幅—频－偏关系

$$c_0+a_0+\frac{c_2}{2}(2a_0^2+a_1^2+a_2^2)=0 \tag{17a}$$

$$(1-\omega^2)+c_2(2a_0+a_2)=0 \tag{17b}$$

$$(1-4\omega^2)a_2+\frac{c_2}{2}(4a_0a_2+a_1^2)=0 \tag{17c}$$

初始条件约束方程

$$(a_0+a_1+a_2-e)^2=(x_0-e)^2+\frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} \tag{17d}$$

由(17)联立可解得 ω, a_0, a_1, a_2.

2.3　非对称精确周期解相轨曲线

保守系统(6),中心在$(e,0)$的非对称精确周期解相轨曲线为

$$H=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}x^2+c_0x+\frac{1}{3}c_2x^3=H_{\text{const}} \tag{18}$$

常数 H_{const} 可由初始条件确定. 非对称精确周期解的周期为

$$T=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2[H_{\text{const}}-V(x)]}} \tag{19}$$

非对称精确周期解的圆频率

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \tag{20}$$

2.4　非对称周期解的幅频曲线和偏频曲线

2.4.1　中心在零点 $c_0=0, c_2\neq0$

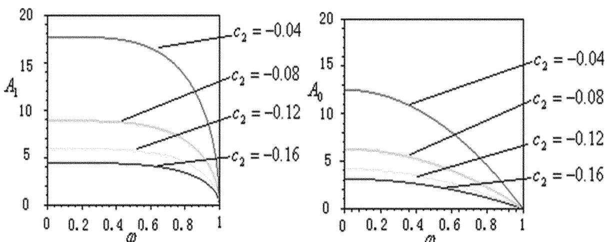
幅－频关系(第一谐波振幅与频率的关系,其中 $A_1=|a_1|$)

$$\omega^2=\sqrt{\omega_0^2-2c_2^2A_1^2} \tag{21a}$$

偏－频关系(偏心矩与频率的关系,其中 $A_0=|a_0|$)

$$A_0^2=\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{4c_2^2} \tag{21b}$$

当 $c_0=0, c_2<0, e=0$ 时,图 2 (a)给出了幅频曲线;图 2 (b)给出了偏频曲线.



(a) Amplitude-frequency curves　　(b) central offset-frequency curves

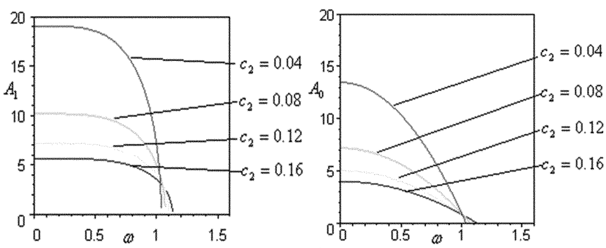
图 2　骨干曲线($c_0=0, c_2<0, e=0$)

Fig. 2　Backbone Curves($c_0=0, c_2<0, e=0$)

当 $c_2\neq0$ 时,二次非线性系统具有软弹簧特征. 偏频曲线是非线性非对称振动特有的现象.

2.4.2　中心不在零点

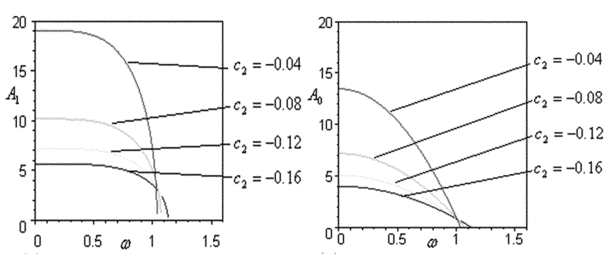
幅－频关系(第一谐波振幅与角频率的关系,其中 $A_1=|a_1|$)



(a) Amplitude-frequency curves　　(b) Central offset-frequency curves

图 3　骨干曲线($c_0=-1, c_2>0, e=x_1^*$)

Fig. 3　Backbone Curves($c_0=-1, c_2>0, e=x_1^*$)



(a) Amplitude-frequency curves　　(b) central offset-frequency curves

图 4　骨干曲线($c_0=1, c_2<0, e=x_2^*$)

