第 10 卷第 1 期 2012 年 3 月
1672-6553/2012/10(1)/001-4
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 10 No. 1
Mar. 2012

一阶系统自伴随条件和 Lagrange 函数的构造

丁光涛
(安徽师范大学物理与电子信息学院,芜湖 241000)

摘要 重新研究一阶系统变分法逆问题,修正了某些文献关于一阶微分方程组自伴随条件的失误,导出了把一阶系统化为自伴随形式的变换矩阵所满足的方程,列出了构造自伴随一阶系统 Lagrange 函数的两种方法. 举例说明所得结果的应用.

关键词 一阶微分方程系统, 逆问题, 自伴随条件, 一阶 Lagrange 函数

引言

变分法逆问题研究给定的微分方程组能否从变分原理导出,也就是说,能否构造出 Lagrange 函数将方程组表示成等价的 Lagrange 方程. 这个问题从 19 世纪后期到现在一直是数学力学和物理学领域中热门问题之一[1,2]. 已经证明,如果给定的微分方程组是自伴随的,或者是可以变换成自伴随的,就可以计算出对应的 Lagrange 函数,也有其他直接从方程构造 Lagrange 函数的方法[3-11]. 某些二阶微分方程组没有 Lagrange 表示,但是,化成一阶微分方程组后,却可以构成一阶 Lagrange 函数[11],这表明一阶 Lagrange 系统运用范围更广. 数学上,任意阶的微分方程都可以化成一阶微分方程组;力学中,状态空间中 Lagrange 方程是一阶微分方程组[12],Hamilton 方程可以写成特殊形式的一阶 Lagrange 方程,Birkhoff 方程和状态空间中 Lagrange 方程本质上一致,也是一阶 Lagrange 方程[13,14],因此,应当更重视对一阶 Lagrange 系统的研究.

本文重新对一阶系统自伴随性进行研究,指出并修正了文献[1]中的失误和错漏,从自伴随条件出发,导出一阶系统自伴随变换矩阵所满足的方程,列出两种从一阶运动微分方程构造 Lagrange 函数的方法. 最后,举例说明所得到结果的应用.

1 关于一阶系统的自伴随条件

一阶微分方程组

$$F_k=(t,r,\dot r)=0,\quad K=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

是自伴随系统的条件如下:系统是速度的线性系统,即

$$F_k=X_{kj}(t,r)\dot r^j+Y_k(t,r) \tag{2}$$

并且以下条件恒成立

$$X_{kj}+X_{jk}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial X_{ij}}{\partial r^k}+\frac{\partial X_{jk}}{\partial r^i}+\frac{\partial X_{ki}}{\partial r^j}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial X_{ij}}{\partial t}=\frac{\partial Y_j}{\partial r^i}-\frac{\partial Y_i}{\partial r^j} \tag{5}$$

这是文献[1]中给出的结果,对上述结论的证明是将运动学形式的二阶微分方程组

$$\ddot r^k-f^k(t,r,\dot r)=0 \tag{6}$$

的自伴随条件,经过简单变换后写成

$$\frac{\partial F_j}{\partial \dot r^k}+\frac{\partial F_k}{\partial \dot r^j}=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 F_j}{\partial \dot r^i\partial \dot r^k}-\frac{\partial^2 F_k}{\partial \dot r^i\partial \dot r^j}=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial r^j}-\frac{\partial F_j}{\partial r^k}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\dot r^i\ \frac{\partial}{\partial r^i}\right\}\left(\frac{\partial F_k}{\partial \dot r^j}-\frac{\partial F_j}{\partial \dot r^k}\right) \tag{9}$$

然后,将式(1)中函数 F_k 代入式(7)—(9),从式(7)和(8)得到

$$\frac{\partial^2 F_k}{\partial \dot r^i\partial \dot r^k}=0 \tag{10}$$

即 F_k 是速度 $\dot r$ 的线性函数,将函数 F_k 写成式(2)后,再代入式(7)-(9),就导出了条件(3)-(5).

然而,我们在对上述证明的出发点和结论经过认真研究后,发现其中存在失误和错漏之处. 鉴于

2011-06-11 收到第 1 稿,2011-06-27 收到修改稿.

