

改进同伦分析方法及推广 Kuramoto - Sivashinsky 方程的近似解*

张翠英¹ 那仁满都拉²

(1. 呼伦贝尔学院物理与电子信息学院, 呼伦贝尔 021008) (2. 内蒙古民族大学物理与电子信息学院, 通辽 028043)

摘要 首先介绍了带有两个辅助参数的改进同伦分析方法, 然后用该方法得到了推广 Kuramoto - Sivashinsky 方程的同伦近似解. 所得近似解与精确孤立波解进行比较, 发现本文得到的近似解更有效地逼近真实解. 因为该解包含了两个辅助参数, 所以能够更有效地调节和控制其收敛区域和速度. 研究表明带有两个辅助参数的改进同伦分析方法对复杂非线性系统的研究更有它的优点.

关键词 改进同伦分析方法, 近似解, 孤立波解, 推广 Kuramoto - Sivashinsky 方程

引言

非线性偏微分方程广泛用于描述应用数学、物理、化学、生物及通讯等学科领域的各种复杂的非线性现象. 因此, 非线性偏微分方程的求解问题一直是数学家和物理学家重点研究的课题^[1-5]. 然而, 由于非线性偏微分方程的复杂性, 大多数方程很难得到精确解析解, 只能用近似解析方法或数值方法来获得近似解. 已有的传统近似方法, 如摄动方法、Lyapunov 人工小参数法、delta 展开法和 Adomian 分解法等方法虽能够成功地解决了许多非线性问题, 但这些方法给出的级数解之收敛区域和收敛速度都是唯一的, 不能提供一个控制和调节级数解之收敛区域和速度的简便途径. 针对这些近似方法的缺点和不足, 廖^[6]发展传统的同伦方法, 提出了一种解析近似方法——同伦分析方法. 该方法最大的优点是可提供一个辅助参数 h 来调节和控制所得级数解之收敛区域和速度. 文^[7-10]中的成功应用证实了该方法的有效性. 另外, 传统同伦方法另一方面的重要发展是用于非线性系统对称性分析和相似约化方面^[11].

最近, Wu 等^[12]改进廖提出的同伦分析方法, 得到了带有两个辅助参数的另一种形式的同伦分析方法, 称之为带有两个辅助参数的改进同伦分析方法. 该方法可提供两个辅助参数来调节和控制所得级数解之收敛区域和速度, 因此实质性地改进了所得级数解的收敛区域和速度.

本文将带有两个辅助参数的改进同伦分析方法应用到推广 Kuramoto - Sivashinsky (GKS) 方程^[13-15]的如下两个初值问题

$$u_t + 2\alpha_1 uu_x + \alpha_2 u_{xx} + \alpha_3 u_{xxx} + \alpha_4 u_{xxxx} = 0 \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \frac{15\alpha_3^3}{128\alpha_1\alpha_4^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\alpha_3}{8\alpha_4}x\right) \left[1 - \tanh\left(\frac{\alpha_3}{8\alpha_4}x\right)\right] \quad (2)$$

和

$$u_t + 2\alpha_1 uu_x + \alpha_2 u_{xx} + \alpha_3 u_{xxx} + \alpha_4 u_{xxxx} = 0$$
$$u(x, 0) = \frac{5\alpha_3^3}{384\alpha_1\alpha_4^2} \tanh\left(\frac{\alpha_3}{24\alpha_4}x\right) - \frac{5\alpha_3^3}{384\alpha_1\alpha_4^2} \tanh^2\left(\frac{\alpha_3}{24\alpha_4}x\right) - \frac{5\alpha_3^3}{1152\alpha_1\alpha_4^2} \tanh^3\left(\frac{\alpha_3}{24\alpha_4}x\right) \quad (3)$$

的研究中, 得到两个初值问题的同伦近似解并与精确孤立波解进行比较. 方程(1)中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 α_4 都是常数, $u(x, t)$ 表示所研究问题相应的物理量. 该方程在流体动力学和等离子体物理都具有重要应用. 方程(1)也称为 KdV - Burgers - Kuramoto 方程^[16,17]或 Benney 方程^[18,19]. 当 $\alpha_3 = 0$ 时, 方程(1)称为 Kuramoto - Sivashinsky - Korteweg - de Vries 方程^[20], 此方程描述沿斜面流动的粘性流体中长波的传播. 由此可知, 对该方程的研究具有广泛的应用.

