

# SD 振子中内部激变现象的研究\*

王建华 张晓燕 洪灵

(西安交通大学强度与振动国家重点实验室,西安 710049)

**摘要** 应用广义胞映射图论方法(GCMD)研究SD(smooth and discontinuous systems)振子的内部激变现象.通过对SD常微分方程系统的全局分析发现周期解通向混沌的内部激变现象是由于周期吸引子与其吸引域内部的混沌鞍碰撞产生的.混沌鞍是胞空间中的瞬态自循环胞集,周期吸引子与混沌鞍发生碰撞后,混沌鞍转化为混沌吸引子新增的一部分;内部激变不会改变原来吸引域的形状且具有可逆性和对扰动的不敏感性.同时改进广义胞映射图论方法,提出盒子维数的广义胞映射图论方法的近似计算方法.

**关键词** 广义胞映射图论方法, 内部激变, 盒子维数, 混沌鞍

## 引言

混沌吸引子的突然变化在非线性动力系统中是一种普遍现象.激变按它所引起的吸引子不连续变化的性质可分为边界激变(boundary crisis)和内部激变(interior crisis)<sup>[1]</sup>.边界激变是由于混沌吸引子与其吸引域边界上的不稳定不变集(不稳定周期轨道)碰撞,导致系统的稳定混沌吸引子突然消失,并伴随着混沌鞍的出现.混沌鞍是指相空间中不稳定的混沌不变集.内部激变是由于吸引子与吸引域内部的不稳定不变集(不稳定周期轨道)碰撞,导致系统稳定的吸引子大小的突然变化. Simo<sup>[1]</sup>和 Grebogi<sup>[1,2]</sup>等人对离散映射系统进行了广泛的研究. Abraham<sup>[3]</sup>和 Ueda<sup>[4]</sup>在微分方程系统中也观察到这种吸引子的突然消失. L. Hong 和 J. X. Xu<sup>[5,6,7,11]</sup>对常微分系统中的内部激变现象以及边界激变现象进行了深入的研究.

Stewart<sup>[8,9]</sup>在常微分系统中首次发现了一类新的混沌吸引子突然消失的现象,证明了这种混沌吸引子的突然消失是由于混沌吸引子碰撞吸引域边界,后来 Thompson<sup>[10]</sup>等人在对耗散常微分系统的分岔进行了详细的分类时,将 Stewart 发现的混沌吸引子突然消失归为新的—类混沌吸引子的不连续分岔,并称为边界激变(chaotic boundary crisis)或混沌鞍突变(chaotic saddle catastrophe). Thompson, Stewart 和 Ueda 对耗散动力系统吸引子的分岔

进行分类时,根据常规吸引子(regular attractor 即周期解和稳定的不动点)和混沌吸引子(chaotic attractor)的连续和不连续分岔路径将分岔分为安全分岔(safe bifurcation)、激增分岔(explosive bifurcation)和危险分岔(dangerous bifurcation). L. Hong 和 J. X. Xu<sup>[11]</sup>利用广义胞映射方法(generalized cell mapping digraph),证实了 Stewart 的混沌的边界激变的存在,并发现了嵌入在分形吸引域边界内的混沌鞍,证明这个混沌鞍由于碰撞混沌吸引子导致混沌吸引子完全突然消失,并且对混沌鞍的形成机理进行了详细的阐述,解答了边界激变是由于混沌吸引子碰撞不稳定不变集的稳定流形(及吸引域边界)还是碰撞不稳定不变集(混沌鞍)本身的疑问.

广义胞映射图论方法是 HSU<sup>[12]</sup>在 1995 年提出,该方法有图论以及序数论的严格数学证明支持,能够有效的分析非线性动力学的全局分岔现象,如激变. GCMD 方法能够对激变的产生机理进行直观的有效分析,是非线性动力学全局分析的强有力的工具.

