第 9 卷第 4 期 2011 年 12 月
1672-6553/2011/09(4)/352-5

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 9 No. 4
Dec. 2011

一个干摩擦 Duffing 振子的滑动分岔分析*

秦志英　赵月静　彭伟

（河北科技大学机械电子工程学院,石家庄　050018）

摘要　分析了一个干摩擦 Duffing 振子在不同参数下混沌和周期轨及不同周期轨之间的共存与转换. 干摩擦振子属于 Filippov 系统,会发生特有的粘滞现象. 分析发现,从穿越轨线转换到粘滞－滑移轨线不仅可经穿越滑动分岔和切换滑动分岔实现,也可经两个相邻的穿越滑动分岔和多滑动分岔实现,而从粘滞－滑移轨线转换到非穿越轨线须经擦边滑动分岔.

关键词　干摩擦，　Filippov 系统，　粘滞－滑移轨线，　滑动分岔

引 言

干摩擦振子一直是受到广泛研究的非线性模型,其中粘滞现象是一种特有的典型现象,在铰链、钻削、小提琴、建筑结构、太阳能帆板等各种工程系统中得到了广泛的研究. di Bernardo 等提出了滑动分岔的概念[2],Galvanetto 等把滑动分岔的概念与干摩擦振子的粘滞－滑移轨线联系起来[3]. Filippov 系统[1]是非光滑系统的一类,滑动分岔则是该系统特有的一类分岔,用于研究系统参数变化时粘滞－滑移轨线的转换过程. di Bernardo 根据边界与流之间的关系定义了四种滑动分岔[2][3].

本文第 1 部分首先简要介绍 Filippov 系统与粘滞－滑移轨线(stick－slip)和滑动分岔(sliding bifurcations)的概念和定义. 第 2 部分简要介绍一个皮带驱动引入干摩擦力的 Duffing 振子,定义两种 Poincaré 映射. 第 3 部分则研究该振子不同运动状态之间的转换,尤其是粘滞轨线与非粘滞轨线指将相互转换导致的滑动分岔. 所得结论总结在第 4 部分.

1　Filippov 系统的粘滞-滑移轨线和滑动分岔

一个 Fillipov 系统的状态方程可写为

$$\dot{x}=\begin{cases}F_1(x) & H(x)>0\\ \overline{co}\{F_1,F_2\} & H(x)=0\\ F_2(x) & H(x)<0\end{cases}\tag{1}$$

其中边界 $\Sigma:=\{H(x)=0\}$ 将系统状态空间划分为 $S_1:=\{H(x)>0\}$ 和 $S_2:=\{H(x)<0\}$ 两部分,而边界上向量场是边界两侧向量场的一个多值集合. 根据 Fillipov 凸方法,可写为

$$\overline{co}\{F_1,F_2\}=F_s=(1-\alpha)F_1+\alpha F_2\tag{2}$$

其中 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 定义为

$$\alpha(x)=\frac{H_xF_1}{H_x(F_1-F_2)}\tag{3}$$

根据 Utkin 等价控制法,可表示为

$$\overline{co}\{F_1,F_2\}=F_s=\frac{F_1+F_2}{2}+\beta\frac{F_2-F_1}{2}\tag{4}$$

其中 $-1\leqslant\beta\leqslant1$ 定义为

$$\beta(x)=-\frac{H_xF_1+H_xF_2}{H_xF_2-H_xF_1}\tag{5}$$

这两种表示方法是代数等价的 $\beta=2\alpha-1$,仅在某些特殊情况下有少许不同.

di Bernardo 主要基于第二种方法,$\hat{\Sigma}:=\{x\in\Sigma:-1\leqslant\beta\leqslant1\}$将称为滑动区域(sliding region),如图 1 灰色部分所示. 系统轨线一旦进入该区域将一直处于边界上,一般文献中又称为粘滞状态(sticking);其他部分称为滑移状态(slipping),同时存在两种状态的轨线称为粘滞－滑移轨线(stick－slip). 针对不同类型轨线随系统参数变化而发生转换的过程,如图 1 所示 di Bernardo 定义了四种分岔:

- 图 1(a)定义 crossing－sliding bifurcation[4],我们称之为"穿越滑动分岔",又称"第 I 类滑动分岔"[2][4];
- 图 1(b)定义 grazing－sliding bifurcation[4],我们称之为"擦边滑动分岔";

2010-12-21 收到第 1 稿,2011-10-26 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11002046,10972059),河北省自然科学基金资助项目(A2011208007)

• 图 1(c)定义 switching – sliding bifurcation[4],我们称之为“切换滑动分岔”,又称“第Ⅱ类滑动分岔”[2][4];

• 图 1(d)定义 adding – sliding bifurcation[4](“加滑动分岔”),又定义 multi – sliding bifurcation[2](“多滑动分岔”),本文我采用第二种定义.

