

# 一类非线性隔振器振动传递特性分析\*

彭志科<sup>1</sup> 郎自强<sup>2</sup> 孟光<sup>1</sup> 程长明<sup>1</sup>

(1. 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

(2. 英国谢菲尔德大学自动控制与系统工程系, 英国, 谢菲尔德, S1 3JD, UK)

**摘要** 非线性输出频率响应函数是由 Volterra 级数发展而来的一个新概念. 对一类具有反对称阻尼特性的隔振器, 通过该概念推导出了振动传递性与系统非线性参数之间的显式解析关系; 进而系统地研究了非线性阻尼参数对隔振器的力传递性能和位移传递性能的影响. 研究表明, 虽然非线性隔振器在受正弦信号激励下会出现高次倍频分量, 但对于其传递性能的评估仍可简单地通过系统输入和输出信号的基频分量之间的关系来衡量; 另外, 反对称非线性阻尼能够有效地抑制隔振器在共振区的力传递性和位移传递性, 而在非共振区则基本无抑制效果. 研究结果对于具有反对称阻尼特性的隔振器的分析与设计具有重要意义.

**关键词** 非线性振动, Volterra 级数, 非线性阻尼, 隔振器

## 引言

隔振器常安装在振源与被保护设备之间, 以降低振动能量的传递, 从而保护设备. 根据隔振器的振动响应是否能用常系数线性微分方程来描述, 可将隔振器分为线性<sup>[1]</sup>与非线性<sup>[2]</sup>两类. 另外, 还可根据隔振器工作时是否需要外力输入, 将隔振器分为主动隔振<sup>[3]</sup>与被动隔振<sup>[4]</sup>. 由于设计隔振器时, 须考虑多种因数对其性能的影响, 设计出综合性能较好的隔振器是一项比较有挑战性的任务. 一般隔振器的性能可用位移、速度、加速度或者力的传递性能来评估. 例如, 在频域隔振器的力传递性是指在工作频率下振动系统的输出力与输入力的比值.

对线性隔振器已有了大量的理论成果<sup>[5]</sup>. 线性隔振器的传递性能可表示为相关影响因数的简单函数, 这大大方便了隔振器的设计, 如 Solim 和 Ismailzadeh<sup>[6]</sup>对线性隔振器的力传递性与质量、刚度、阻尼比等因素最优值之间的关系及共振特性进行了阐述. 文献[7]对此研究做了较全面的综述.

与设计方法成熟的线性隔振器相比, 非线性隔振器的研究则进展相对缓慢, 尽管实际的隔振系统本质上都具有非线性. 近几年来, 将非线性因数纳入隔振器设计的趋势越来越明显<sup>[8]</sup>, 部分因为研究发现在设计隔振器时引入非线性阻尼及非线性刚

度对其隔离性能具有较大的好处<sup>[9,10]</sup>. 然而, 非线性隔振器的设计是一个复杂难题, 这主要因为非线性系统研究本身就是个难题, 如只有一些特定类型的非线性系统能给出完备的解析解<sup>[11]</sup>. 另外, 为简化起见, 人们通常只是对单自由度或低阶非线性模型进行分析; 即便如此, 对简化模型进行分析也并非易事. 例如, 在非线性隔振器研究中, 一个直接的难题就是难于获得振动传递性能与系统非线性参数之间的显式解析表达式.

为在隔振器设计中更好地利用非线性因素, 有必要发展对非线性隔振器传递性能直接进行评估的方法, 以分析系统非线性表征参数对传递性能的影响. 在频域, 本文通用非线性输出频率响应函数<sup>[12][13]</sup>来表示非线性隔振器的传递性能, 获得了一大类具有反对称非线性阻尼特性的非线性隔振器的非线性表征参数与振动传递性能之间的显式解析关系, 对非线性隔振器的设计具有较大意义.

## 1 具有反对称非线性阻尼的隔振器

### 1.1 隔振器模型

集中参数数学模型常用来分析和设计隔振系统以及解释振动机械系统的特性. 图1是理想化的被动隔振系统的示意图, 主要包括一个弹性支撑机制(刚度)和一个耗能机制(阻尼). 刚度和阻尼可

2010-12-06 收到第1稿, 2011-04-24 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金(10902068, 10732060)、上海市浦江人才支持计划(10PJ1406000)及教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-10-0548)资助项目

来源于单一元件也可来源于不同的元件. 当采用不同的元件时, 则相对无阻尼弹簧要与辅助阻尼元件一起使用. 在本文中, 如图1所示, 隔振器包含一个刚度为  $k$  的线性弹簧和一个 DM 阻尼机制, 隔振系统的运动方程可用下式表示,