1 带有两个辅助参数的改进同伦分析方法

首先介绍带有两个辅助参数的改进同伦分析

方法的基本思想. 我们考虑如下两个变量的偏微分方程

$$N[u(x,t)] = 0 \quad (4)$$

这里 N 是非线性算符, x 和 t 表示空间变量和时间变量, $u(x,t)$ 是未知函数. 为了简单起见, 这里不叙述所有边界条件和初始条件的处理过程. 实际上, 边界条件和初始条件的处理过程也类似. 文[12]中依照廖提出的同伦分析方法的基本思想, 构造了如下新的零阶形变方程

$$[1 - gp + (g-1)p^2] \{L[\varphi(x,t;p) - u_0(x,t)]\} = phN[\varphi(x,t;p)] \quad (5)$$

这里 $p \in [0, 1]$ 是所谓的嵌入变量, $h \neq 0$ 和 g 是两个辅助参数, L 是具有 $L(0) = 0$ 性质的线性算符, $u_0(x,t)$ 是初始猜测解, $\varphi(x,t;p)$ 是某一未知函数, 称为映射函数. 当 $p=0$ 时, 零阶形变方程(5)变成开始系统

$$L[\varphi(x,t;0) - u_0(x,t)] = 0 \quad (6)$$

由此可得 $\varphi(x,t;0) = u_0(x,t)$. 当 $p=1$ 时, 零阶形变方程(5)变成目标系统

$$N[\varphi(x,t;1)] = 0 \quad (7)$$

与式(4)比较可得 $\varphi(x,t;1) = u(x,t)$. 这表明, 随着嵌入变量 p 从 0 增大到 1, 零阶形变方程(5)由开始系统(6)变化到目标系统(7), 从而实现了初始猜测解 $u_0(x,t)$ 与精确解 $u(x,t)$ 之间的同伦.

由零阶形变方程(5)可看出, 该方程包含两个辅助参数 h 和 g , 第二个辅助参数 g 对开始系统到目标系统之间的同伦增添了一个新的自由度, 因此能够更有效地调节和控制所得级数解的收敛区域和速度. 当辅助参数 $g=1$ 时, 零阶形变方程(5)变成廖提出的同伦分析方法的零阶形变方程, 即

$$[1 - p] \{L[\varphi(x,t;p) - u_0(x,t)]\} = phN[\varphi(x,t;p)] \quad (8)$$

因此廖提出的同伦分析方法的零阶形变方程是零阶形变方程(5)的一种特殊情况. 将映射函数 $\varphi(x,t;p)$ 对嵌入变量 p 作泰勒级数展开得

$$\varphi(x,t;p) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x,t)p^m \quad (9)$$

这里 $u_m(x,t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \varphi(x,t;p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}$. 如果辅助参数、辅助线性算符以及初始猜测解选取适当, 则级数(9)在 $p=1$ 处收敛, 因此有

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x,t) \quad (10)$$

此式通过未知项 $u_m(x,t)$ ($m=1, 2, 3, \dots$) 确定了初始猜测解 $u_0(x,t)$ 与精确解 $u(x,t)$ 之间的关系, 而未知项 $u_m(x,t)$ 可由高阶形变方程来确定. 为此, 先定义矢量

$$\vec{u}_n = \{u_0(x,t), u_1(x,t), \dots, u_n(x,t)\} \quad (11)$$

方程(5)对嵌入变量 p 求导 m 次, 然后令 $p=0$ 并除以 $m!$, 可得到如下所谓的高阶形变方程

$$L[u_m(x,t) - \chi_m g u_{m-1}(x,t) + \chi_{m-1}(g-1)u_{m-2}(x,t)] = hR_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (12)$$

这里 $\chi_m = 0$ 对于 $m \leq 1$ 和 $\chi_m = 1$ 对于 $m > 1$, 而 $R_m(\vec{u}_{m-1})$ 的表达式为

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\varphi(x,t;p)]}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0} \quad (13)$$

对方程(12)两边作用逆算符 L^{-1} 可得

$$u_m(x,t) = \bar{u}(x,t) + \chi_m g u_{m-1}(x,t) - \chi_{m-1}(g-1)u_{m-2}(x,t) + hL^{-1}R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (14)$$

这里 $\bar{u}(x,t)$ 是线性微分方程 $L[u(x,t)] = 0$ 的一般解. 这样, 由解(10)和(14)我们可得到原方程任意阶的级数解.