一阶系统日益增长的重要性,有必要指出这些问题.

首先,检查得到的结论,为此,重复推导过程.将式(2)代入式(7),立即可以得到式(3),再将式(2)代入式(8),并利用得到的式(3),得到的是一个恒等式,不能再给出其他结果.将式(2)代入式(9),整理得到

$$\frac{\partial X_{kj}}{\partial t}-\frac{\partial Y_k}{\partial r^j}+\frac{\partial Y_j}{\partial r^k}=(\frac{\partial X_{kj}}{\partial r^i}+\frac{\partial X_{ji}}{\partial r^k}+\frac{\partial X_{ik}}{\partial r^j})\dot{r}^i \tag{11}$$

显然,式(11)两边是不同的,左端与速度 $\dot{r}$ 无关,右端是速度 $\dot{r}$ 的齐次式,要使式(11)恒成立,只能是两边各项分别等于零.右端各项为零,导出了式(4),但是左端为零,导出的是

$$\frac{\partial X_{kj}}{\partial t}=\frac{\partial Y_k}{\partial r^j}-\frac{\partial Y_j}{\partial r^k} \tag{12}$$

式(12)与式(5)的右边,符号相反.将一阶 Lagrange 方程式代人式(5)和(12),直接计算容易验证式(5)是错误的,而式(12)是正确的.

其次,考虑推导的出发点,文献[1]中从运动学形式的二阶微分方程组的自伴随条件来导出一阶系统自伴随条件是不妥的,正确的途径是从二阶常微分方程组

$$F_k(t,r,\dot{r},\ddot{r})=0 \tag{13}$$

的自伴随条件,即从下列 Helmholtz 条件出发来导出式(7)-(9),

$$\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{r}^k}=\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{r}^i} \tag{14}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{r}^k}+\frac{\partial F_k}{\partial \dot{r}^i}=2\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{r}^k}=\frac{d}{dt}(\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{r}^k}+\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{r}^i}) \tag{15}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial r^k}-\frac{\partial F_k}{\partial r^i}=\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{r}^k}-\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{r}^i}\right]=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{r}^k}-\frac{\partial F_k}{\partial \dot{r}^i}) \tag{16}$$

当下列条件成立

$$\partial F_k/\partial \ddot{r}^i=0 \quad (i,k=1,2,\cdots,N) \tag{17}$$

二阶系统(13)就成为一阶系统(1).式(14)自动满足,也得不到其它结果;由式(15)得到式(7);展开式(16)可得

$$\frac{\partial F_i}{\partial r^k}-\frac{\partial F_k}{\partial r^i}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\dot{r}^j\frac{\partial}{\partial r^j}+\ddot{r}^j\frac{\partial}{\partial \dot{r}^j})\right\}(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{r}^k}-\frac{\partial F_k}{\partial \dot{r}^i}) \tag{18}$$

由于上式中 F_i 满足条件(17),因此要使式(18)恒成立,包含加速度 $\ddot{r}$ 的各项系数应分别为零,即由式(18)可以得到式(8)和(9).

2 导出自伴随变换矩阵和构造一阶 Lagrange 函数

根据上述,一阶自伴随的微分方程组(2),应满足条件(3),(4)和(12),因此,矩阵 X 是反对称的.当 N 为奇数时,X 的行列式为零;当 N 为偶数时,X 的行列式有可能不为零.下面我们研究规则系统,即只讨论 $N=2n$ 的情况,且满足条件

$$\det(X_{ij})\neq 0 \tag{19}$$

对规则系统,式(2)可以变换成运动学形式

$$\dot{r}^k=f^k(t,r) \quad (k=1,2,\cdots,2n) \tag{20}$$

这种形式的一阶方程组的自伴随条件为

$$\partial f^k/\partial r_j=\partial f^j/\partial r^k \tag{21}$$

如果给定一阶方程组(20),而条件(21)不成立,那么如何将方程组(20)变换成自伴随的,并构造出对应的一阶 Lagrange 函数.显然,将方程(20)变换成自伴随的关键在于确定变换矩阵 X,将式(20)改写成

$$X_{kj}[\dot{r}^i-f^j(t,r)]=0 \tag{22}$$

使之满足条件(3),(4)和(12).下面导出变换矩阵 X 所满足的方程,比较式(2)与式(22)得

$$Y_k=-X_{kj}f^j \tag{23}$$

将式(23)代入式(12),展开并整理,得到如下方程

$$\frac{\partial X_{ki}}{\partial t}+\frac{\partial X_{ki}}{\partial r^j}f^j+X_{kj}\frac{\partial f^j}{\partial r^i}-X_{ij}\frac{\partial f^j}{\partial r^k}=0 \tag{24}$$