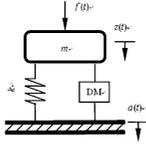


图1 用集中参数表示的理想隔振器模型

Fig. 1 Lumped-parameter representation of idealized vibration isolator

$$m\ddot{z}(t) + F_{DM} + k\delta(t) = f(t) \quad (1)$$

其中,  $z(t)$  是质量  $m$  的绝对位移,  $\delta(t) = z(t) - a(t)$  是隔振器的相对位移. 振动激励由力  $f(t) = A_0 \sin(\omega t)$  或基础位移  $a(t) = A_0 \sin(\omega t)$  或基础的运动速度给出. 假设弹簧刚度  $k$  与位移无关, 则弹性恢复力  $k\delta(t)$  与相对位移成线性比例关系. 假设阻尼机制是反对称非线性的阻尼曲线, 则阻尼力  $F_{DM}$  可用下式来表示,

$$F_{DM} = c\delta(t) + \sum_{p=1}^Q c_{(2p+1)} [\delta(t)]^{2p+1} \quad (2)$$

其中,  $\xi_{(2p+1)}$  ( $p=1, \dots, Q$ ) 是非线性阻尼表征参数. 在封闭且有界区间上, 任何连续函数都能用一组多项式来对其进行任意精度的一致逼近<sup>[14]</sup>, 所以包括下式表示的阻尼力在内的一大类非线性阻尼力都可用式(2)来表示,

$$F_{DM} = c\dot{x}(t) + c_{(p)} |\dot{x}(t)|^p \text{sgn}(\dot{x}(t)) \quad (3)$$

式(3)表示的阻尼力广泛用于粘性阻尼器的设计<sup>[15]</sup>.

当振动激励是基础位移  $a(t)$  时, 感兴趣的主要是质量块  $m$  的绝对位移  $z(t)$  和相对位移  $\delta(t)$ .

在这种情况下, 式(1)可表示成下式,

$$m\ddot{\delta}(t) + c\dot{\delta}(t) + \sum_{p=1}^Q c_{(2p+1)} [\delta(t)]^{2p+1} + k\delta(t) = -m\ddot{a}(t) \quad (4)$$

当激励是外力  $f(t)$  时, 式(1)可写成下式,

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + \sum_{p=1}^Q c_{(2p+1)} [\dot{z}(t)]^{2p+1} + kz(t) = f(t) \quad (5)$$

此时, 感兴趣的是传递到基座的力  $F_T$ , 可用下式表示,

$$F_T(t) = f(t) - m\ddot{z}(t) = c\dot{z}(t) +$$

$$\sum_{p=1}^Q c_{(2p+1)} [\dot{z}(t)]^{2p+1} + kz(t) \quad (6)$$

令  $x = \delta/A_0$ ,  $y = z/A_0$ ,  $\Gamma = F_T/A_0$ ,  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ,  $\Omega = \omega/\omega_0$ ,  $\xi = c/\sqrt{km}$ ,  $\xi_{(2p+1)} = c_{(2p+1)} A_0^{2p}/\sqrt{(km)^{2p+1}}$ , 式(4)~(6)可分别写成式(7)~(9)的形式,

$$\ddot{x}(\tau) + \xi\dot{x}(\tau) + \sum_{p=1}^Q \xi_{(2p+1)} [\dot{x}(\tau)]^{2p+1} + x(\tau) = \Omega^2 \sin(\Omega\tau) \quad (7)$$

$$\ddot{y}(\tau) + \xi\dot{y}(\tau) + \sum_{p=1}^Q \xi_{(2p+1)} [\dot{y}(\tau)]^{2p+1} + y(\tau) = \sin(\Omega\tau) \quad (8)$$

$$\Gamma(\tau) = \xi\dot{y}(\tau) + \sum_{p=1}^Q \xi_{(2p+1)} [\dot{y}(\tau)]^{2p+1} + y(\tau) \quad (9)$$

## 1.2 隔振器的振动传递性能

当振动激励是基础位移  $a(t)$  时, 感兴趣的主要是质量块  $m$  的绝对位移  $z(t)$  和相对位移  $\delta(t)$ . 用位移传递性能来评估隔振器的性能, 位移传递性能的表达式如下,

$$T_{d1} = \frac{\delta}{a} \text{ 和 } T_{d2} = \frac{z}{a} = \frac{a+\delta}{a} \quad (10)$$

然而, 当振动激励是力  $f(t)$  时, 用力的传递性能  $F_T$  来评估隔振器的性能, 力传递性能表达式如下,

$$T_f = \frac{F_T}{f} \quad (11)$$

对于线性隔振器, 位移响应  $z(t)$ 、 $\delta(t)$  与  $a(t)$ , 力  $f(t)$  与  $F_T(t)$  总是具有相同的频率分量, 所以, 传递性能在频域可以用下式来表示,

