

具有脉冲耦合复杂时滞动力网络的同步*

张华^{1,2} 颜青¹ 吴泉军³ 周进²

(1. 铜仁学院 数学与计算机科学系, 铜仁 554300) (2. 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(3. 上海电力学院 数理学院, 上海 200090)

摘要 考虑了一个具有脉冲耦合的复杂时滞动力网络的同步问题. 基于脉冲时滞动力系统扩展的 Halanay 不等式, 给出了网络同步的一个充分条件. 所获结果表明, 即使网络节点之间仅在一些离散时刻存在瞬时连接, 网络仍然能够达到同步. 进一步将所得结果应用于一个由混沌 FHN 神经元振子为动力节点所构成的一个无标度的动力网络, 数值仿真结果表明了理论结果的正确性.

关键词 复杂时滞动力网络, 脉冲耦合, 同步, 混沌 FHN 振子

引言

近年来, 复杂网络的研究已渗透到物理学、数学、生物学、工程学及社会科学等众多学科领域, 它已成为一个跨学科的研究热点^[1,2]. 特别地, 复杂动力网络的同步与控制问题已在科学和工程等众多领域引起广泛关注. 尤其是由耦合的混沌振子构成的大规模复杂动力网络, 在诸如随机网络, 小世界以及无标度网络拓扑结构下的同步与控制问题已成为相当活跃的研究领域之一, 对于各种不同类型、不同拓扑结构的复杂网络的同步与控制问题已有许多重要的结果^[3-9].

值得注意的是, 上述大部分工作都是致力于连续或离散耦合的复杂动力网络. 然而, 对于现实世界中某些复杂动力网络, 当受到一系列瞬时外部干扰, 比如频率改变、信道拥塞、随机噪声、数据丢包等因素的影响下, 网络节点仅在某些时刻发生作用^[10], 有时这些作用是以瞬态的形式表征, 如生物神经网络中神经元放电发放模式. 很明显, 这种复杂网络不能由纯连续或纯离散方式来刻画^[3,5,6,7], 通常称为脉冲的形式来描述. 因此, 研究具有脉冲耦合的复杂时滞动力网络系统同步和控制, 对于深刻理解现实世界中许多复杂网络的动力学行为及其演化规律, 具有重要科学意义及应用价值.

本文研究了一个具有脉冲耦合的复杂时滞动力网络的同步动力学问题, 基于脉冲时滞动力系统

扩展的 Halanay 不等式, 给出了一个简单而又一般的网络同步化条件. 进一步将所得到的结果应用于一个由混沌 FHN 神经元振子为动力节点所构成的一个无标度复杂动力网络, 数值模拟表明了所获理论结果的正确性.

1 动力学模型

考虑一个由 N 个恒同的动力节点以线性耦合形式组成的复杂时滞动力网络, 其状态方程可用如下可测微分方程表示:

$$\dot{x}_i(t) = f(t, x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(t - \tau) \delta(t - t_k) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中, $k \in Z^+ = \{1, 2, \dots, +\infty\}$, $x_i(t) \in R^n$ 为第 i 个耦合振子系统的状态变量; $R \times R^n \rightarrow R^n$ 为连续的向量值函数; 常数 $c > 0$ 为耦合强度; 常数 $\tau > 0$ 表示耦合时滞; $A = [a_{ij}]_{N \times N}$ 表示网络的外部耦合矩阵, 是一个行和为 0 的不可约对称矩阵, 它的特征值满足 $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N$; 对每一固定的脉冲耦合时刻 t_k , 满足 $t_k < t_{k+1}$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$; 这里 $\delta(t)$ 为 Dirac 脉冲函数, 它表征在 t_k 时刻节点之间链接的脉冲效应.

假定方程(1)的初值 $\phi_i(t) \in PC([t_0 - \tau, t_0], R^n)$ 且满足解的存在唯一性条件, 这里 $PC([t_0 - \tau, t_0], R^n)$ 表示在 $[t_0 - \tau, t_0]$ 内任意紧子区间内右连续的有界变差函数的全体.