本文借助广义胞映射图论方法,研究 SD 方程<sup>[13,14]</sup>的光滑参数在  $0 < \alpha < 1$  区间范围内全局分岔特性.周期吸引子与其吸引域内部的混沌鞍发生碰撞导致系统通向混沌,在通向混沌的过程中,混沌鞍随着光滑参数  $\alpha$  的减小而逐渐膨胀增大,表现为在胞空间中由多个瞬态自循环胞集合并成分岔

前瞬态的一个瞬态自循环胞集;结合混沌鞍的稳定与不稳定流形,给出了不稳定不变集的不稳定流形.图3所示的分岔图说明系统存在两个分岔点,当分岔参数  $\alpha$  通过两个分岔点时系统发生了突变现象.通过后边的分析可知,这是由于周期吸引子与其吸引域内部的混沌鞍碰撞导致周期吸引子的突然增大.新的混沌吸引子包括两部分,一部分为分岔前的周期吸引子,另一部分为分岔前周期吸引子内部的瞬态自循环胞集即混沌鞍.我们的结论验证了 Thompson<sup>[10]</sup> 等人提出的激增分岔 (explosive bifurcation) 是由于周期吸引子碰撞它的吸引域内部的混沌鞍,而周期吸引子与其吸引域内部的混沌鞍碰撞只是激增分岔 (explosive bifurcation) 的一种情况.

本文同时讨论了盒子维数的广义胞映射图论方法的近似计算方法,给出了稳定流形与不稳定流形在广义胞映射图论方法中的算法实现<sup>[16]</sup>.

### 1 广义胞映射图论方法

#### 1.1 广义胞映射图论方法<sup>[12]</sup>

广义胞映射图论方法研究常微分动力系统的演化形式.胞映射的基本思想是将连续状态空间离散为胞状态空间,动力系统的演化转变为胞与胞的映射关系,随着胞状态空间上的局部二元关系的建立,广义胞映射动力系统与图的有向图形成一一对应关系,考虑微分动力系统:

$$\dot{x} = F(x, t, \mu); \quad x \in R^N, t \in R, \mu \in R^K$$

其中  $x$  是  $N$  维状态向量,  $t$  是时间变量,  $\mu$  是  $K$  维参数向量,  $F$  是向量函数.

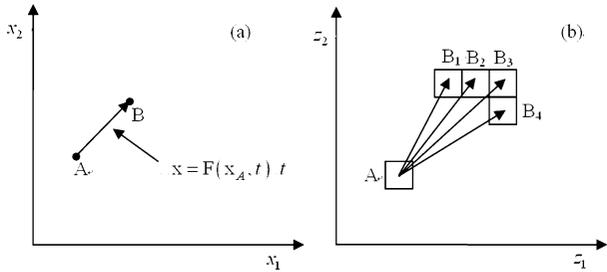


图1 根据微分动力系统建立局部二元关系  
(a) 微分动力方程; (b) 广义胞映射系统

Fig. 1 Binary relationship of the differential dynamical system  
(a) Differential dynamical system; (b) Generalized cell mapping system

根据微分定义,考虑时间  $\Delta t$  内的动力系统的演化可以将上式写成如下形式:

$$\Delta x = F(x_A, t) \Delta t$$

建立局部二元关系,图1(a)所示,系统的状态空间中的任意一点在经过时间  $\Delta t$  后,都会有这样一种简单的映射关系;图1(b)中,在状态胞  $A$  中均匀取采样点,形成如图所示的胞映射关系.

为了研究动力系统的演化方式,我们可以在感兴趣的区域内将状态空间离散为胞状态空间,对胞状态空间中的每个胞建立如图1(b)的胞映射动力系统的二元映射关系.这样,胞状态空间中的有向图也就形成了.

#### 1.2 胞映射方法的实施

GCMD 方法具体实施步骤如下:

(1) 构建广义胞映射动力系统.采用胞采样点方法构建广义胞映射动力系统,因为我们只对动力系统的拓扑性质进行研究,所以在像胞的形成过程中的我们只存储0和1信息,0表示胞与胞之间不存在映射关系,1表示胞与胞之间存在映射关系.在存储像胞信息的过程,同时要存储原像胞信息.

(2) 深度优先搜索.确定胞映射动力系统的永久自循环胞集(吸引子)和瞬态自循环胞集(鞍即不稳定解),对应到图论中的强连通子图.

(3) 形成压缩映射系统.经过深度优先搜索形成的压缩胞映射动力系统为无环的有向图(除了映射到压缩集合自身).利用离群算法(peeling off algorithm)将压缩映射系统中压缩集合赋予级数.

(4) 记录胞的归宿信息,输出吸引子集,边界集,自循环集,吸引域集等相关信息.

#### 1.3 胞映射方法中边界维数的计算

盒子维数<sup>[18]</sup> (Box dimension) 是应用最广泛的维数之一,它的普遍应用主要是由于这种维数的计算及经验估计相对容易.