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{d1}(j\omega) &= \frac{\tilde{\delta}(j\omega)}{\tilde{a}(j\omega)}, \tilde{T}_{d2}(j\omega) = 1 + \tilde{T}_{d1}(j\omega) \\ \tilde{T}_f(j\omega) &= \frac{\tilde{T}_T(j\omega)}{\tilde{f}(j\omega)} \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\tilde{T}_{d1}$ ,  $\tilde{\delta}$ ,  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{T}_{d2}$ ,  $\tilde{T}_f$ ,  $\tilde{F}_T$  和  $\tilde{f}$  分别是  $T_{d1}$ ,  $\delta$ ,  $a$ ,  $T_{d2}$ ,  $T_f$ ,  $F_T$  和  $f$  的傅里叶变换. 传递性能的频域定义极大地方便了传统线性隔振器的分析与设计. 但是, 对于正弦激励下的非线性隔振器而言, 由于超谐波分量的存在, 系统输出响应当中会出现比振动激励更多的频率成分. 因此, 传递性能不能简单地用式(12)来定义. 但是, 从归一化后的运动方程(7)~(9)可以看出, 通过研究响应  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  来评估非线性隔振器的传递性能是可行, 并且容易推导出  $x(\tau)$ ,  $\Gamma(\tau)$  的基频分量与  $\tilde{T}_{d1}$ ,  $\tilde{T}_f$  之间具有直接的

关系,关系如下,

$$\tilde{x}(j\Omega) = \tilde{T}_{a1}(j\Omega) \text{ 和 } \tilde{\Gamma}(j\Omega) = \tilde{T}_f(j\Omega) \quad (13)$$

其中,  $\tilde{x}$  和  $\tilde{\Gamma}$  分别是  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  的傅里叶变换, 唯一的不同是  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  具有高次谐分量. 尽管如此,  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  仍可视是为对非线性隔振器传递性能评估的间接但合理改进.

此外, 值得注意的是, 正如  $\xi_{(2p+1)}$  ( $p = 1, \dots, Q$ ) 定义表示的那样, 无量纲方程(7) ~ (9)的非线性特征参数取决于振动激励的振幅和非线性阻尼的物理表征参数  $c_{(2p+1)}$  ( $p = 1, \dots, Q$ ). 这就意味着由  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  估算的传递性能取决于振动激励的振幅, 这与我们所知道的非线性系统的响应依赖于输入相符合. 然而, 当激励振幅确定以后, 无量纲方程中的阻尼表征参数就仅仅取决于  $c_{(2p+1)}$  ( $p = 1, \dots, Q$ ). 因此, 对具有特定幅值的振动激励, 分析参数  $\xi_{(2p+1)}$  ( $p = 1, \dots, Q$ ) 对  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  的影响就等同于研究阻尼表征物理参数  $c_{(2p+1)}$  ( $p = 1, \dots, Q$ ) 对  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  的影响.

### 1.3 利用输出频率响应函数表示振动传递性能

Volterra 级数是分析非线性系统的一种有效工具, 它可看作是线性系统的一维卷积理论在多维空间上的推广, 对一大类在零点附近做稳定运动的非线性系统, 特别是多项式非线性系统, 它都可进行很好地描述, 对非线性系统一些所特有的现象进行解释. 基于非线性系统的 Volterra 级数理论, 方程(7)和(9)中  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  的频谱可用下式表示,

$$\begin{cases} \tilde{x}(j\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \sum_{\omega_1+\dots+\omega_n=\omega} H_n^{(x)}(j\omega_1, \dots, j\omega_n) \bar{A}_x(\omega_1) \cdots \bar{A}_x(\omega_n) \\ \tilde{\Gamma}(j\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \sum_{\omega_1+\dots+\omega_n=\omega} H_n^{(\Gamma)}(j\omega_1, \dots, j\omega_n) \bar{A}_\Gamma(\omega_1) \cdots \bar{A}_\Gamma(\omega_n) \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $N$  是 Volterra 级数模型中最大非线性阶数, 并且

$$\bar{A}_x(\omega_i) = \begin{cases} \Omega^2 e^{-j\pi/2} & \text{当 } \omega_i = \Omega \text{ 时} \\ \Omega^2 e^{j\pi/2} & \text{当 } \omega_i = -\Omega \text{ 时} \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$
$$\bar{A}_\Gamma(\omega_i) = \begin{cases} e^{-j\pi/2} & \text{当 } \omega_i = \Omega \text{ 时} \\ e^{j\pi/2} & \text{当 } \omega_i = -\Omega \text{ 时} \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$
$$(i = 1, \dots, n) \quad (15)$$

$H_n^{(x)}(j\omega_1, \dots, j\omega_n)$  和  $H_n^{(\Gamma)}(j\omega_1, \dots, j\omega_n)$  分别是  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  的第  $n$  阶广义频率响应函数. 对一大类非线性系统, 例如多项式类型的非线性系统(方程(7)和(9)表示的非线性隔振器就是一个多项式类型的非线性系统), 它们的广义频率响应函数可用 Billings 和 Peyton Jones 提出的算法迭代算出. 然而, 该算法不能够显式地表示出系统的非线性表征参数对非线性系统响应的影响, 而为了解决这个问题, 可利用输出频率响应函数<sup>[12]</sup>这一概念. 利用输出频率响应函数, 方程(14)可以改写成如下形式,

$$\begin{cases} \tilde{x}(j\omega) = H_1^{(x)}(j\omega) \bar{A}_x(\omega) + \sum_{n=2}^N \sum_{(j_1, \dots, j_Q) \in J_n} \Phi_{\xi_3 \dots \xi_{(2Q+1)}}^{n:j_1 \dots j_Q}(j\omega) \xi_3^{j_1} \cdots \xi_{(2Q+1)}^{j_Q} \\ \tilde{\Gamma}(j\omega) = H_1^{(\Gamma)}(j\omega) \bar{A}_\Gamma(\omega) + \sum_{n=2}^N \sum_{(j_1, \dots, j_Q) \in J_n} \Psi_{\xi_3 \dots \xi_{(2Q+1)}}^{n:j_1 \dots j_Q}(j\omega) \xi_3^{j_1} \cdots \xi_{(2Q+1)}^{j_Q} \end{cases} \quad (16)$$