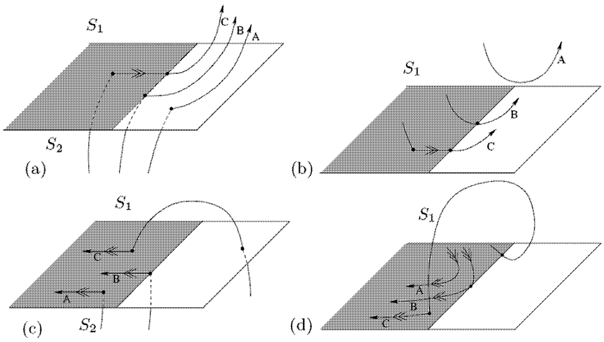

图 1　四种滑动分岔:(a) 穿越滑动分岔;(b) 擦边滑动分岔;(c) 切换滑动分岔;(d) 多滑动分岔

Fig. 1　Four sliding bifurcations: (a) crossing-sliding; (b) grazing-sliding; (c) switching-sliding; (d) multi-sliding

2　干摩擦 Duffing 振子与两种 Poincaré 映射

对于一个周期激励的 Duffing 系统

$$\ddot{y}+2\xi\dot{y}-y+y^3+f_r=p\cos\omega t \tag{6}$$

由于增加了一个速度恒定为 v_{dr} 的皮带驱动,从而引入了摩擦系数为 μ(假设静摩擦系数和动摩擦系数相同)的干摩擦力

$$f_r=\begin{cases}-\mu & \nu>0\\ f_{ex} & \nu=0,|f_{ex}|<\mu\\ \mu\mathrm{sign}(f_{ex}) & \nu=0,|f_{ex}|\geqslant\mu\\ \mu & \nu<0\end{cases} \tag{7}$$

其中 $f_{ex}=p\cos\omega t-2\xi\dot{y}+y-y^3$, $\nu=\dot{y}-\nu_{dr}$ 可见粘滞状态的摩擦力是随系统状态而变化的一组数值.

令 $x_1=y, x_2=\dot{y}$,基于定相位面 $\Phi_T:=\{\mathrm{mod}(\omega t,2\pi)=\mathrm{mod}(t,T)=0\}$ 可定义映射

$$PT:\Phi_T\to\Phi_T \tag{8}$$

基于边界 $\Sigma:=\{x_2-\nu_{dr}=0\}$ 可定义映射

$$PS:\Sigma\to\Sigma \tag{9}$$

对于这两种 Poincaré 映射,PT 映射用以描述系统轨线的周期性,PS 映射则用以描述系统轨线与边界的关系. 当出现粘滞的周期 1 轨时,PT 映射是 1 个点,PS 映射则是连续点.

文献[5]中研究了具有干摩擦的线性振子,没有考虑出现混沌的情况,因此只用边界 Poincaré 映射进行了分岔研究. 而本文通过定义这两种 Poincaré 映射,既可以研究 Duffing 系统无摩擦时可能出现的混沌;又可以研究有摩擦时可能出现的粘滞 – 滑移轨线.

3　系统参数对滑动分岔的影响

在此主要研究摩擦力对于系统行为的影响,因此系统参数给定为 $\xi=0.075$, $p=0.258$, $\omega=1$,该参数下无摩擦的 Duffing 系统会出现混沌.