设  $F$  是  $R^n$  上任意的非空的有界子集,  $N_\delta(F)$  是直径最大为  $\delta$ , 可以覆盖  $F$  的集的最少个数, 则  $F$  的盒子维数记为:

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

我们取边长为  $\delta$  的小盒子,把分形覆盖起来,记下能覆盖分形的小盒子的数目,记为  $N_\delta(F)$ ,然后缩小盒子的尺寸  $\delta$ ,并记录新尺寸  $\delta$  下所对应的  $N_\delta(F)$ . 根据前面的定义,只要在双对数坐标纸上画出  $\ln N_\delta(F)$  对  $-\ln \delta$  曲线,并求其直线部分的斜率即为此分形的维数.

在胞映射系统中,建立胞映射动力系统的时候,我们将相空间离散为相互独立的胞,这样每个独立的胞就具有了盒子的性质. 经过 GCMD 计算所搜索到的多归宿胞(边界胞)将系统的精确边界所覆盖,随着  $\delta$  的变化  $N_\delta(F)$  将随之发生改变. HSU 指出当相空间中胞的尺寸  $\delta$  无限趋于 0 的时候,胞空间的解也将趋于精确解<sup>[12]</sup>. 我们改变胞空间的划分方法,可以得出有限组  $[\delta, N_\delta(F)]$  数据,根据上面所提到盒子维数的定义绘制  $\ln N_\delta(F)$  对  $-\ln \delta$  的双对数坐标曲线,并计算其直线部分的斜率即为该边界的维数. 边界的维数对于分形边界来说具有重要的意义.

### 1.4 稳定流形与不稳定流形<sup>[15]</sup>

在 GCMD 中,我们建立了压缩映射系统, HSU<sup>[12]</sup> 已经证明,压缩映射为无环(除了自循环)的有向图,如果一个胞以自循环胞集为归宿,则在庞加莱界面上必然存在一条轨线通向该不稳定不动点即稳定流形,如果自循环胞集以吸引子胞集为最终归宿,则存在一条轨线通向吸引子胞集即不稳定流形. 根据这一特点,存在如下压缩映射关系:

(1) 在胞空间中,对于一个瞬态自循环集,如果有一个胞以此瞬态自循环集为归宿,则必存在一条从一个瞬态无环集合(只包含一个胞的集合)到该瞬态自循环胞集中某一个顶点胞的路径,也即存在一条从该胞中的某一初值点出发到该瞬态自循环集所对应的不稳定解的某一点的轨迹. 因此,该顶点胞(瞬态无环胞集)包含了该不稳定解稳定流形上的点.

(2) 在胞空间中,因为瞬态自循环胞集以吸引子胞集为最终归宿,并且在运动到吸引子胞集的过程中会经过有限的胞(只包含一个胞的瞬态无环集合),则必存在一条从该瞬态自循环胞集中某一个顶点胞到吸引子胞集的路径. 也即存在一条从该瞬态自循环胞集中某个顶点胞中某一初值点出发到瞬态无环胞集中的顶点胞的轨线. 因此,该瞬态无环集合中的顶点胞包含了该瞬态自循环集所对应的不稳定解的不稳定流形上的点.

根据上面的讨论,以及 GCMD 已经建立起的压缩映射信息,从瞬态自循环胞集出发搜索其原象与映象信息,进行如下的迭代:

稳定流形算法实现:

输入:一个瞬态自循环胞集;

步 1:初始化集合  $A_1 \leftarrow \emptyset$ ;

步 2:将瞬态自循环集放入到  $A_1$  中;

步 3:清空集合  $A_2$ ;搜索  $A_1$  的原像集合,如果集合  $C$  未被搜索过,将其放入  $A_2$  中;

步 4:如果  $A_2 = \emptyset$  则停止搜索;

步 5:令  $A_1 = A_2$ ,清空  $A_2$ ,转步 3;

不稳定流形算法实现:

输入:一个瞬态自循环集;

步 1:初始化集合  $A_1 \leftarrow \emptyset$ ;

步 2:将瞬态自循环集放入到  $A_1$  中;

步 3:清空集合  $A_2$ ;搜索  $A_1$  的映射压缩集合,如果集合  $C$  未被搜索过,将其放入  $A_2$  中;

步 4:如果  $A_2 = \emptyset$  则停止搜索;