2 GKS 方程的同伦近似解

下面我们把带有两个辅助参数的同伦分析方法应用到 GKS 方程的初值问题(1) ∪ (2) 和 (1) ∪ (3) 中. 首先考虑初值问题(1) ∪ (2), 该初值问题有精确解

$$u(x,t) = \frac{15\alpha_3^3}{128\alpha_1\alpha_4^2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\alpha_3}{8\alpha_4} \left(x - \frac{3\alpha_3^3}{32\alpha_4^2} t \right) \right] \left\{ 1 - \tanh \left[\frac{\alpha_3}{8\alpha_4} \left(x - \frac{3\alpha_3^3}{32\alpha_4^2} t \right) \right] \right\} \quad (15)$$

这是一种非对称钟型孤立波解. 为了与此精确解比较, 我们选取初始猜测解为

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \frac{15\alpha_3^3}{128\alpha_1\alpha_4^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\alpha_3}{8\alpha_4} x \right) \left[1 - \tanh \left(\frac{\alpha_3}{8\alpha_4} x \right) \right] \quad (16)$$

同时辅助线性算符取为

$$L[\varphi(x,t;p)] = \frac{\partial \varphi(x,t;p)}{\partial t} \quad (17)$$

该算子具有性质

$$L(c_1) = 0 \quad (18)$$

这里 c_1 是任意常数. 进一步地, 根据方程(1)的具

体形式,定义非线性算符

$$L[\varphi(x,t;p)] = \frac{\partial \varphi(x,t;p)}{\partial t} + 2\alpha_1 \varphi(x,t;p) \frac{\partial \varphi(x,t;p)}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \varphi(x,t;p)}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial^3 \varphi(x,t;p)}{\partial x^3} + \alpha_4 \frac{\partial^4 \varphi(x,t;p)}{\partial x^4} \quad (19)$$

这样,根据第二节给出的定义,我们可构造出满足初始条件 $\varphi(x,0;p) = u(x,0)$ 的零阶形变方程

$$[1 - gp + (g-1)p^2] \{L[\varphi(x,t;p) - u_0(x,t)]\} = phN[\varphi(x,t;p)] \quad (20)$$

很显然,当 $p=0$ 和 $p=1$ 时,有 $\varphi(x,t;0) = u_0(x,t)$ 和 $\varphi(x,t;1) = u(x,t)$. 由零阶形变方程(20),可得到如下 m 阶形变方程

$$L[u_m(x,t) - \chi_m g u_{m-1}(x,t) + \chi_{m-1}(g-1)u_{m-2}(x,t)] = hR_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (21)$$

此方程满足初始条件

$$u_m(x,0) = 0 \quad (22)$$

这里

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{\partial u_{m-1}(x,t)}{\partial t} + 2\alpha_1 \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x,t) \times \frac{\partial}{\partial x} u_{m-1-i}(x,t) + \alpha_2 \frac{\partial^2 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial^3 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^3} + \alpha_4 \frac{\partial^4 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^4} \quad (23)$$

而 $\chi_m = 0$ 对于 $m \leq 1$ 和 $\chi_m = 1$ 对于 $m > 1$. m 阶形变方程(21),对于 $m \geq 1$ 的解为

$$u_m(x,t) = \chi_m g u_{m-1}(x,t) - \chi_{m-1}(g-1)u_{m-2}(x,t) + hL^{-1}R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (24)$$

这样,借助初始猜测解(16)以及(24)式,并利用符号计算软件很容易计算出 $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t), \dots$ 等,从而得到原方程的 m 阶近似解

$$u(x,t) \approx \sum_{n=0}^m u_n(x,t) \quad (25)$$

当 $\alpha_1 = \frac{30}{128}, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1$ 和 $\alpha_2 = \frac{\alpha_3^2}{16\alpha_4}$ 时,我们用符号计算软件 Maple, 计算得到了 6 阶近似解