3.1　摩擦系数对滑动分岔的影响

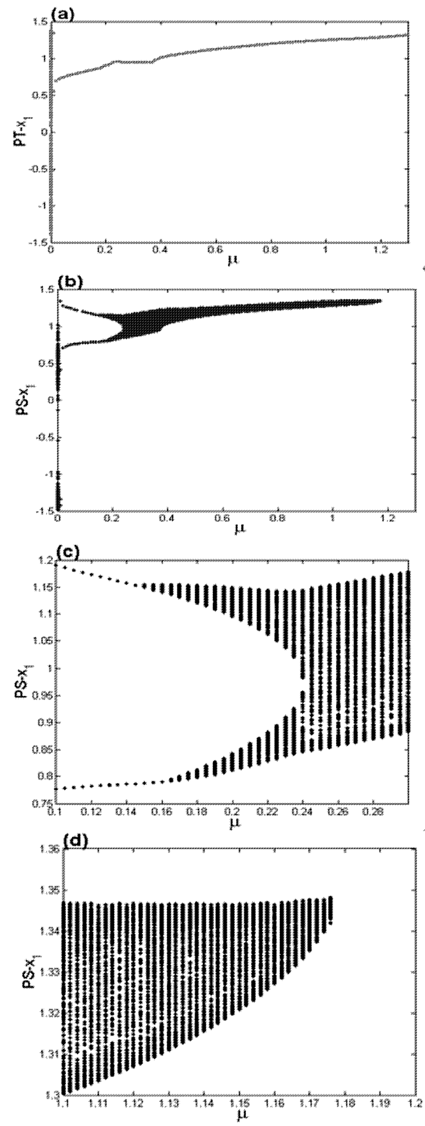

图 2　关于摩擦系数 μ 分岔图:(a) PT 映射;(b) PS 映射;(c)(d) PS 映射在 $\mu=0.1\sim0.3$ 和 $1.1\sim1.2$ 间放大

Fig. 2　Bifurcation diagrams of friction coefficient μ: (a) PT map; (b) PS map; (c)(d) amplifying of PS map in $\mu=0.1\sim0.3$ and $\mu=1.1\sim1.2$

固定驱动速度 $v_{dr}=0.1$，然后让摩擦系数 μ 在 0～1.3 之间变化. 取固定初始值为 $(x_1,x_2)=(0,0)$，得到如图 2 所示分岔图. 如图 2(a)所示，从 PT 映射分岔图上来看，当摩擦系数 μ 接近于 0 时，系统保持为混沌运动；随着摩擦系数 μ 增大，突然转换为周期轨线. 如图 2(b)所示，从 PS 映射分岔图上来看，周期穿越轨线经历了不同形式的粘滞，最后转换为非穿越轨线. 为了详细分析从穿越轨线到非穿越轨线间的转换过程，将 PS 映射分岔图进行局部放大，如图 2(c)表示从穿越轨线到粘滞－滑移轨线间的转换，图 2(d)表示从粘滞－滑移轨线到非穿越轨线间的转换.

对应的各种运动形式如图 3 所示，(a)表示无摩擦时的混沌运动；随着摩擦系数的增大，从(b)所示穿越轨线转换到(c)所示两段粘滞－滑移轨线，经历了相邻的两次穿越滑动分岔；接着转换到(d)所示粘滞－滑移轨线，经历了一次多滑动分岔；然后经(e)所示擦边滑动分岔，最终转换为(f)所示非穿越轨线.

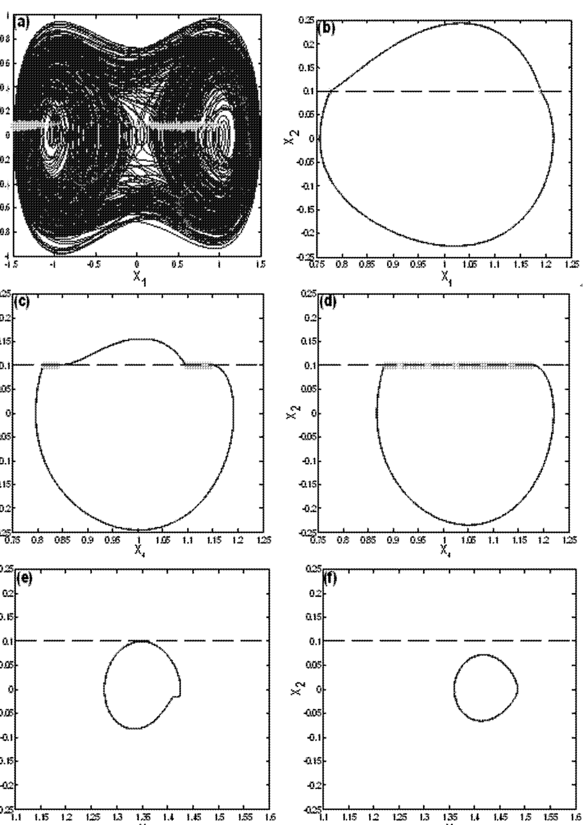

图 3　不同摩擦系数对应的轨线转换：(a)(b)(c)(d)(e)(f) $\mu=0,0.1,0.2,0.3,1.18,1.5$

Fig. 3　Orbits transitions in different friction coefficient: (a)(b)(c)(d)(e)(f) $\mu=0,0.1,0.2,0.3,1.18,1.5$