步 5:令  $A_1 = A_2$ ,清空  $A_2$ ,转步 3;

## 2 SD 系统中的激变现象

SD (smooth and discontinue) 动力方程见 Cao<sup>[13,14]</sup>. 其物理结构如图 2 所示,这个振动类似于翘曲桁架系统(snap-through truss system). 质量块  $m$  连接于一对倾斜的弹簧上,这个弹簧能够被拉压,弹性系数为  $k$ ,末端固定在一个刚性底座上,这个模型类似于 Thompson 和 Hunt<sup>[16]</sup> 提出的弹性拱模型(图 2a). 虽然弹簧提供线性回复力,但是由于模型几何结构的改变使作用在质量块上的垂直方向的力表现为强非线性. 方程如下:

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_0^2 x \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \right) = f_0 \cos \omega t$$

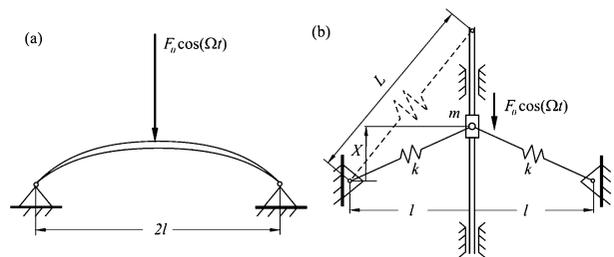


图 2 (a) 简单的弹性拱;(b) 非线性振动的动力学模型  
Fig. 2 (a) Simple elastic arch; (b) Nonlinear dynamics model

考虑  $\omega_0 = 1.0606, f_0 = 0.83, \zeta = 0.04$  时,取初始条件为  $(x_0, dx_0/dt) = (1, 0)$ ,分岔参数  $\alpha$  在  $(0, 1)$  范围内变化,应用四阶 Runge-Kutta 算法,选取步长  $h = 0.001$ ,计算 2000 倍周期  $T$  的瞬态,在计算中舍去前 1980 个周期的瞬态,在后 20 个周期内记录在  $T/n = 2\pi/\omega_0$  时的瞬态,可得分岔图,如图 3.

在图3(a)、图3(b)中我们可以观察到随着参数  $\alpha$  的减小系统在两个临界点发生激变现象,即由周期解通向混沌. 分岔参数  $\alpha$  的一个分岔临界值位于区间(0.60,0.61)内,当系统的分岔参数  $\alpha$  通过临界值时,系统的周期解突然扩张增大,系统由周期解通向混沌. 分岔参数  $\alpha$  的另一个分岔临界值位于区间(0.06,0.07)内,系统也发生了吸引子的激变现象. 观察图3的混沌区间可知,在分岔参数  $\alpha$  减小的过程中,混沌吸引子的大小随着分岔参数  $\alpha$  的减小而在不断增大.

构造广义胞映射动力系统,选取 Poincare 截面  $\Sigma = \{(x, dx/dt, \theta) \mid \cos\omega t = 0\}$ , 我们考虑感兴趣的有限区域  $D: \{-5 < x < 2.5\} \times \{-2 < \dot{x} < 3\}$ , 并用  $800 \times 800$  个胞均匀的覆盖感兴趣的有限区域,在感兴趣的区域  $D$  以外引入陷胞(sink cell), 状态胞的总数目(包括陷胞)为:  $N = 800 \times 800 + 1$ , 我们对所有的胞进行一维排序,从1到  $N$  用正整数依次顺序的标记每一个状态胞,在每一个状态胞内均匀的取  $10 \times 10$  个采样点,从每一个采样点出发,采用四阶的 Runge - Kutta 方法积分一个激励周期内的象点. 象点所在的胞  $j$  就是胞  $i$  的一个映射象胞. 我们利用广义胞映射图论方法研究系统的定性性质,转移概率大于0表示胞  $j$  和胞  $i$  存在映射关系,用1表示;转移概率等于0,表示胞空间中胞  $j$  和胞  $i$  不存在映射关系,用0表示.