其中,

$$H_1^{(x)}(j\omega) = H_1^{(\Gamma)}(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + j\xi\omega + 1} \quad (17)$$

$\Phi_{\xi_3 \dots \xi_{(2Q+1)}}^{n:j_1 \dots j_Q}(j\omega)$ 、 $\Psi_{\xi_3 \dots \xi_{(2Q+1)}}^{n:j_1 \dots j_Q}(j\omega)$  分别是  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  的高阶输出频率响应函数, 它们仅与激励频率  $\Omega$  及一阶广义频率响应函数  $H_1^{(x)}(j\omega)$  和  $H_1^{(\Gamma)}(j\omega)$  有关, 而非线性表征参数  $\xi_{(2p+1)}$  ( $p = 1, \dots, Q$ ) 无关,  $J_n$  是  $Q$  维非负整数向量的集合, 该集合包含单项式  $\xi_3^{j_1} \cdots \xi_{(2Q+1)}^{j_Q}$  的指数. 此外, 本文作者为确定非线性系统输出频率响应中(当用输出频率响应函数来表示时)这种单项式的形式以及数目, 提出了一个迭代算法<sup>[13]</sup>.

为了说明如何用输出频率响应函数来表示非线性隔振器的输出频率响应, 以  $Q = 2$ , 最大非线性阶数为 7 (即  $N = 7$ ) 的带反对称阻尼的非线性隔振器为例, 此时非线性隔振器  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  的基频分量与三阶超谐分量的表达式如下,

$$\begin{cases} \tilde{x}(j\Omega) = H_1^{(x)}(j\Omega) \bar{A}_x(\Omega) + \xi_3 \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{3:1,0}(j\Omega) + \xi_3^2 \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{5:2,0}(j\Omega) + \xi_5 \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{5:0,1}(j\Omega) + \xi_3^3 \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{7:3,0}(j\Omega) + \xi_3 \xi_5 \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{7:1,1}(j\Omega) \\ \tilde{\Gamma}(j\Omega) = H_1^{(\Gamma)}(j\Omega) \bar{A}_\Gamma(\Omega) + \xi_3 \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{3:1,0}(j\Omega) + \xi_3^2 \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{5:2,0}(j\Omega) + \xi_5 \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{5:0,1}(j\Omega) + \xi_3^3 \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{7:3,0}(j\Omega) + \xi_3 \xi_5 \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{7:1,1}(j\Omega) \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \tilde{x}(j\Omega) = \xi_3 \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{3:1,0}(j\Omega) + \\ \xi_3^2 \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{5:2,0}(j\Omega) + \xi_5 \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{5:0,1}(j\Omega) + \\ \xi_3^3 \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{7:3,0}(j\Omega) + \xi_3 \xi_5 \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{7:1,1}(j\Omega) \\ \tilde{\Gamma}(j\Omega) = \xi_3 \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{3:1,0}(j\Omega) + \\ \xi_3^2 \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{5:2,0}(j\Omega) + \xi_5 \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{5:0,1}(j\Omega) + \\ \xi_3^3 \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{7:3,0}(j\Omega) + \xi_3 \xi_5 \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{7:1,1}(j\Omega) \end{cases} \quad (19)$$

因为输出频率响应函数  $\Phi$  和  $\Psi$  与非线性阻尼表征参数  $\xi_3$  和  $\xi_5$  无关, 如果  $\Phi$  和  $\Psi$  是事先知道的, 那么方程(18)与(19)可以为我们研究参数  $\xi_3$  和  $\xi_5$  对非线性隔振器传递性能的影响提供很大的方便. 理论上, 对于一个特定的非线性系统, 如果它的微分方程是已知的, 那么可以根据 Billings 和 Peyton Jones<sup>[21]</sup> 提出的算法计算出广义频率响应函数, 再根据广义频率响应函数计算出输出频率响应函数. 然而, 实际上, 即使是对于一个简单的非线性系统(例如  $Q=1$  的非线性隔振器), 根据广义频率响应函数计算输出频率响应函数的过程也是非常复杂的, 所以, 在工程实践当中很难直接使用这个算法.