3.2　驱动速度对滑动分岔的影响

固定摩擦系数 $\mu=0.1$，然后让驱动速度 v_{dr} 在 -0.3～0.3 之间变化. 一开始取初始值为 $(x_1,x_2)=(0,0)$，然后每次计算时取上一个参数的稳态值为下一次计算初始值，得到如图 4 所示分岔图. 蓝色表示参数逐渐增加的分岔图，红色表示参数逐渐减小的分岔图，可以看出明显的共存现象. 仅从图 4(b)所示 PS 映射来看，有四处都出现了连续映射点，但配合图 4(a)所示 PT 映射来看，两处为粘滞轨线，另外两处对应混沌轨线，因此如果只用一种映射就无法正确反映系统行为的变化过程.

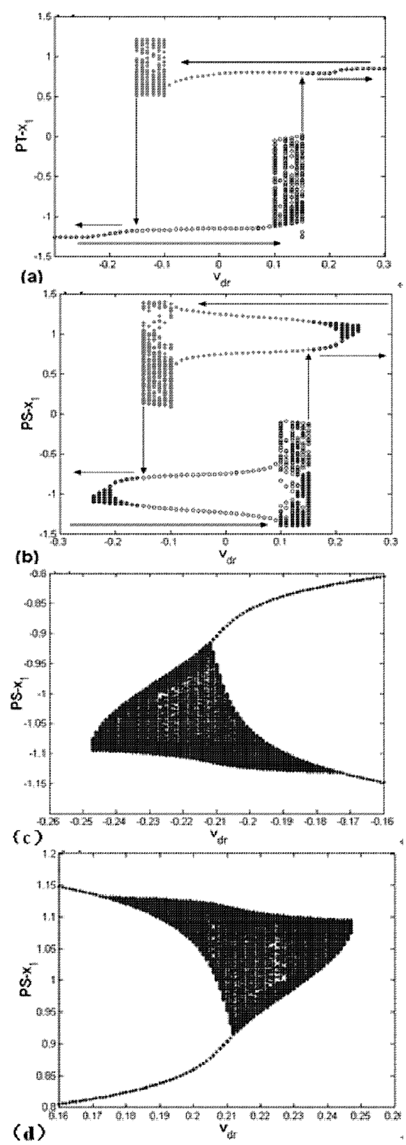

图 4　驱动速度 v_{dr} 分岔图：(a)PT 映射；(b)PS 映射；(c)(d)PS 映射在 $v_{dr}=-0.16$～-0.26 和 0.16～0.26 间放大

Fig. 4　Bifurcation diagrams of forced velocity v_{dr}: (a) PT map; (b) PS map; (c)(d) amplifying of PS map in $v_{dr}=-0.16\sim-0.26$ and $v_{dr}=0.16\sim0.26$

从图 4(a)所示的 PT 映射来看,经历了共存区之后,混沌穿越轨线突然转变为以对称平衡点为中心的周期穿越轨线,然后一直保持周期不变,混沌运动和周期运动之间的转换是一种突然的跳跃. 但从图 4(b)所示的 PS 映射来看,穿越轨线最终要转换为非穿越轨线. 将这部分细化分析,如图 4(c)表示以(−1, 0)为中心的穿越轨线,经历了粘滞 − 滑移轨线后变成了非穿越轨线;如图 4(d)则表示以(1, 0)为中心的穿越轨线,经历了粘滞 − 滑移轨线后变成了非穿越轨线. 由于二者完全对称,因此仅对后者分析具体的轨线转换.