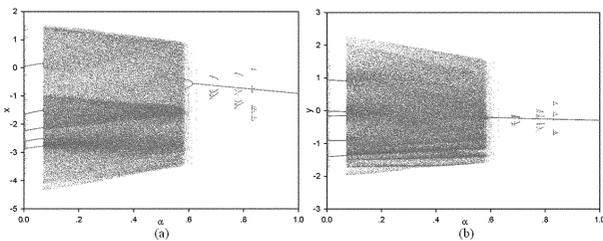


图3 固定参数  $\omega_0 = 1.0606, f_0 = 0.83, \zeta = 0.04$ , 初始条件为  $(x_0, dx_0/dt) = (1, 0)$ , 分岔参数  $\alpha$  在(0,1)范围内的分岔图  
Fig.3 Let  $\omega_0 = 1.0606, f_0 = 0.83, \zeta = 0.04$ , the initial condition  $(x_0, dx_0/dt) = (1, 0)$ , the bifurcation parameter  $\alpha$  changes in the range of (0,1)

固定 SD 系统方程中的参数  $f_0 = 0.83, \zeta = 0.04$  和  $\omega_0 = 1.0606, \alpha$  为分岔参数. 利用 GCMD 方法研究系统由周期吸引子通向混沌的不连续变化的机理. 当参数  $\alpha$  在  $0.61 < \alpha < 1$  范围内变化时,如图4 ( $\alpha = 0.80$ )所示,通过计算,系统存在一个周期一吸引子(红色),同时在周期一吸引子的吸引域内

部存在10个非周期瞬态自循环胞集,其中有6个伪瞬态自循环胞集,舍去6个伪瞬态自循环胞集,4个瞬态自循环胞集由外到里分别用深青色,绿色,粉红色和深绿色表示,图4中白色区域表示周期一吸引子的吸引域,青色区域表示无穷远吸引子的吸引域,蓝色表示周期1吸引子的吸引域与无穷远吸引子的吸引域边界. 根据上节中流形算法得到图4(b),分析图中信息,在周期一吸引子的吸引域内.

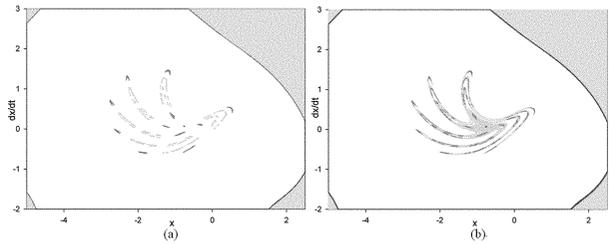


图4 方程(1)在固定参数  $f_0 = 0.83, \zeta = 0.04$  和  $\omega_0 = 1.0606, \alpha = 0.80$  时在区域  $D: \{-5 < x < 2.5\} \times \{-2 < \dot{x} < 3\}$  内的相图  
Fig.4 For the system (1) with the fixed  $f_0 = 0.83, \zeta = 0.04, \omega_0 = 1.0606$ , and  $\alpha = 0.80$  in the domain of  $D: \{-5 < x < 2.5\} \times \{-2 < \dot{x} < 3\}$

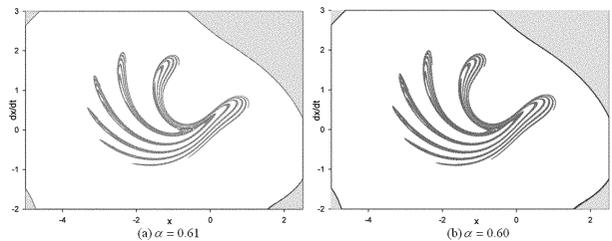


图5 方程(1)在固定参数  $f_0 = 0.83, \zeta = 0.04$  和  $\omega_0 = 1.0606, \alpha$  取0.60和0.61时在区域  $D: \{-5 < x < 2.5\} \times \{-2 < \dot{x} < 3\}$  内的相图  
Fig.5 For the system (1) with the fixed  $f_0 = 0.83, \zeta = 0.04, \omega_0 = 1.0606, \alpha = 0.60$ , and  $\alpha = 0.61$  in the domain of  $D: \{-5 < x < 2.5\} \times \{-2 < \dot{x} < 3\}$

随着参数  $\alpha$  在区间  $0.61 \leq \alpha \leq 1$  内减小,混沌鞍会沿着不稳定流形而逐渐膨胀,并且由多个瞬态自循环胞集合并成一个瞬态自循环胞集,如图5 ( $\alpha = 0.61$ )所示. 图5(a)给出了吸引子与混沌鞍碰撞前的瞬态,图5(b)为碰撞后周期吸引子扩张增大,周期吸引子激变成混沌吸引子. 在内部激变中,周期吸引子与其吸引域内部的混沌鞍发生碰撞而导致其体积的突然增大,如果在新增大的吸引子上的轨迹反复出现同宿缠绕或者马蹄结构,则系统由周期通向混沌. 在内部激变过程中,这个新的吸引子是确定的,其由两部分组成,一部分是分岔前周期吸引子,另一部分是分岔前的混沌鞍即本文所提到