$u(x,t) \approx \sum_{n=0}^6 u_n(x,t)$, 其前三项的表达式为

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{8}\right) [1 - \tanh\left(\frac{x}{8}\right)]$$

$$u_1(x,t) = -\frac{3ht}{512} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{8}\right) [2 \tanh\left(\frac{x}{8}\right) +$$

$$3 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{8}\right) - 2]$$

$$u_2(x,t) = -\frac{3ht}{131072} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{8}\right) [-18ht \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{8}\right) \tanh\left(\frac{x}{8}\right) + 512g \tanh\left(\frac{x}{8}\right) + 6ht \tanh\left(\frac{x}{8}\right) + 512ht \tanh\left(\frac{x}{8}\right) + 768h \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{8}\right) + 768g \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{8}\right) - 6ht + 9ht \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{8}\right) - 512g - 512h] \quad (26)$$

文[12]中已证明,只要级数解(25)收敛,它必然是方程(1)的解. 因此同伦方法得到的级数解中保证级数收敛是非常重要的. 由(26)式注意到,这里得到的级数解中包含两个辅助参数 h 和 g , 因此通过合适地选取 h 和 g , 可有效地调节和控制级数解的收敛区域和速度. 这实质性地改进了级数解的收敛区域和收敛速度. 在带有两个辅助参数的同伦分析方法中,可绘制 (h, g) 曲面来选取辅助参数 h 和 g 的有效区域使之保证级数解收敛. 为此,在图 1 中绘制了由 6 阶近似解给出的 $w = u_i(0,0)$ 之 $w \sim (h, g)$ 曲面和 $g=1$ 时的 $w \sim h$ 曲线(即廖方法中的 h 曲线). 从图 1(a) 可看出,级数解的收敛与两个辅助参数 h 和 g 都有密切关系,在 g 的不同取值处, h 的有效区域不同;同样在 h 的不同取值处, g 的有效区域也不同. 这样两个辅助参数互相影响、互相弥补使之级数解更好地收敛. 我们看到,在 1(a) 图中级数解收敛的最佳区域(即曲面最平稳区域)约在 $-1.3 < h < -0.6, 0.7 < g < 1$ 处. 图 1(b) 中绘制的是 $g=1$ 时的 $w \sim h$ 曲线,即廖方法中的 h 曲线,其目的就是为了比较.

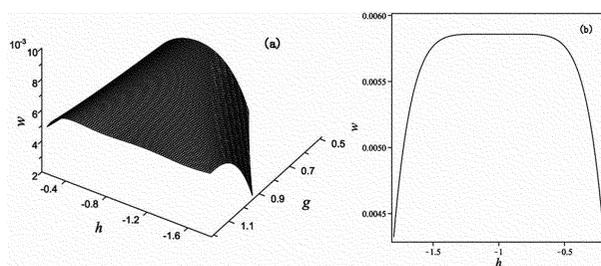


图1 由 6 阶近似解给出的收敛域(a) $w \sim (h, g)$ 曲面(b) $w \sim h$ 曲线
Fig. 1 Convergence domain given by 6th-order approximate solution
(a) $w \sim (h, g)$ curved surface (b) $w \sim h$ curve

在图 2 中,我们绘制了 6 阶近似解并与精确孤立波解进行了比较. 由图可清晰地看出,从初始 $t=0$ 时刻开始到 $t=30$ 时刻,近似解(实际上就是廖方

法给出的近似解,因为此时取 $g=1$)与精确解吻合的非常好(图2(a)和2(b)所示).但当 $t=60$ 时,近似解与精确解吻合的不好、有明显的差异(图2(c)所示).这说明当变量增大时,带有一个辅助参数的同伦分析方法给出的近似解与精确解吻合的不好.这时我们调整辅助参数 g 使其 $g=0.88$ 时,可得到与精确解吻合很好的近似解(图2(d)所示).这表明第二个辅助参数 g ,对级数解的收敛也起着重要作用.由于该参数的出现,实质性地改进了级数解的收敛区域和速度.