Fig. 4　Backbone Curves($c_0=1, c_2<0, e=x_2^*$)

$$\omega^2=\sqrt{\omega_0^2-4c_0c_2-2c_2^2A_1^2)} \quad (22a)$$

偏－频关系(偏心矩与角频率的关系,其中 $A_0=|a_0-e|$)

$$A_0^2=\left(\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2c_2}-e\right)^2 \quad (22b)$$

固有角频率漂移

$$\bar{\omega}_0^2=\omega_0^2-4c_0c_2,\quad \omega_0=1 \quad (22c)$$

当 $c_0=-1, c_2>0, e=x_1^*$ 时,图 3 (a)给出了幅频曲线;图 3 (b)给出了偏频曲线.

当 $c_0=1, c_2<0, e=x_2^*$ 时,图 4 (a)给出了幅频曲线;图 4 (b)给出了偏频曲线.

当 $c_0\neq 0$ 时,产生固有频率漂移现象. 当 c_0 和 c_2 同号($c_0\cdot c_2>0$)时固有角频率向左漂移,即 $\bar{\omega}_0<\omega_0$;当 c_0 和 c_2 异号($c_0\cdot c_2<0$)时固有角频率向右漂移,即 $\bar{\omega}_0>\omega_0$.

3 数值解

图 5 和图 6 给出了二次非线性保守系统方程(6)的相轨迹:(a)单项谐波平衡法解与解析法解的比较;(b)两项谐波平衡法解与解析法解的比较.

1) $c_0=0, c_2=1$,中心在 $e=0$,初始条件 $x_0=-0.8, \dot{x}_0=0$ 时,方程(10)的相轨迹如图 5 所示.

解析法解:

$x=-0.8+1.2761cn^2(0.52477t, 0.87884)$, $\omega=0.74984$;

单项谐波平衡法解:

$x=-0.21703-0.58297\cos(0.75229t)$;

两项谐波平衡法解:

$x=-0.28497-0.62825\cos(0.73708t)+0.11322\cos(1.4742t)$.

2) $c_0=1, c_2=-1/5$,中心在 $e=-0.85410$,初始条件 $x_0=5, \dot{x}_0=0$ 时,方程(10)的相轨迹如图 6 所示.

解析法解:$\omega=0.79057$;

单项谐波平衡法解:

$x=0.86127+4.1387\cos(0.80963t)$;

两项谐波平衡法解:

$x=1.5822+4.4452\cos(0.75670t)-1.0274\cos(1.5134t)$.

表 1 初值变换法与解析法求解方程(6)的周期对比[取 $c_0=0, c_2=1$]

Table 1 Periodic comparison of the method of initial - value transformation and analytical methods for the equation (6) [when $c_0=0, c_2=11$]

Energy H	Norm k	Angle Θ	Amplitude A	Central offset A_0	Angular frequency ω	Period T	Period T^*
0	0	1.047 20	0	0	1	6.283 2	6.283 2
0.001 67	0.272 81	0.980 35	0.057 85	0.001 12	0.998 60	6.292 0	6.292 0
0.010 00	0.418 79	0.882 22	0.142 23	0.006 79	0.991 46	6.337 3	6.337 4
0.020 00	0.493 63	0.811 37	0.202 35	0.013 84	0.982 48	6.395 2	6.395 5
0.040 00	0.583 41	0.705 88	0.289 88	0.028 84	0.962 96	6.524 9	6.526 0
0.060 00	0.646 40	0.618 20	0.360 23	0.045 31	0.940 82	6.678 4	6.681 4
0.080 00	0.698 89	0.536 94	0.422 97	0.063 69	0.915 12	6.866 0	6.872 7
0.100 00	0.747 14	0.456 48	0.482 34	0.084 73	0.884 21	7.106 0	7.120 2
0.120 00	0.795 32	0.371 73	0.541 49	0.109 79	0.844 85	7.437 0	7.468 1
0.140 00	0.848 79	0.274 34	0.604 64	0.142 04	0.788 76	7.965 9	8.045 5
0.160 00	0.924 84	0.134 24	0.685 30	0.194 30	0.674 85	9.310 5	9.778 4
1/6	1	0	0.75	0.25	0	∞	∞

T—解析法得到的周期;T*—初值变换法得到的周期.