为了解决这个问题, 从而在工程实践中将输出频率响应函数用于非线性系统的分析与设计, 我们在感兴趣的频率点采用数值计算的方法直接使用系统仿真或实验测试数据来估算输出频率响应函数. 以  $Q=2$  时的非线性隔振器为例, 通过计算此时  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  基频的输出频率响应函数来介绍该算法的具体步骤[12]. 显然, 方程(18)可以写成下式,

$$\begin{cases} \tilde{x}(j\Omega) = [1 \quad \xi_3 \quad \xi_3^2 \quad \xi_5 \quad \xi_3^3 \quad \xi_3 \xi_5] \Phi(j\Omega) \\ \tilde{\Gamma}(j\Omega) = [1 \quad \xi_3 \quad \xi_3^2 \quad \xi_5 \quad \xi_3^3 \quad \xi_3 \xi_5] \Psi(j\Omega) \end{cases} \quad (20)$$

其中,

$$\begin{cases} \Phi(j\Omega) = \left( H_1^{(x)}(j\Omega) \bar{A}_x(\Omega), \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{3:1,0}(j\Omega), \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{5:2,0}(j\Omega), \right. \\ \left. \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{5:0,1}(j\Omega), \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{7:3,0}(j\Omega), \Phi_{\xi_3, \xi_5}^{7:1,1}(j\Omega) \right) \\ \Psi(j\Omega) = \left( H_1^{(\Gamma)}(j\Omega) \bar{A}_\Gamma(\Omega), \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{3:1,0}(j\Omega), \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{5:2,0}(j\Omega), \right. \\ \left. \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{5:0,1}(j\Omega), \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{7:3,0}(j\Omega), \Psi_{\xi_3, \xi_5}^{7:1,1}(j\Omega) \right) \end{cases}$$

假设测试次数  $L \geq 6$ , 每次不同测试时,  $(\xi_3, \xi_5)$  的值分别取为  $(\xi_{3(1)}, \xi_{5(1)}), \dots, (\xi_{3(L)}, \xi_{5(L)})$ ,  $\tilde{x}(j\Omega)$  和  $\tilde{\Gamma}(j\Omega)$  的  $L$  次测试的值可以表示成下式,

$$x(j\Omega) = (\tilde{x}_{(1)}(j\Omega), \dots, \tilde{x}_{(L)}(j\Omega))',$$

$$\begin{cases} \Gamma(j\Omega) = (\tilde{\Gamma}_{(1)}(j\Omega), \dots, \tilde{\Gamma}_{(L)}(j\Omega))' \\ x(j\Omega) = \xi \Phi(j\Omega) \\ \Gamma(j\Omega) = \xi \Psi(j\Omega) \end{cases} \quad (21)$$

其中,

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 & \xi_{3(1)} & \xi_{3(1)}^2 & \xi_{5(1)} & \xi_{3(1)}^3 & \xi_{3(1)} \xi_{5(1)} \\ & & & & \vdots & \\ 1 & \xi_{3(L)} & \xi_{3(L)}^2 & \xi_{5(L)} & \xi_{3(L)}^3 & \xi_{3(L)} \xi_{5(L)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

因此, 通过对方程(21)使用最小二乘法, 可以计算得到  $\Phi(j\Omega)$  和  $\Psi(j\Omega)$ ,

$$\begin{cases} \Phi(j\Omega) = (\xi^T \xi)^{-1} \xi^T x(j\Omega) \\ \Psi(j\Omega) = (\xi^T \xi)^{-1} \xi^T \Gamma(j\Omega) \end{cases} \quad (23)$$

同理,  $\Phi(j\Omega)$  和  $\Psi(j\Omega)$  也可估算得到, 其它超谐分量的输出频率响应函数也可以根据上述程序估算得到. 得到估算的输出频率响应函数后, 当非线性表征参数取其它值时, 可以根据方程(18)和(19)计算出  $x(\tau)$  和  $\Gamma(\tau)$  的频率分量. 这为研究非线性表征参数如何影响非线性隔振器的传递性能提供了一个很好的方法. 而且, 该方法将大大减少对非线性隔振器进行优化设计时的计算量.

## 2 非线性反对称阻尼对隔振器的影响

在本节中, 将基于输出频率响应函数来研究非线性反对称阻尼对隔振器的影响. 第二节给出了应用输出频率响应函数方法的详细步骤, 这里只做一个简单的总结, 总结如下:

- 1) 用四阶 Runge - Kutta 方法计算非线性表征参数取不同值时, 非线性隔振器的响应;
- 2) 根据计算得到的系统响应, 利用方程(23)所描述的方法估算所有感兴趣的频率分量的输出频率响应函数;
- 3) 用估算得到的输出频率响应函数来预测非线性表征参数取不同于步骤1中所取的值时, 振动传递性频率分量的值.
- 4) 绘制出频率分量与非线性表征参数之间的关系.

通过以下三个例子来分析非线性反对称阻尼对隔振器的影响.