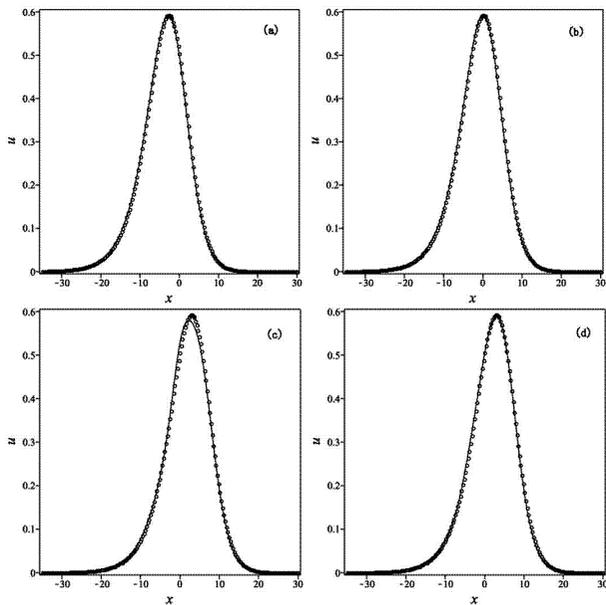


图2 6阶近似解(实线)与精确孤立波解(圆圈)的比较

(a) $t=0, h=-0.9, g=1$ (b) $t=30, h=-0.9, g=1$

(c) $t=60, h=-0.9, g=1$ (d) $t=60, h=-0.9, g=0.88$

Fig.2 Comparison between 6th-order approximate solution (real line) and the exact solitary wave solution (circle line)

(a) $t=0, h=-0.9, g=1$ (b) $t=30, h=-0.9, g=1$

(c) $t=60, h=-0.9, g=1$ (d) $t=60, h=-0.9, g=0.88$

其次考虑初始问题(1) \cup (3),该初值问题有精确解

$$u(x, t) = \frac{5\alpha_3^3}{384\alpha_1\alpha_4^2} \tanh^2 \left[\frac{\alpha_3}{24\alpha_4} \left(x + \frac{5\alpha_3^3}{192\alpha_4^2} t \right) \right] - \frac{5\alpha_3^3}{384\alpha_1\alpha_4^2} \tanh^2 \left[\frac{\alpha_3}{24\alpha_4} \left(x + \frac{5\alpha_3^3}{192\alpha_4^2} t \right) \right] + \frac{5\alpha_3^3}{1152\alpha_1\alpha_4^2} \tanh^3 \left[\frac{\alpha_3}{24\alpha_4} \left(x + \frac{5\alpha_3^3}{192\alpha_4^2} t \right) \right] \quad (27)$$

这是一种非对称扭结孤立波解.为了与此精确解比较,我们选取初始猜测解为

$$u_0(x, t) = u(x, 0) = \frac{5\alpha_3^3}{384\alpha_1\alpha_4^2} \tanh^2 \left(\frac{\alpha_3}{24\alpha_4} x \right) -$$

$$\frac{5\alpha_3^3}{384\alpha_1\alpha_4^2} \tanh^2 \left(\frac{\alpha_3}{24\alpha_4} x \right) + \frac{5\alpha_3^3}{1152\alpha_1\alpha_4^2} \tanh^3 \left(\frac{\alpha_3}{24\alpha_4} x \right) \quad (28)$$

其它,如辅助线性算符、非线性算符、零阶形变方程以及 m 阶形变方程等都与上述情况相同.当 $\alpha_1 = 1, \alpha_3 = -2, \alpha_4 = 1$ 和 $\alpha_2 = \frac{47\alpha_3^2}{144\alpha_4}$ 时,我们计算出 $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), u_4(x, t), u_5(x, t), u_6(x, t)$ 等,得到了6阶近似解