T—Period by analytic method; T*—Period by method of initial - value transformation.

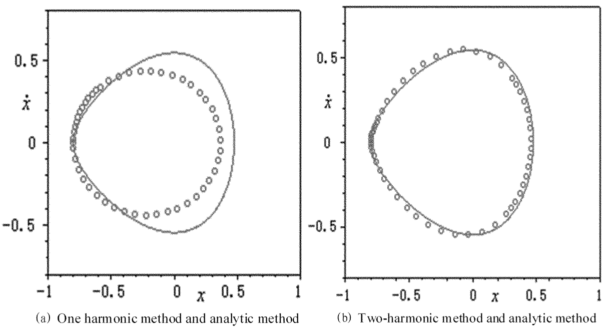
表 1 给出初值变换法与解析法求得方程(6)[取 $c_0=0, c_2=1$]的周期比较. 其中,H 为哈密顿能量函数,A 为振幅,A_0 为偏心距,ω 为角频率.

4 结论

1)相对论修正轨道方程属于典型的非对称强非线性振动问题. 这个方程具有分岔特征,包括六种非对称周期轨道. 采用初值变换法,可以方便地求解,其结果简单,精确.

2)在非对称强非线性振动问题中,不仅存在幅

－频关系和相－频关系,而且存在偏－频关系. 偏－频关系是非对称强非线性振动问题特有的特性,在工程中必须给予足够的重视.



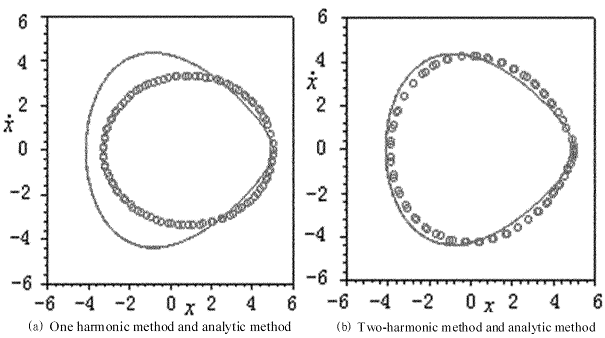
(a) One harmonic method and analytic method (b) Two-harmonic method and analytic method

图 5 相轨迹($c_0=0, c_2=1, e=0, x_0=-0.8, \dot{x}_0=0$)

°°°初值变换法,——解析法

Fig. 5 Phase planes($c_0=0, c_2=1, e=0, x_0=-0.8, \dot{x}_0=0$)

°°°method of initial－value transformation,—— analytic method



(a) One harmonic method and analytic method (b) Two-harmonic method and analytic method

图 6 相轨迹($c_0=1, c_2=-0.2, e=-0.85410, x_0=5, \dot{x}_0=0$)

°°°初值变换法,——解析法

Fig. 6 Phase planes($c_0=0, c_2=1, e=0, x_0=-0.8, \dot{x}_0=0$)

°°°method of initial－value transformation,—— analytic method

3)发现了非对称周期轨道的固有角频率漂移现象. 固有角频率漂移现象是由于非线性微分方程中存在常数而引起的;对于线性微分方程中存在的常数,可以通过坐标平移消去,但非线性微分方程中的常数是不能消去的,必须引起重视.

参 考 文 献

1 陈予恕,W. F. 朗福德. 非线性马休方程的亚谐分叉解及欧拉动弯曲问题. 力学学报, 1988,20(6),522～531 (Chen Y S, Langford W F. The sub-harmonic bifurcation solution of nonlinear Mathiu's equation and euler dynamically buckling problems. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1988,20(6):522～531(in Chinese))

2 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论. 北京:高等教育出版社,1993 (Chen Y S. Bifurcation and chaos theory of nonlinear vibration. Beijing:Higher Education Press, 1993(in Chinese))

3 Bogoliubov N N, Mitropolsky A Y. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. New York:Gordon and Breach,1961

4 Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillations. New York:John Wiley & Sons, 1979

5 陈予恕. 非线性振动 . 天津:天津科学技术出版社,1983 (Chen Y S. Nonlinear vibration. Tianjin:Tianjing Science and Technology Press, 1983(in Chinese))