例1:  $Q=1$

在这个例子当中,  $Q=1$ , 非线性反对称阻尼仅仅取决于非线性表征参数  $\xi_3$ , 图2和图3显示了  $\xi_3$

对 $|\tilde{\Gamma}(j\Omega)|$ ,  $|\tilde{\Gamma}(j3\Omega)|$ ,  $|\tilde{x}(j\Omega)|$ 和 $|\tilde{x}(j3\Omega)|$ 的影响. 从图2(a)中可以看出在共振区域( $\Omega \approx 1$ ),  $\xi_3$ 的增加可以明显降低力传递性 $\Gamma(\tau)$ 的基频成分; 相反, 在频率比隔振器的共振频率低得多或高得多的频率范围,  $\xi_3$ 对力传递性 $\Gamma(\tau)$ 几乎没有影响. 图2(b)显示, 在共振区间,  $\xi_3$ 的变化仅仅引起力传递性 $\Gamma(\tau)$ 的第三阶超谐波分量发生轻微的改变. 同样, 从图3(a)可以看出在共振范围( $\Omega \approx 1$ ),  $\xi_3$ 的增加可以明显降低位移传递性 $x(\tau)$ 的基频成分; 然而, 在非共振频率范围, 仅能产生轻微的影响. 图3(b)显示, 非线性表征参数 $\xi_3$ 仅仅在 $\Omega > 1$ 的频率区间才会对 $x(\tau)$ 的第三阶超谐波分量产生影响, 即随着 $\xi_3$ 的增大,  $|\tilde{x}(j3\Omega)|$ 的值也有轻微的增大.

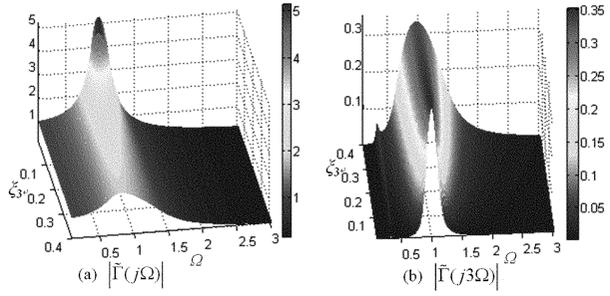


图2  $\xi_3$ 对 $\Gamma(\tau)$ 基频和第3阶谐波分量的影响

Fig.2 the effects of  $\xi_3$  on the fundamental and the third harmonic components of  $\Gamma(\tau)$

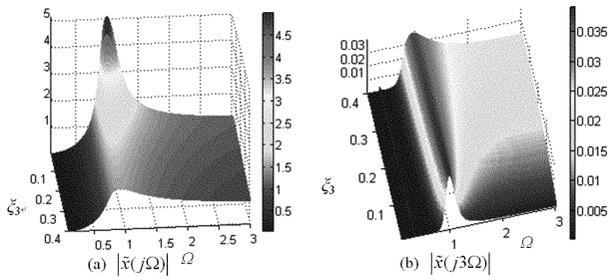


图3  $\xi_3$ 对 $x(\tau)$ 基频和第3阶谐波分量的影响

Fig.3 the effects of  $\xi_3$  on the fundamental and the third harmonic components of  $x(\tau)$

例2:  $Q=2$ ,  $\xi_5=0.05$

在这个例子当中, 非线性反对称阻尼取决于两个非线性特性参数 $\xi_3$ 和 $\xi_5$ .  $\xi_5$ 等于0.05. 图4和图5分别显示出 $\xi_3$ 对力传递性能和位移传递性能的影响. 从图中可以看出 $\xi_3$ 对力传递性能和位移传递性能的影响与例1非常相似. 图4(a)和图5(a)显示出, 在共振区域,  $\xi_3$ 的增加可以大大地降低 $\Gamma(\tau)$ 和 $x(\tau)$ 的基频分量; 但是在非共振区域,  $\xi_3$ 仅

有轻微的影响. 另外, 图4(b)和图5(b)显示, 在共振区域,  $\xi_3$ 的增加可以轻微地降低 $\Gamma(\tau)$ 和 $x(\tau)$ 的第三阶超谐波分量; 但是在非共振区域,  $\xi_3$ 的影响几乎可以被忽略.

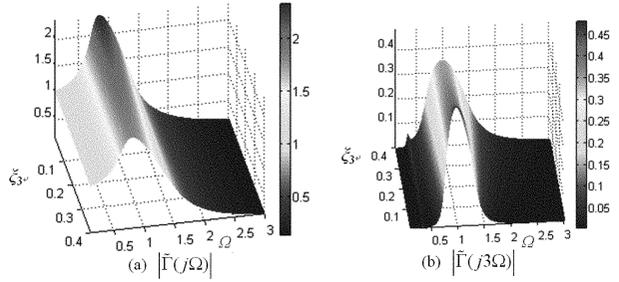


图4  $\xi_3$ 对 $\Gamma(\tau)$ 基频和第3阶谐波分量的影响

Fig.4 the effects of  $\xi_3$  on the fundamental and the third harmonic components of  $\Gamma(\tau)$