2010-12-15 收到第 1 稿, 2011-06-02 收到修改稿.

* 国家自然科学基金项目(10972129 和 10832006), 教育部博士点基金(200802800015), 上海市教委科技创新项目(10ZZ61), 上海市重点学科建设项目(S30106)和铜仁学院科研启动基金项目(TR051, TS10016)资助

2 同步化准则

一般地,如果脉冲耦合复杂时滞动力网络(1)的所有解 $x_i (i=1,2,\dots,N)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0, \quad i=1,2,\dots,N \quad (2)$$

则称动力网络(1)是完全同步的,其中 $s(t)$ 称为这个网络的同步态. 令 $s(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t)$, 我们给出如下网络同步的定义.

定义 如果存在常数 $\gamma > 0$ 和 $M > 0$, 存在 $\delta = \delta(\gamma)$, 对任意 $\phi_i(t) \in PC([t_0 - \tau, t_0], R^n)$, 使得当 $\|\phi_i(t) - \phi_j(t)\| < \delta (i, j \in 1, 2, \dots, N)$ 时, 通过初值 (t_0, ϕ_i) 的解 $x_i(t) (i=1, 2, \dots, N)$ 满足

$$\|x_i(t) - s(t)\| \leq M e^{-\gamma(t-t_0)},$$

则称动力网络(1)是局部指数同步的.

定理 假设存在常数 $\lambda > 0, \sigma > 0, \varepsilon > 0$ 使得对所有 $k \in Z^+$ 满足:

$$(C_1) 0 < b_{k-1} + d_{k-1} e^{\lambda\tau} \leq 1,$$

$$(C_2) \sigma - \lambda - \alpha \geq 0,$$

$$(C_3) (\sigma - \lambda)(t_k - t_{k-1}) < -\ln(b_{k-1} + d_{k-1} e^{\lambda\tau}),$$

其中, $0 < \alpha < +\infty$, 满足 $\Sigma^T(t) + \Sigma(t) \leq \alpha I_n$, $\Sigma(t)$ 为 $f(t, s)$ 在 $s(t)$ 处的 Jacobian 矩阵, 其 2-范数对时间 t 一致有界, 上确界记为 $\|\Sigma\|$; ζ_k 表示在 $[t_0 - \tau, t_0]$ 内发生的脉冲耦合次数;

$$\Delta = \sup_k \{t_{k+1} - t_k\},$$

$$b_k = \max \{ (1 + c\lambda_i)^2 + \varepsilon \zeta_k c^2 \lambda_i^2 (1 + c\lambda_i) + \varepsilon c \lambda_i \Delta (1 + c\lambda_i) (\zeta_k + 1) \|\Sigma\| \},$$

$$d_k = \max \{ \varepsilon^{-1} \zeta_k c^2 \lambda_i^2 (1 + c\lambda_i) + \varepsilon^{-1} c |\lambda_i| \Delta (1 + c\lambda_i) (\zeta_k + 1) \|\Sigma\| + \zeta_k^2 c^4 \lambda_i^4 +$$

$$\zeta_k \Delta c^3 |\lambda_i^3| (\zeta_k + 1) \|\Sigma\| +$$

$$c^2 \lambda_i^2 \Delta^2 (\zeta_k + 1)^2 \|\Sigma\| \}.$$

那么对任意耦合强度 $c \in (0, -2/\lambda_N)$, 动力网络(1)是局部指数同步的.

证明 定义网络(1)的同步误差

$$e_i(t) = x_i(t) - s(t), \quad i=1,2,\dots,N \quad (3)$$

注意到 $\sum_{i=1}^N e_i(t) = 0$, 考虑(1)在同步态 $s(t)$ 处的变分方程:

$$\begin{cases} \dot{e}_i(t) = \Sigma(t) e_i(t), & t \neq t_k \\ \Delta e_i(t_k) = c \sum_{j=1}^N a_{ij} e_j(t_k - \tau), & t = t_k \end{cases} \quad (4)$$

因此, 动力网络(1)的同步问题转化为上述脉冲动

力系统的稳定性问题.