的瞬态自循环胞集,系统不会因为周期吸引子与混沌鞍碰撞而导致不确定性的结果出现,不会因为控制参数的变化速率而产生不确定的结果,并且对噪声及误差并不敏感.如果分岔参数  $\alpha$  从 0.60 增大到 0.61,在光滑参数  $\alpha$  通过同样的临界分岔点后,动力系统会从一个混沌吸引子变成一个周期吸引子,即系统的内部激变具有可逆性,这是与具有分形边界的边界激变现象是截然不同的.同时,系统的吸引域不会发生变化,这就是对内部激变机理的解释.

$\alpha$  的另一个分岔临界值出现在  $0.065 < \alpha < 0.066$  的范围内,图 6(b) 为红色区域  $\alpha = 0.066$  时的混沌吸引子,白色为其吸引域,蓝色代表无穷远吸引子吸引域与混沌吸引子吸引域的边界,青色表示无穷远吸引子的吸引域.图 6(a) 为  $\alpha = 0.065$  时的瞬态自循环胞集与周期 5 吸引子共存的胞空间相图,随着参数  $\alpha$  从 0.065 增大到 0.066,系统参数  $\alpha$  通过临界分岔点,周期 5 吸引子与瞬态自循环胞集碰撞,导致吸引子的突然增大,新的混沌吸引子包括两部分,一部分是分岔前的周期 5 吸引子,另一部分为分岔前周期 5 吸引子吸引域内的瞬态自循环胞集,系统的吸引域及边界均未发生变化,碰撞后的结果是确定性的,不受参数变化速度的影响,同时内部激变具有可逆性.

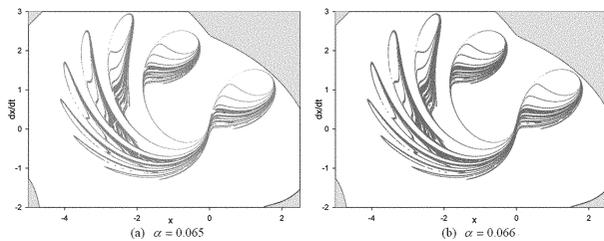


图6 方程(1)固定参数  $f_0 = 0.83, \zeta = 0.04, \omega_0 = 1.0606$ ,  $\alpha$  取 0.065 和 0.066 时在区域  $D: \{-5 < x < 2.5\} \times \{-2 < y < 3\}$  内的相图

Fig. 6 For the system (1) with the fixed  $f_0 = 0.83, \zeta = 0.04,$

$\omega_0 = 1.0606, \alpha = 0.065$  and  $\alpha = 0.066$  in the domain of

$$D: \{-5 < x < 2.5\} \times \{-2 < y < 3\}$$

### 3 结论

本文利用广义胞映射图论方法研究了 SD 微分动力系统的内部激变现象,验证周期吸引子的突然增大是由于周期吸引子与其吸引域内部的混沌鞍碰撞产生的,这个混沌鞍是胞空间中的瞬态自循环胞集,代表内部激变后形成的混沌吸引子的新增

的一部分.同时内部激变不会改变分岔前周期吸引子的吸引域的形状,且内部激变具有可逆性和对扰动的不敏感性.

本文讨论了盒子维数与广义胞映射图论方法的关系,我们将继续深入研究盒子维数<sup>[18]</sup>的广义胞映射图论方法的近似计算方法,验证该方法的可行性.稳定流形与不稳定流形在广义胞映射图论方法中的算法实现是一种研究非线性动力系统全局特性的强有力的工具.利用该方法能够清楚的观察到边界激变中的同宿相切现象;在含有三个吸引子的动力系统中,存在一种 Wada 吸引域,利用该方法我们可以清楚的看到分形吸引域边界上鞍点的不稳定流形穿过三个吸引域,这也是判断吸引域边界是否为 Wada 的必要条件<sup>[17]</sup>.