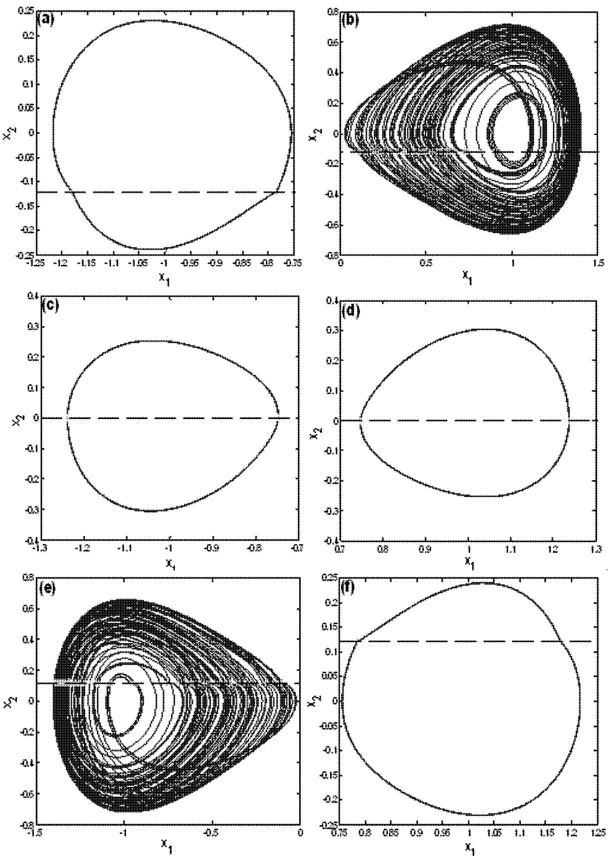

图 5　混沌和周期轨的共存及转换:初值(−1,0) (a)(c)(e) v_{dr} = −0.12→0→0.12;初值(1,0) (b)(d)(f) v_{dr} = −0.12←0←0.12

Fig. 5　Coexistence and transition of chaos and periodic orbits: (a)(c)(e) v_{dr} = −0.12→0→0.12 for initial value (−1,0); (b)(d)(f) v_{dr} = −0.12←0←0.12 for initial value(1,0)

从 PT 映射和 PS 映射都可以看出两种运动的共存区,在 v_{dr} = −0.15 ~ −0.1 之间以(−1, 0)为中心的周期穿越轨线,和以(1, 0)为中心的混沌穿越轨线共存,如图 5(a)(b)所示;在 v_{dr} = −0.1 ~ 0.1 之间分别以(−1, 0)和(1, 0)为中心的周期穿越轨线共存,如图 5(c)(d)所示;在 v_{dr} =0.1 ~ 0.15 之间则以(−1, 0)为中心的混沌穿越轨线,和以(1, 0)为中心的周期穿越轨线共存,如图 5(e)(f)所示.

图 6 表示图 4(d)所示分岔图的轨线转换,而图 4(c)所示分岔图是一个完全对称的转换的过程,在此不再赘述. 如图 6 所示,从(a)所示以(1, 0)为中心穿越轨线转换到(b)所示一侧粘滞 − 滑移轨线,在右侧粘滞区域的边界点必然要经历一个穿越滑动分岔;接着转换到(c)所示粘滞 − 滑移轨线,则在左侧粘滞区域的边界点必然经历一个切换滑动分岔;然后必然要经历(d)所示的擦边滑动分岔,然后转换为近似以(1.1, 0)为中心的非穿越轨线. 由于皮带驱动速度 v_{dr} 的改变相当于改变了边界,即使轨线不变,轨线与边界之间的关系也会改变,如 v_{dr} =0.25 对应的是擦边轨线,v_{dr} >0.25 之后对应的就是非穿越轨线. 在达到非穿越轨线以后,无论驱动速度 vdr 如何变化,该轨线保持不变.

从物理意义来说,具有恒定速度 vdr 的皮带驱动是依靠摩擦力来实现的,当速度较小时会出现粘滞和滑移运动之间的转换,皮带驱动速度会影响系统轨线;当速度较大时完全保持滑移运动,不会出现粘滞现象,皮带驱动速度对于运动轨线则没有影响,此时摩擦力是一个常数,仅改变原系统的平衡点. 如图 6(d)和图 5(d)所示轨线形状基本一致,但轨线中心向右移动了一定距离.