记 $A^T = U^T J U$ 为 A 的对称实 Schur 分解, 这里 U 为一实正交矩阵, $J = \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, 令 $[\delta_1^T, \dots, \delta_N^T]^T = (U^T \otimes I_n) [e_1^T, \dots, e_N^T]^T$, 相应(4)转化为如下形式

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i(t) = \Sigma(t) \delta_i(t), & t \neq t_k \\ \Delta \delta_i(t_k) = c \lambda_i \delta_i(t_k - \tau), & t = t_k \end{cases} \quad (5)$$

这里 $\delta_1(t) = 0, i=2,3,\dots,N$.

构造 Lyapunov 函数 $V_i(t) = \frac{1}{2} \delta_i^T(t) \delta_i(t)$, 当 $t \neq t_k$ 时, 有

$$\begin{aligned} D^+ V_i(t) &= \frac{1}{2} (\dot{\delta}_i^T(t) \delta_i(t) + \delta_i^T(t) \dot{\delta}_i(t)) = \\ &= \frac{1}{2} \delta_i^T(t) (\Sigma^T(t) + \Sigma(t)) \delta_i(t) \leq \alpha V_i(t). \end{aligned} \quad (6)$$

当 $t = t_k$ 时, 记误差状态变量 $\delta_i(t)$ 在 $[t_k - \tau, t_k)$ 内发生的脉冲耦合时刻分别为 $t_{k-\xi_k} < t_{k-\xi_k+1} < \dots < t_{k-1}$. 我们有

$$\begin{aligned} \delta_i(t_k) &= (1 + c\lambda_i) \delta_i(t_k^-) - c^2 \lambda_i^2 \sum_{j=1}^{\xi_k} \delta_i(t_{k-j} - \tau) - \\ &= c \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{\xi_k} \int_{t_{k-j}}^{t_{k-j+1}} \Sigma(t) \delta_i(t) dt + \int_{t_k - \tau}^{t_k} \Sigma(t) \delta_i(t) dt \right), \\ & \quad i=2,3,\dots,N \end{aligned} \quad (7)$$

由(7)式及不等式 $x^T y + y^T x \leq \varepsilon x^T x + \varepsilon^{-1} y^T y$, 得

$$\begin{aligned} V_i(t_k) &\leq (1 + c\lambda_i)^2 V_i(t_k^-) + \zeta_k c^2 \lambda_i^2 (1 + c\lambda_i) \times \\ & \quad (\varepsilon V_i(t_k^-) + \varepsilon^{-1} [V_i(t_k)]_{2\tau^-}) + c \lambda_i \Delta (1 + \\ & \quad c \lambda_i) (\zeta_k + 1) \|\Sigma\| (\varepsilon V_i(t_k^-) + \\ & \quad \varepsilon^{-1} [V_i(t_k)]_{2\tau^-}) + \zeta_k^2 c^4 \lambda_i^4 [V_i(t_k)]_{2\tau^-} + \\ & \quad \zeta_k \Delta c^3 \lambda_i^3 (\zeta_k + 1) \|\Sigma\| [V_i(t_k)]_{2\tau^-} + \\ & \quad c^2 \lambda_i^2 \Delta^2 (\zeta_k + 1)^2 \|\Sigma\| [V_i(t_k)]_{2\tau^-}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $[V_i(t_k)]_{2\tau^-} = \sup_{t_k - 2\tau \leq t < t_k} V_i(t)$.

我们有

$$V_i(t_k) \leq b_k V_i(t_k^-) + d_k [V_i(t_k)]_{2\tau^-}. \quad (9)$$

由文献[9]中关于脉冲时滞动力系统扩展的 Halanay 不等式知, 方程(5)是局部指数稳定的. 证毕.

定理表明, 除了节点动力学之外, 网络的同步还极大地依赖于如下两个因素: 一是脉冲耦合时刻网络的拓扑结构, 二是脉冲耦合时间间隔. 此外, 定理中的条件均是充分的, 而非必要的. 这一点我们可以由下面的数值模拟加以阐明.