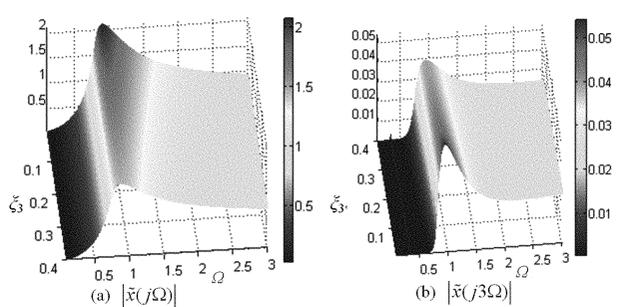


图5  $\xi_3$ 对 $x(\tau)$ 基频和第3阶谐波分量的影响

Fig.5 the effects of  $\xi_3$  on the fundamental and the third harmonic components of  $x(\tau)$

例3:  $Q=2$ ,  $\xi_3=0.05$

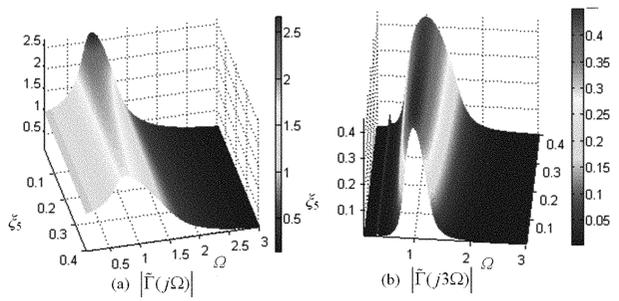


图6  $\xi_5$ 对 $\Gamma(\tau)$ 基频和第3阶谐波分量的影响

Fig.6 the effects of  $\xi_5$  on the fundamental and the third harmonic components of  $\Gamma(\tau)$

在这个例子当中, 非线性反对称阻尼取决于两个非线性表征参数 $\xi_3$ 和 $\xi_5$ .  $\xi_3$ 等于常数0.05,  $\xi_5$ 在区间0.01~0.4中变化. 从图6(a)和图7(a)可以看出, 在共振区域, 增加 $\xi_5$ 可以大大降低 $\Gamma(\tau)$ 和 $x(\tau)$ 的基频分量; 与此相反, 在非共振区域, 几乎没有影响. 但是, 图6(b)和图7(b)显示, 非线性

参数对  $\Gamma(\tau)$  和  $x(\tau)$  的第三阶超谐波分量几乎没有影响。

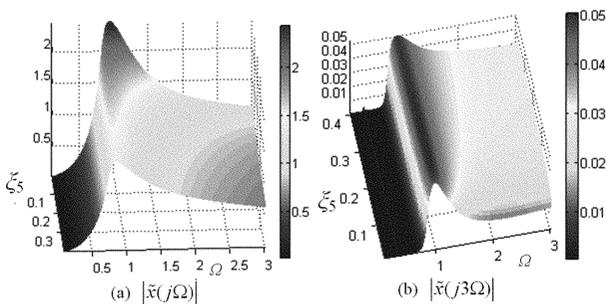


图7  $\xi_5$  对  $x(\tau)$  基频和第3阶谐波分量的影响

Fig. 7 the effects of  $\xi_5$  on the fundamental and the third harmonic components of  $x(\tau)$

根据对上述三个数值例子的研究,非线性反对称阻尼对隔振器影响的分析结果可归纳如下:

1) 在共振区域,  $\xi_3$  或  $\xi_5$  的增加都能显著地降低所有的力传递性能和位移传递性能的基谐波分量;

2) 在非共振区域,非线性阻尼表征参数  $\xi_3$  和  $\xi_5$  对所有的力传递性能和位移传递性能的基谐波分量几乎没有影响;

3) 在非共振区域,非线性阻尼表征参数  $\xi_3$  和  $\xi_5$  对所有的力传递性能和位移传递性能的超谐波分量几乎没有或只有轻微影响;

4) 正如图(2)~(7)显示的那样,无论是力还是位移传递性能,第三阶超谐波分量和其它更高阶的超谐波分量(虽然在上述例子中没有进行验证)比那些基谐波分量要小的多,并且非线性阻尼表征参数  $\xi_3$  和  $\xi_5$  对超谐波分量几乎没有影响,因此,当分析力和位移的传递性能时,只简单地对  $\Gamma(\tau)$  和  $x(\tau)$  的基频分量(即  $\tilde{F}(j\Omega)$  和  $|\tilde{x}(j\Omega)|$ ) 进行分析是合理的。

这些结论对于具有非线性反对称阻尼的隔振器的分析和与设计具有重大意义。在本文当中只讨论一种比较好的使隔振器具有非线性反对称阻尼特性的方法,即采用 MR 阻尼器。该阻尼器实际上是一个半主动控制设备,可通过调整阻尼器中液体的电流强度来改变它的阻尼特性。因此,为了使 MR 阻尼器具有非线性反对称阻尼特性,最简单的方法就是根据该阻尼器中液体的流速来控制电流的强度。