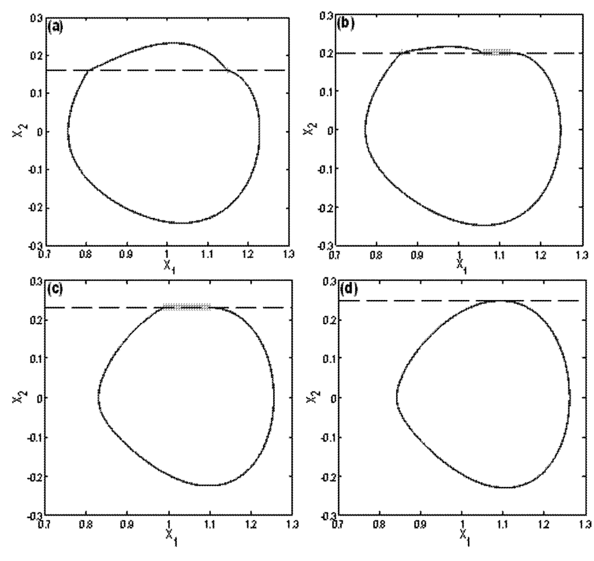

图 6　不同驱动速度对应的轨线转换: (a)(b)(c)(d) v_{dr} = 0.16, 0.2, 0.23, 0.25

Fig. 6　Orbits transitions in different forced velocity: (a)(b)(c)(d) v_{dr} = 0.16, 0.2, 0.23, 0.25

4 结论

本文介绍了 Fillipov 系统发生粘滞现象的数学描述,并介绍了 di Bernardo 定义的四种滑动分岔,用以研究粘滞-滑移轨线与其它轨线之间的转换.

本文引入了基于定相位面的 PT 映射和基于边界的 PS 映射两种 Poincaré 映射,PT 映射用以描述系统轨线的周期性,PS 映射则用以描述系统轨线与边界的关系. 当出现粘滞的周期 1 轨时,PT 映射是 1 个点,PS 映射则是连续点. 而针对一个具有干摩擦的 Duffing 振子,应用这两种 Poincaré 映射,既反映 Duffing 振子无摩擦时可能出现的混沌轨线;又反映有摩擦时可能出现的粘滞-滑移轨线,可全面反映系统行为的变化过程.

通过固定其他系统参数,重点研究了驱动速度及摩擦系数对滑动分岔的影响,讨论了系统在混沌和周期、及不同周期轨之间的转换与共存. 分析发现,从穿越轨线转换到粘滞-滑移轨线不仅可经穿越滑动分岔和切换滑动分岔实现,也可经两个相邻的穿越滑动分岔和多滑动分岔实现,而从粘滞-滑移轨线转换到非穿越轨线须经擦边滑动分岔.

参 考 文 献

1 Filippov A F. Differential equations with discontinuous right-hand sides. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988

2 di Bernardo M, Kowalczyk P, Nordmark A. Bifurcations of dynamical systems with sliding: Derivation of normal-form mappings . *Physica D*, 2002, 170: 175 ~ 205

3 Galvanetto U. Sliding bifurcations in the dynamics of mechanical systems with dry friction-remarks for engineers and applied scientists. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 276: 121 ~ 139

4 Mario di Bernardo, Chris Budd, Alan Richard Champneys, Piotr Kowalczyk. Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications. Springer, 2007

5 李志从,王琪. 受两个频率激励和皮带驱动的具有干摩擦的振子的动力学分析. 动力学与控制学报,2008,6(1):45 ~ 49 (Li Zhicong, Wang Qi. Dynamical analysis of a dry friction oscillator with two-frequency excitation and belt driving. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(1): 45 ~ 49(in Chinese))

SLIDING BIFURCATIONS IN A DRY-FRICTION DUFFING VIBRATOR *

Qin Zhiying Zhao Yuejing Peng Wei

(*School of Mechanical and Electrical Engineering*, *Hebei University of Science and Technology*, *Shijiazhuang* 050018, *China*)

Abstract This paper studied a dry-friction Duffing vibrator, and discussed the transitions and coexistences between chaos and periodic orbits, as well as different periodic orbits for different system parameters. As a Filippov system, special sticking phenomena may occur. The transition from crossing orbit to stick-slip orbit can be achieved not only by crossing-sliding bifurcation and switching-sliding bifurcation, but also by two near crossing-sliding bifurcation and multi-sliding bifurcation. The transition from stick-slip orbit to non-crossing orbit must be achieved by grazing-sliding bifurcation.

Key words dry-friction, Filippov system, stick-slip orbits, sliding bifurcations

Received 21 December 2010, revised 26 October 2011.

* The project is supported by the National Natural Science Foundation (11002046, 10972059), and the Hebei Province Natural Science Foundation (A2011208007)