由于方程(20)已给定,f^j 已知,故解方程(24)可以确定 X_{ki},取满足条件(3),(4)和规则性条件(19)的解,代入式(22),即将方程变换成自伴随方程组.方程(24)可以写成矩阵形式,引入辅助矩阵 Z,其矩阵元为

$$Z_{ij}=\frac{\partial f^i}{\partial r^j} \tag{25}$$

同时定义沿系统运动轨道的时间微商

$$\frac{\bar{d}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+f^j\frac{\partial}{\partial r^j} \tag{26}$$

则方程(24)的矩阵形式如下

$$\frac{\bar{d}}{dt}X+XZ+Z^TX=0 \tag{27}$$

其中 Z^T 是 Z 的转置矩阵.

将方程(20)变换为自伴随形式后,构造对应的一阶 Lagrange 函数途径有多种,下面给出两条路

径. 构造途径之一，方程(24)与文献[9]中讨论一阶 Lagrange 力学逆问题的结果一致，而条件(3)和(4)也表明 X_{ij} 具有如下"旋量"形式

$$X_{ij}=\frac{\partial A_i}{\partial r^j}-\frac{\partial A_j}{\partial r^i} \tag{28}$$

设系统 Lagrange 函数为

$$L=A_k(t,r)\dot{r}^k+G(t,r) \tag{29}$$

由方程(28)求得 A_k 后，再代入

$$X_{kj}f^j=\frac{\partial G}{\partial r^k}-\frac{\partial A_k}{\partial t} \tag{30}$$

求得 G，即求得了函数 $L(t,r,\dot{r})$[4].

构造途径之二[1]. 根据一阶运动方程基本解析定理，设运动方程

$$F(t,r,\dot{r})=X_{kj}(t,r)[\dot{r}^j-f^j(t,r)]=0 \tag{31}$$

是自伴随的，则对应的 Lagrange 函数为

$$L=-r^k\int_0^1 \mathrm{d}\tau F_k(t,\tau r,\tau\dot{r}) \tag{32}$$

3　算例

已知一阶系统为

$$\dot{x}=1,\quad \dot{y}=-x/y \tag{33}$$

将系统变换为自伴随系统，并构造出对应的一阶 Lagrange 函数. 取 x 为 r^1，y 为 r^2，将系统(33)化为自伴随形式的变换矩阵独立分量只有一个，记为 X_{12}，方程(24)写为

$$\frac{\partial X_{12}}{\partial t}+\frac{\partial X_{12}}{\partial x}-\frac{\partial X_{12}}{\partial y}\cdot\frac{x}{y}+X_{12}\cdot\frac{x}{y^2}=0 \tag{34}$$

上式的一个解是

$$X_{12}=-y \tag{35}$$

系统(33)可以写成如下自伴随形式

$$F_1=-y(\dot{y}+x/y)=-y\dot{y}-x=0$$

$$F_2=y(\dot{x}-1)=y\dot{x}-y=0 \tag{36}$$

利用式(28)-(30)，得到一个 Lagrange 函数为

$$L=-\frac{1}{2}y^2\dot{x}+\frac{1}{2}(x^2+y^2) \tag{37}$$

如果利用式(32)，则得到另一个 Lagrange 函数为

$$L'=-\frac{1}{3}y^2\dot{x}+\frac{1}{3}xy\dot{y}+\frac{1}{2}(x^2+y^2) \tag{38}$$

函数 L 和 L' 虽然不同，但它们是规范等效的

$$L'=L+\frac{d}{dt}(\frac{1}{6}y^2x) \tag{39}$$

方程(34)还有其它解，例如

$$X_{12}=y \tag{40}$$

由此得到的自伴随方程以及对应的 Lagrange 函数，与式(36)以及式(37)和(38)相差一个符号.