3 数值模拟

为验证理论结果的正确性,考虑由 30 个耦合混沌 FHN 神经元振子为动力学节点组成的一个无标度(Scale-free)动力网络. 它从一个具有 k_0 个节点的网络开始,每次增加一个新的节点,使之连接到个已经存在的节点上,连接概率是该节点的度与其他节点度之和的比值. 因此,其节点的度近似服从幂率分布 $P(k) \sim k^{-\gamma}$, 这里 $\gamma = -3$ 与 k_0 无关. 选取 $k = k_0 = 5$, 耦合矩阵 A 将按照文献[6]中的 B-A SF 模型在 MATLAB 环境下随机生成, 其中 $\lambda_2 = -1.7027, \lambda_{30} = -16.3027$.

孤立的 FHN 神经元振子动力学方程:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t, x(t)), \tag{10}$$

这里

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$g(t, x(t)) = \begin{bmatrix} -x_1^3(t) + a \sin(2\pi\omega t) \\ 0.8 \end{bmatrix},$$

其中 a, ω 分别为外部周期性输入的振幅及频率. 众所周知, FHN 神经元模型具有较为复杂的动力学行为, 例如周期性、拟周期性以及混沌特性. 当参数 $a = 0.48, \omega = 0.1$ 时, (10) 式解的轨道呈现出混沌吸引子性质. 对任意初始状态 $x(t)$ 都是有界的, 且迅速落入一有界区域 $|x_1(t)| \leq 2.5$, 如图 1.

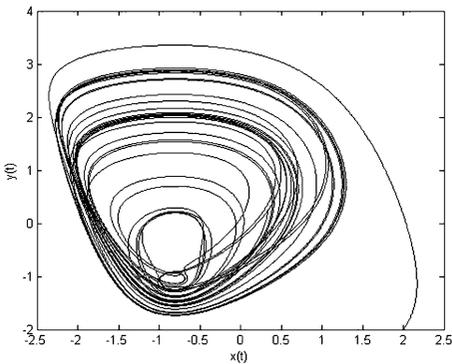


图1 参数为 $a = 0.48, \omega = 0.1$ 时, 孤立 FHN 神经元振子的混沌轨道

Fig. 1 A chaotic orbits of an isolated FHN neuron oscillator with parameters $a = 0.48, \omega = 0.1$

记 $s(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$, 该系统在 $s(t)$ 处的雅可比矩阵(Jacobian)为:

$$\Sigma(t) = \begin{bmatrix} 1 - x_1^2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

易得 $\Sigma(t)^T + \Sigma(t) \leq 3I_n$.

例1 相关参数取值如下:

$c = 0.004, t_k - t_{k-1} = 0.001, \tau = 0.009$, 可知 $\zeta_k = 0$. 取 $\lambda = 0.001, \sigma = 3.01$, 容易验证定理中的条件均成立, 初值在区间 $[-1, 1]$ 内随机选取, 数值模拟结果见图 2.

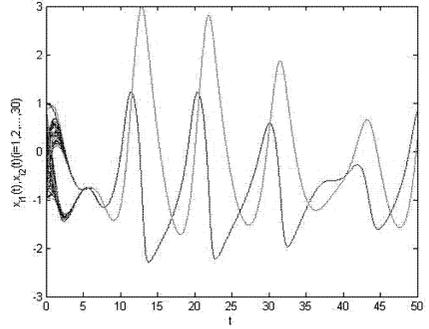


图2 30 个节点的时间历程曲线 $c = 0.004, t_k - t_{k-1} = 0.001, \tau = 0.009$

Fig. 2 Time responses of 30 nodes with $c = 0.004, t_k - t_{k-1} = 0.001, \tau = 0.009$

例2 当参数 $c = 0.01, t_k - t_{k-1} = 0.05, \tau = 0.19$ 时, 可以验证定理中的条件 (C_1) 并不满足, 但是通过数值模拟可以看出, 网络(1)仍能达到同步, 如图 3 所示, 这进一步说明定理中的同步化准则为充分非必要条件.