### 3 结论

在本文当中,利用输出频率响应函数对具有非线性反对称阻尼表征的隔振器的传递性能进行了研究。结合输出频率响应函数和数值仿真研究得到了重要的结论。这些结论表明,通过简化研究非线性隔振器的力和位移输出的基谐波分量来分析力和位移传递性能是合理的。此外,在隔振器中引入非线性反对称阻尼,在共振频率区可以明显降低振动的力传递性能和位移传递性能;但在非共振区对传递性能几乎没有影响。这些结论对于具有非线性反对称阻尼的隔振器的分析和与设计具有重大意义。

### 参 考 文 献

- 1 韦凌云,赵玫. 基于遗传算法的线性两自由度隔振器的瞬态最优设计. 振动与冲击, 2005, 24(3): 65~69 (Wei L Y, Zhao M. Transient optimization design of linear two-degree of freedom isolation system based on genetic algorithm. *Journal of Vibration and Shock*, 2005, 24(3): 65~69 (in Chinese))
- 2 赵荣国,徐友钺,陈忠富等. 一个新的非线性迟滞隔振系统动力学模型. 机械工程学报, 2004, 40(2): 185~188 (Zhao Rongguo, Xu Youju, Chen Zhongfu et al. New dynamic model for nonlinear hysteresis vibration isolation system. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2004, 40(2): 185~188 (in Chinese))
- 3 杨庆俊,王晓雷,郑钢铁. 气动八作动器隔振平台的主动隔振研究. 应用力学学报, 2007, 24(3): 339~342 (Yang Q J, Wang X L, Zheng G T. Active vibration isolation platform with eight pneumatic actuators. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2007, 24(3): 339~342 (in Chinese))
- 4 杜华军,黄文虎,邹振祝. 航天支架结构的被动振动控制. 应用力学学报, 2002, 19(3): 10~14 (Du H J, Huang W H, Zou Z Z. Passive vibration control of aerospace supporter. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2002, 19(3): 10~14 (in Chinese))
- 5 C E Crede. Vibration and shock isolation. New York: John Wiley, 1951
- 6 J I Soliman, E Ismailzadeh. Optimization of unidirectional viscous damped vibration isolation system (for airborne equipment protection). *Journal of Sound and Vibration*,

- 1974, 36 (4) :527 ~ 539
- 7 J C Snowdon. Vibration isolation; use and characterization. *Rubber Chemistry and Technology*, 1980, 53 (5) : 1041 ~ 1087
- 8 R A Ibrahim. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 314 (3-5) :371 ~ 452
- 9 L Jiang, D Stredulinsky, J Szabo, et al. Numerical characterization of nonlinear stiffness properties of pre-stressed vibration isolation mounts. *Canadian Acoustics-Acoustique Canadienne*, 2002, 30(3) : 70 ~ 71
- 10 T A Nayfeh, E Emaci, A F Vakakis. Application of nonlinear localization to the optimization of a vibration isolation system. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1997, 35 (8) :1378 ~ 1386
- 11 G N Jazar, R Houim, A Narimani et al. Frequency Response and Jump Avoidance in a Nonlinear Passive Engine Mount. *Journal of Vibration and Control*, 2006, 12(11) : 1205 ~ 1237
- 12 Z Q Lang, S A Billings, R Yue, J Li. Output frequency response functions of nonlinear Volterra systems. *Automatica*, 2007, 43(5) : 805 ~ 816
- 13 Z K Peng, Z Q Lang. The effects of nonlinearity on the output frequency response of a passive engine mount. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 318(1-2) :313 ~ 328
- 14 Jeffreys H, Jeffreys B S . *Methods of Mathematical Physics*, 3rd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1988
- 15 W H Lin, A K Chopra. Earthquake response of elastic SDF systems with non-linear fluid viscous dampers. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2002, 31 (9) : 1623 ~ 1642

## ANALYSIS ON TRANSMISSIBILITY FOR A CLASS OF NONLINEAR VIBRATION ISOLATORS \*

Peng Zhike<sup>1</sup> Lang Ziqiang<sup>2</sup> Meng Guang<sup>1</sup> Cheng Changming<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

(2. Department of Automatic Control and System Engineering, University of Sheffield, Sheffield, S1 3JD, UK)

**Abstract** Nonlinear output frequency response functions developed from the Volterra series is a new concept. Based on the concept, an explicit analytical relationship between the transmissibility of vibration isolator and the nonlinear characteristic parameters was derived for a wide class of nonlinear isolators that have nonlinear anti-symmetric damping characteristics. Further, the effect of the nonlinear damping parameters on the force and displacement transmissibility of vibration isolators was studied. The results show that, although the appearance of super-harmonic components for the nonlinear vibration isolators are subjected to the sinusoidal vibration excitation, the assessment of it's transmissibility can be simply investigated from the relationship between the fundamental harmonic components of the input and outputs of the nonlinear isolators. Moreover, the introduction of a nonlinear anti-symmetric damping into vibration isolators can significantly suppress both the force transmissibility and the displacement transmissibility over the resonant frequency region, but has almost no effect on the transmissibility at non-resonant regions. These conclusions are helpful in the analysis and design of the nonlinear vibration isolators with nonlinear anti-symmetric damping.

**Key words** nonlinear vibration, Volterra series, nonlinear damping, vibration isolators