4　结 论

本文研究了一阶系统变分法逆问题，一方面工作是指出了文献[1]中两个失误：一是一阶微分方程(2)的自伴随条件之一不是式(5)，而是式(12)；二是推导一阶系统自伴随条件的出发点式(7)-(9)，不应当由运动学形式二阶微分方程组的自伴随条件变换得到，而应是从一般形式二阶系统自伴随条件—Helmholtz 条件出发，将一阶系统作为二阶系统特殊情形而导出. 本文另一方面工作是从一阶系统自伴随条件出发，导出了确定自伴随变换矩阵的方程(24)，并给出这个方程的矩阵形式(27)；得到自伴随变换矩阵，就可以将一阶微分方程组变换成自伴随的，列出了两种方法来构造一阶 Lagrange 函数. 举例说明了所得结果的应用.

参　考　文　献

1 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics (Ⅰ). New York: Spinger-Verlag, 1978

2 Lopuszanski J. The inverse varitional problem in classical mechanics. Singapore: World Scientific, 1999

3 Sarlet W. The Holmholtz conditions revisited. A new approach to the inverse problem of Lagrange dynamics. *J. Phys. A: Math. Gen*, 1982, 15: 1503~1517

4 Lopèz G. Hamiltonian and Lagrangian for N-dimensional autonomous systems. *Ann. Phys*, 1996, 251(2): 363~371

5 Riewe F. mechanics with fractional derivatives. *Phys. Rev.*, 1997, E55: 3581~3192

6 Nucci M C, Leach P G L. Lagrangians galore. *J. Math. Phys*, 2007, 48: 123510

7 Cieśliński J L, Nikiciuk T. A direct approach to the construction of standard and non-standard Lagranians for disspative-like dynamical systems with variable coefficients. *J. Phys. A: Math. Theor*, 2010, 43: 175205

8 丁光涛，陶松涛. 一阶 Lagrange 力学逆问题及其在非力学领域中的应用. 科学通报. 2008, 53(8): 872~876 (Ding G T, Tao S T. The inverse problem of the first-order

Lagrange mechanics and the applications in non-mechanics domain. *Chin. Sci. Bull*, 2008, 53(8): 872 ~ 876 (in Chinese))

9 丁光涛. 一阶Lagrange力学逆问题的直接解法. 动力学与控制学报 2010,8(3):193 ~ 196 (Ding G T. Direct solutions for inverse problem of the first-order Lagrangian mechanics. *Journal of Dynamics and Control*, 2010 ,8(3): 193 ~ 196(in Chinese))

10 丁光涛. 从运动方程构造Lagrange函数的直接方法. 动力学与控制学报 2010,8(4): 305 ~ 310(Ding G T. A direct approach to the construction of Lagrangians from the motion equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2010 , 8(4): 305 ~ 310(in Chinese))

11 Hojman S, Urrutia L F. On the inverse problem of the calculus of variations. *J. Math. Phys.* , 1981, 22: 1896 ~ 1902

12 丁光涛. 状态空间Lagrange函数和运动方程. 中国科学G辑,2009,39: 813 ~ 320(Ding G T. The Lagrangian functions and equations of motion in state space. *Science in China Series G*, 2009, 39: 813 ~ 820(in Chinese))

13 Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics (Ⅱ). New York: Springer-Verlag, 1983

14 梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff系统动力学. 北京:北京理工大学出版社,1996 (Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B. Dynamics of birkhoffian system. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996 (in Chinese))

THE CONDITIONS OF SELF-ADJOINTNESS AND THE CONSTRACTION OF LAGRANGIAN FOR A FIRST-ORDER SYSTEM

Ding Guangtao

(*College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

Abstract The inverse problem of the calculus of variations for the first-order system was restudied. The errors on the conditions of self-adjointness for a system of the first-order ordinary differential equations in some literatures were amend. The equations to determine the matrices of the self-adoint transformations for the first-order system were obtained. Two methods of constraction of the Lagrangians for the first-order self-adjoint system were presented. An example was given to illustrate the application of the result.

Key words system of first-order ordinary differential equations, inverse problem, conditions of self-adjointness, first-order Lagrangian

Received 11 June 2011, revised 27 June 2011.