$$u(x, t) \approx \sum_{n=0}^6 u_n(x, t) \quad (29)$$

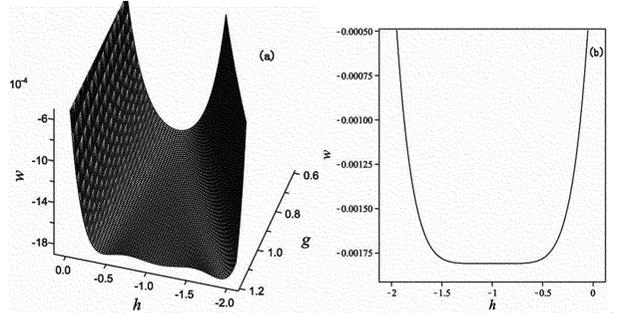


图3 由6阶近似解给出的收敛域(a) $w \sim (h, g)$ 曲面(b) $w \sim h$ 曲线

Fig.3 Convergence domain given by 6th-order approximate solution

(a) $w \sim (h, g)$ curved surface (b) $w \sim h$ curve

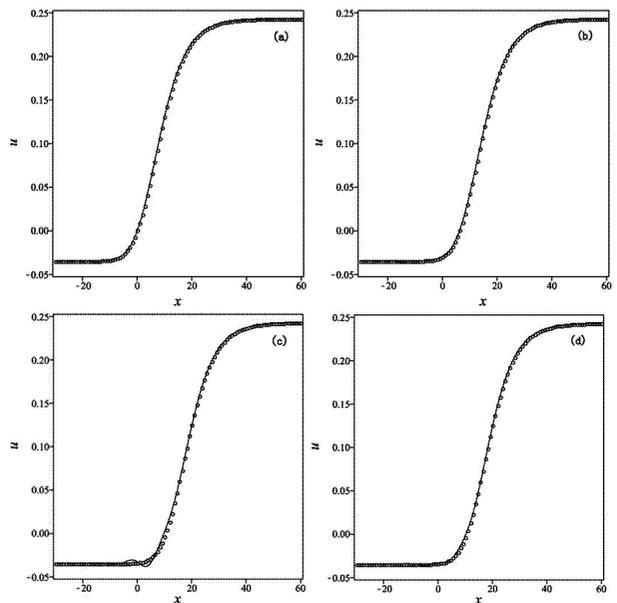


图4 6阶近似解(实线)与精确孤立波解(圆圈)的比较

(a) $t=0, h=-0.9, g=1$ (b) $t=30, h=-0.9, g=1$

(c) $t=50, h=-0.9, g=1$ (d) $t=50, h=-0.9, g=0.9$

Fig.4 Comparison between 6th-order approximate solution (real line) and the exact solitary wave solution (circle line)

(a) $t=0, h=-0.9, g=1$ (b) $t=30, h=-0.9, g=1$

(c) $t=50, h=-0.9, g=1$ (d) $t=50, h=-0.9, g=0.9$

为了确定两个辅助参数 h 和 g 之有效区域,在图3中绘制了由6阶近似解给出的 $w = u_t(0,0)$ 之 $w \sim (h,g)$ 曲面和 $g=1$ 时的 $w \sim h$ 曲线(即廖方法中的 h 曲线).从图3(a)可看出,级数解收敛的最佳区域约在 $-1.3 < h < -0.35, 0.75 < g < 1$ 处.在图4中,我们把6阶近似解与精确孤立波解绘制在一起进行了比较.从图上我们可清晰地看出,从初始 $t=0$ 时刻开始到 $t=30$ 时刻,近似解(廖方法给出的近似解,因为 $g=1$)与精确解吻合的很好(图4(a)和4(b)所示).但当 $t=50$ 时,近似解与精确解吻合的不好(图4(c)所示).这时我们调整辅助参数 g 使其 $g=0.9$ 时,可得到与精确解吻合较好的近似解(图4(d)所示).因此,带有两个辅助参数的同伦分析方法能够更有效地调节和控制所得级数解的收敛区域和速度,对系统变量的变化范围较大及强非线性问题的研究有它的优点.

3 结论

本文首先介绍了带有两个辅助参数的改进同伦分析方法,然后利用该方法,在两种不同初始条件下,得到了推广 Kuramoto-Sivashinsky 方程的包含两个辅助参数 h 和 g 的同伦近似解.把所得近似解与精确孤立波解分别进行了比较,发现由于本文得到的级数解中出现了第二个辅助参数 g ,它的出现对调节和控制级数解增添了一个新的自由度,进而实质性地改进了所得级数解的收敛区域和速度,所得级数解更有效地逼近真实解.特别是,当自变量增大以及非线性增强时,该方法表现出它的优点.因此,带有两个辅助参数的同伦分析方法是另一种形式的研究复杂非线性系统的有效解析近似方法.