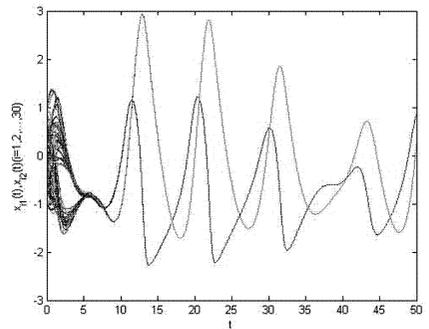


图3 30 个节点的时间历程曲线 $c = 0.01, t_k - t_{k-1} = 0.05, \tau = 0.19$

Fig. 3 Time responses of 30 nodes with $c = 0.01, t_k - t_{k-1} = 0.05, \tau = 0.19$

4 结论

本文考虑了一个复杂脉冲耦合时滞动力网络的同步动力学问题, 应用时滞动力系统的脉冲稳定性理论, 给出了复杂动力网络达到同步的充分条件. 所获的结果有助于我们进一步理解这类复杂网络的动力学机制, 所采用的方法将能够扩展到处理

更为一般的复杂动力网络的同步与控制问题.

参 考 文 献

- 1 Strogatz S H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001, 410:268 ~ 276
- 2 Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286 (5439): 509 ~ 512
- 3 Lu W L, Chen T P, Chen G R. Synchronization analysis of linearly coupled systems described by differential equations with coupling delay. *Physica D*, 2006, 221(2), 118 ~ 134
- 4 Zhou J, Xiang L, Liu Z R. Synchronization in complex delayed dynamical networks with impulsive effects. *Physica A*, 2007, 384(2), 684 ~ 692
- 5 Zhou J, Xiang L, Liu Z R. Global synchronization in general complex delayed dynamical networks and its applications. *Physica A*, 2007, 385(2), 729 ~ 742
- 6 Zhou J, Chen T P. Synchronization in general complex delayed dynamical networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Regular Papers*, 2006, 53(3): 733 ~ 744
- 7 Jalan S, Amritkar R E. Self - organized and driven phase synchronization in coupled maps. *Physical Review Letter*, 2003, 90(1): 014101
- 8 苑学梅, 陈博文, 魏杰, 马茜. 混沌的 Liénard 系统的鲁棒同步及应用. *动力学与控制学报*, 2010, 8(2): 128 ~ 131 (Yuan X M, Chen B W, Wei J, Ma Q. Robust control synchronization and application of chaotic Liénard systems. *Journal of Dynamical and Control*, 2010, 8(2): 128 ~ 131 (in Chinese))
- 9 Wu Q, Zhou J, Xiang L, Cheng S. Impulsive control and synchronization for a class of chaotic delayed systems. *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*, Beijing, 2010, 514 ~ 519
- 10 Imer O C, Yüksel S, Basar T. Optimal control of LTI systems over unreliable communication links. *Automatica*, 2006, 42(9), 1429 ~ 1439

SYNCHRONIZATION IN COMPLEX DELAYED DYNAMICAL NETWORKS WITH IMPULSIVE COUPLING *

Zhang Hua^{1,2} Yan Qing¹ Wu Qianjun³ Zhou Jin²

(1. Department of Mathematics and Computer Science, Tongren College, Tongren 554300, China)

(2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

(3. Department of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200090, China)

Abstract This paper considered the synchronization problem in a complex delayed dynamical network with impulsive coupling. A sufficient condition for ensuring network synchronization was derived analytically based on extended Halanay inequality on delayed dynamical systems with impulse. It is shown that such a complex dynamical network can always achieve synchronization even when there exist instantaneous connections among the nodes at a series of instants. Furthermore, the results were applied to a typical scale - free (SF) complex networks consisting of coupled chaotic FHN neuron oscillators, and numerical simulations were carried out to verify and also visualize the theoretical results.

Key words complex delayed dynamical network, impulsive coupling, synchronization, chaotic FHN neuron oscillators