6 李骊. 强非线性振动系统的定性理论和定量方法. 北京:科学出版社,1997 (Li L. Qualitative theory and quantitative method for strongly nonlinear vibration system. Beijing:Science Press, 2007(in Chinese))

7 陈树辉. 强非线性振动系统的定量分析方法 . 北京:科学出版社,2007 (Chen S H. Quantitative analysis method for strongly nonlinear vibration system. Beijing: Science Press, 2007(in Chinese))

8 李欣业,张华彪,贺丽娟,张丽娟. 内共振关系对弹簧摆动力学行为的影响 . 动力学与控制学报,2011,9(2):152～157 (Li X Y, Zhang H B, He L J, Zhang L J. Influence of internal resonance on dynamics of spring pendulums. *Journal of Dynamics and Control*, 2011,9(2):152～157(in Chinese))

9 李银山,张善元,董青田,曹俊灵. 用两项谐波法求解强非线性 Duffing 方程. 太原理工大学学报,2005,36(6):690～693 (Li Y S, Zhang S Y, Dong Q T, Cao J L. Two harmonics method for strongly nonlinear duffing equation. *Jounal of Taiyuan University of Technology*, 2005,36(6):690～693 (in Chinese))

10 李银山,张善元,李欣业,罗利军. 强非线性动力系统的两项谐波法,太原理工大学学报,2005,36(6):694～696 (Li Y S, Zhang S Y, Li X Y, Luo L J. Two harmonics method for strongly nonlinear dynamic systems. *Journal of Taiyuan University of Technology*, 2005,36(6):694～696 (in Chinese))

11 李银山,李树杰,曹俊灵,侯书军. 求解强非线性振动问题的初值变换法. 振动与冲击,2008,27(S):28～30 (Li Y S, Li S J, Cao J L, Hou S J. A method of initial-value transform for strongly nonlinear vibration. *Journal of Vibration and Shock*, 2008,27(S):28～30(in Chinese))

12 李银山,张善元,刘波,董青田. 各种板边条件下大挠度圆板自由振动的分岔解. 机械强度,2007,29(1):30～35 (Li Y S, Zhang S Y, Liu B, Dong Q T. Bifurcate solutions of free vibration to a circular plate for various boundary con-

ditions. *Journal of Mechanical Strength*, 2007,29(1):30 ~35(in Chinese))

13 李银山,张明路,檀润华,李树杰. 强非线性非对称动力系统的两项谐波法. 河北工业大学学报,2007,36(5):1 ~11 (Li Y S, Zhang M L,Tan R H, Li S J. Two harmonics method for unsymmetrically dynamic systems with strong nonlinearity. *Journal of Hebei University of Technology*, 2007,36(5): 1 ~11(in Chinese))

ASYMMETRIC, STRONGLY NONLINEAR OSCILLATION CHARACTERISTIC ANALYSIS *

Li Yinshan Pan Wenbo Wu Yanyan LI Xinye

(*Department of Mechanics*, *Hebei University of Technology*, *Tianjin* 300130, *China*)

Abstract A method of initial-value transformation was presented to obtain the approximate analytic periods of a class of nonlinear oscillators. The periodic solutions can be expressed in the forms of basic harmonics and bifurcate harmonics. Thus, an oscillation system, which is described as a second order ordinary differential equation, can be expressed as a set of non-linear algebraic equations with a frequency, amplitudes as the independent variables using Ritz-Galerkin's method. But the set of equations is incomplete, and the key is to consider initial -value transformation. After adding supplementary equations, a set of non-linear algebraic equations with angular frequencies, amplitudes as the independent variables was constituted completely. For examples, six asymmetric periodic solutions bifurcating about a nonlinear differential equation arising in general relativity were solved by using the method of initial-value transform. Amplitude-frequency curves and central offset-frequency curves of the asymmetrically vibration systems were derived. In addition, the drift phenomenon of natural angular frequency was discovered.

Key words method of initial-value transformation, asymmetric vibration, bifurcation, central offset-frequency curves, the drift of natural angular frequency

Received 2 November 2011, revised 12 November 2011.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10632040)