### 参 考 文 献

- 1 Grebogi C, Ott E, Yorke J A. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamic-systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, 57(11): 1284 ~ 1287
- 2 Grebogi C, Ott E, Yorke J A. Crisis sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica. D*, 1983, 7(1-3): 181 ~ 200
- 3 Abraham R H, Stewart H B. A chaotic blue sky catastrophe in forced relaxation oscillations. *Physica. D*, 1986, 21(2-3): 394 ~ 400
- 4 Ueda Y. Steady motions exhibited by duffing's equation: A picture book of regular and chaotic motions, in *New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics*. ed. P. J. Holmes, SIAM, Philadelphia, 1980: 311
- 5 Hong L, Xu J X. Chaotic saddle in wada basin boundaries and their bifurcations by the generalized cell-mapping digraph (GCMD) method. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 32(4): 371 ~ 385
- 6 洪灵,徐健学.非线性强迫 Mathieu 方程的激变和瞬态混沌. *力学学报*, 2001, 33(7): 423 ~ 429 (Hong L, Xu J X. Crises and transient chaos in a forced nonlinear mathieu oscillator. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(7): 423 ~ 429 (in Chinese))
- 7 洪灵,徐健学.常微分方程系统中的内部激变现象的研究. *物理学报*, 2000, 49(7): 1228 ~ 1234 (Hong L, Xu J X. Further study of interior crises in systems of ordinary differential equations. *Acta Physica Sinica*, 2000, 49(7): 1228 ~ 1234 (in Chinese))

- 8 Stewart H B. In dynamical systems approaches to nonlinear problems in systems and circuits. eds. F. Salam, M. Levi, SIAM, Philadelphia, 1988: 138 ~ 149
- 9 Thompson J M, Stewart H B. Nonlinear dynamics and chaos. Wiley, Chichester, 1986: Chapter 13
- 10 Tompson J M, Stewart H B, Ueda Y. Safe explosive, and dangerous bifurcations in dissipative dynamical systems. *Physical Review E*, 1994, 49(2): 1019 ~ 1027
- 11 洪灵,徐健学. 一类新的边界激变现象:混沌的边界激变. 物理学报, 2001, 50(4): 612 ~ 618 (Hong L, Xu J X. A new type of boundary crises: chaotic boundary crises. *Acta Physica Sinica*, 2001, 50(4): 612 ~ 618 (in Chinese))
- 12 Hsu C S. Global analysis of dynamical - systems using posets and digraphs. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1995, 5(4): 1085 ~ 1118
- 13 Cao Q J, Wiercigroch M, Pavlovskaja E, Grebogi C, Thompson J M T. The limit case response of the archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 2008, 43: 462 ~ 473
- 14 Cao Q J, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E, Grebogi C, Thompson J M T. The SD oscillator and its attractors. 2007 International Symposium on Nonlinear Dynamics, 2008, 96:12064 ~ 12071
- 15 贺群,徐伟,李爽,肖玉栋. 图胞映射的一种改进方法. 物理学报, 2008, 57(2): 743 ~ 748 (He Q, Xu W, Li S, Xiao Y D. A modified digraph cell mapping method. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(2): 743 ~ 748 (in Chinese))
- 16 Thompson J M T, Hunt G W. A general theory of elastic stability. London: John Wiley&Sons, 1973
- 17 Nusse H E, Yorke J A. Wada basin boundaries and basin cells. *Physica D*, 1996, 90(3): 242 ~ 261
- 18 McDonald S W, Grebogi C, Ott E, Yorke J A. Fractal basin boundaries. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, 17(2): 125 ~ 153

## STUDY OF THE INTERIOR CRISIS IN SD OSCILLATOR\*

Wang Jianhua Zhang Xiaoyan Hong Ling

(Xi'an Jiao Tong university, State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an 710049, China)

**Abstract** The interior crisis in the SD(smooth and discontinuous systems) oscillator was studied with the generalized cell mapping digraph method(GCMD). Based on the global analysis of the SD oscillator, we found the road to chaos was due to the collision of the period attractor and the chaotic saddle. Chaotic saddle is the transient self-cycling cell set in the cell state space, after the collision chaotic saddle becomes the new portion of the chaotic attractor. The interior crisis will not change the shape of the basin of attractor, and is invertible and insensitive to the excitation. Simultaneously, the generalized cell mapping digraph method was improved, and a new algorithm was advanced to gain the box-counting dimension.

**Key words** generalized cell mapping digraph method, interior crisis, box-counting dimension, chaotic saddle