参 考 文 献

- Lou S Y. On the coherent structures of the Nizhnik-Novikov-Veselov equation. *Physics Letters A*, 2000, 277(2): 94 ~ 100
- Wang M L. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations. *Physics Letters A*, 1995, 199(3-4): 169 ~ 172
- 高强,彭海军,吴志刚,钟万勰.非线性动力学系统最优控制问题的保辛求解方法. *动力学与控制学报*, 2010, 8(1): 1 ~ 7 (Gao Q, Peng H J, Wu Z G, Zhong W X. Symplectic method for solving optimal control problem of nonlinear dynamical systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(1): 1 ~ 7 (in Chinese))
- 杨先林,唐驾时.非线性演化方程的新 Jacobi 椭圆函数解. *动力学与控制学报*, 2011, 9(2): 147 ~ 151 (Yang X L, Tang J S. New Jacobian elliptic function solutions for nonlinear evolution equations. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(2): 147 ~ 151 (in Chinese))
- 韩元春,那仁满都拉,额尔敦仓.带强迫项的变系数 KdV 方程的多孤立波解及其应用. *动力学与控制学报*, 2011, 9(2): 143 ~ 146 (Han Y C, Naranmandula, Ereduncang. Multiple solitary waves solution of variable coefficients KdV equation with forcing term and its application. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(2): 143 ~ 146 (in Chinese))
- Liao S J. Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003
- Liao S J. On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 147(2): 499 ~ 513
- Liao S J. Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 169(2): 1186 ~ 1194
- 石玉仁,汪映海,杨红娟,段文山.高维非线性演化方程孤立波的同伦分析法求解. *物理学报*, 2007, 56: 6791 ~ 6795 (Shi Y R, Wang Y H, Yang H J, Duan W S. Solving solitary wave solutions of higher dimensional nonlinear evolution equations with the homotopy analysis method. *Acta Physica Sinica*, 2007, 56: 6791 ~ 6795 (in Chinese))
- 那仁满都拉,韩元春.非均匀圆柱壳中非线性波传播模型的同伦分析解法. *物理学报*, 2010, 59: 2942 ~ 2947 (Naranmandula, Han Y C. The homotopy analysis method for solving nonlinear wave propagation model in inhomogeneous cylindrical shells. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59: 2942 ~ 2947 (in Chinese))
- Jiao X Y, Gao Y, Lou S Y. Approximate homotopy symmetry method: Homotopy series solutions to the sixth-order Boussinesq equation. *Science in China Series G*, 2009, 52(8): 1169 ~ 1178
- Wu Y Y, Cheung K F. Homotopy solution for nonlinear differential equations in wave propagation problems. *Wave motion*, 2009, 46(1): 1 ~ 14
- Porubov A V. Amplification of Nonlinear Strain Waves in Solids. Singapore: World Scientific, 2003

- 14 Kudryashov N A. Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. *Physics Letters A*, 1990, 147(5-6): 287 ~ 291
- 15 Kuramoto Y, Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. *Progress of Theoretical Physics*, 1976, 55(2): 356 ~ 369
- 16 Kawahara T. Formation of saturated solitons in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation. *Physical Review Letters*, 1983, 51(5): 381 ~ 383
- 17 Jiang L, Chen X, Fu Z T, Liu S K, et al. Periodic solutions to KdV-Burgers-Kuramoto equation. *Communications in Theoretical Physics*, 2006, 45(5): 815 ~ 818
- 18 Benney D J. Long waves on liquid films. *Journal of Mathematical Physics*, 1966, 45: 150 ~ 155
- 19 Benney D J. Some properties of long non-linear waves. *Studies in Applied Mathematics*, 1973, 52(1): 45 ~ 50
- 20 Larkin N A. Korteweg-de Vries and Kuramoto-Sivashinsky equations in bounded domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, 297(1): 169 ~ 185

IMPROVED HOMOTOPY ANALYSIS METHOD AND APPROXIMATE SOLUTIONS FOR THE GENERALIZED KURAMOTO-SIVASHINSKY EQUATION*

Zhang cuiying¹ Naranmandula²

(1. College of Physics and Electronic Information, Hulunbeir University, Hulunbeir 021008, China)

(2. College of Physics and Electronics, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao 028043, China)

Abstract An improved homotopy analysis method with two auxiliary parameters was introduced, then the homotopy approximate solutions for the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation were obtained by using this method, which were compared with the exact solitary wave solutions. The comparison shows that the approximate solution more effectively approaches the real solution, because it contains two auxiliary parameters, which can regulate and control more effectively its convergence region and rate. This indicates that the improved homotopy analysis method with two auxiliary parameters has its advantages to study complex nonlinear systems.

Key words improved homotopy analysis method, approximate solution, solitary wave solution, generalized Kuramoto-Sivashinsky equation